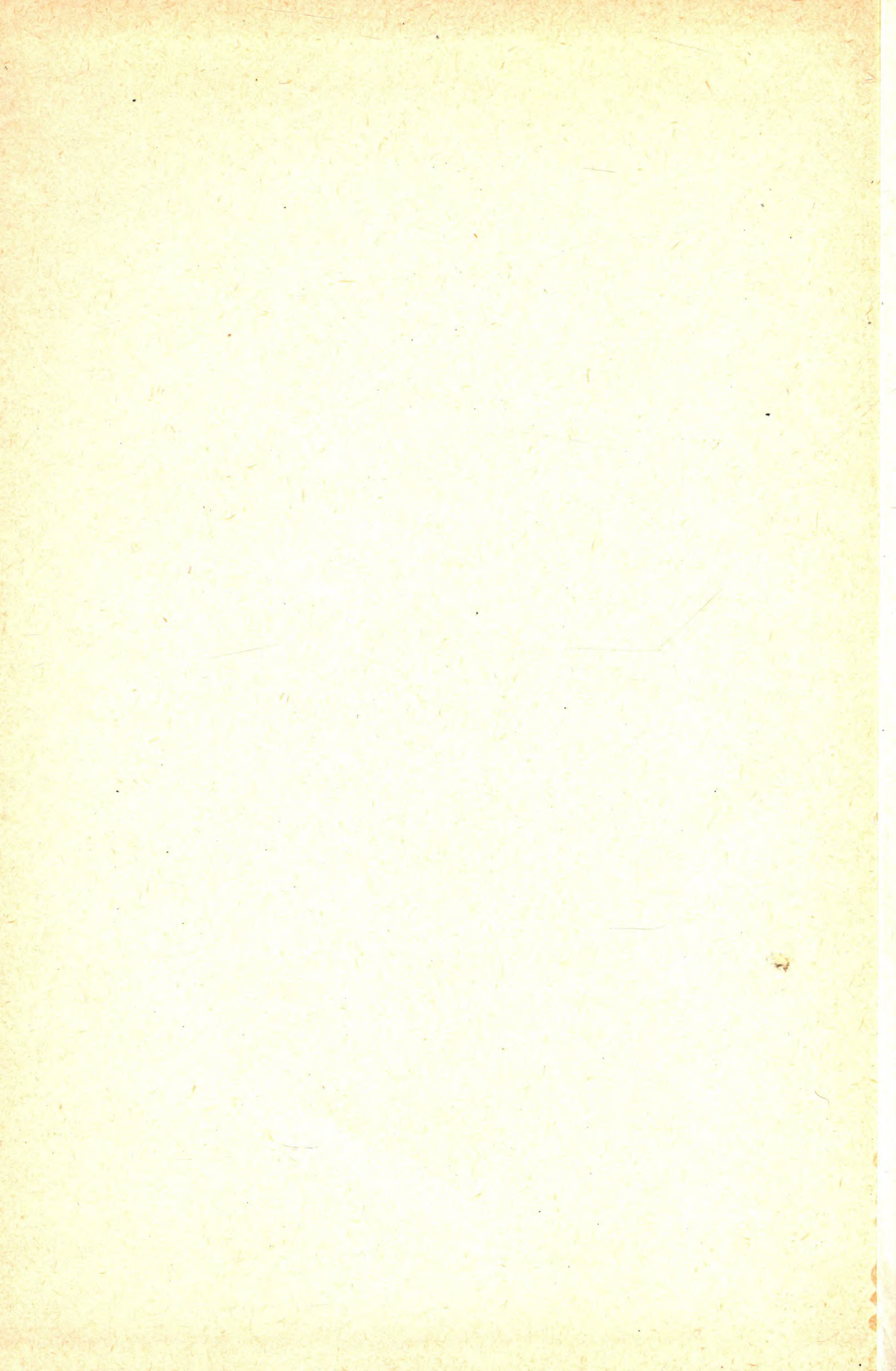


С. ХЕЛГАСОН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ
ГЕОМЕТРИЯ
И СИММЕТРИЧЕСКИЕ
ПРОСТРАНСТВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО

«МИР»

DIFFERENTIAL GEOMETRY
and
SYMMETRIC SPACES

SIGURDUR HELGASON

Department of Mathematics,
Massachusetts Institute of Technology,
Cambridge, Massachusetts

1962

ACADEMIC PRESS
NEW YORK AND LONDON

С. ХЕЛГАСОН

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ
ГЕОМЕТРИЯ
И СИММЕТРИЧЕСКИЕ
ПРОСТРАНСТВА**

Перевод с английского
А. Л. ОНИЩИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» • МОСКВА 1964

Автор ясно и четко излагает картановскую теорию симметрических пространств, играющую важную роль в развитии современной геометрии, алгебры и анализа. Несмотря на то, что знать эту теорию необходимо весьма широкому кругу математиков, в монографической литературе она еще ни разу не освещалась; что же касается изложения самого Картана, то оно тяжело для понимания и недостаточно строго с современной точки зрения. В книге также изложены результаты современных исследований в этой области.

Книга рассчитана на математиков различных специальностей; она будет полезна преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов математических факультетов университетов и пединститутов.

Автор этой книги Сигурдур Хелгасон специально для русского издания любезно сделал ряд исправлений в тексте и прислал дополнительный список литературы. Издательство «Мир» выражает автору глубокую признательность за его работу.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Изучение симметричных пространств никогда не велось так активно, как в настоящее время (если не считать периода первоначальных работ Э. Картана). Это объясняется все возрастающим взаимодействием теории симметрических пространств со многими областями математики, а именно с теорией представлений групп, анализом Фурье, дифференциальными уравнениями, теорией потенциала, интегральной геометрией, автоморфными функциями, теорией чисел и топологией, не говоря уже о дифференциальной геометрии и теории полупростых групп Ли. Чтобы указать результаты, связанные с симметрическими пространствами и полученные после написания этой книги, мы даем дополнительный список литературы, который, однако, не претендует на полноту.

Я хочу выразить мою сердечную благодарность переводчику А. Л. Онищук, который указал мне ряд опечаток и неясных мест в оригинальном тексте книги.

Сигурдур Хелгасон

ПРЕДИСЛОВИЕ

Согласно первоначальному определению, симметрическое пространство — это риманово многообразие, тензор кривизны которого инвариантен относительно всех параллельных переносов. Э. Картан в 1926 году положил начало теории симметрических пространств и в конце двадцатых годов сильно развил эту теорию. По определению, симметрические пространства составляют специальный раздел римановой геометрии; однако их теория сливается с теорией полупростых групп Ли. Благодаря этому обстоятельству мы обладаем весьма детальной и обширной информацией об этих пространствах, и поэтому они часто используются в качестве примеров для проверки общих гипотез. С другой стороны, симметрических пространств достаточно много, и их положение среди римановых многообразий так хорошо известно, что надлежащим образом сформулированная экстраполяция на произвольные римановы многообразия часто приводит к хорошим задачам и гипотезам.

Из данного выше определения не видна сразу специальная природа симметрических пространств (особенно если вспомнить, что все римановы многообразия и все кэлеровы многообразия обладают тензорными полями, инвариантными относительно параллельных переносов). Однако теория приводит к следующему замечательному факту: симметрические пространства, с локальной точки зрения, — это в точности римановы многообразия вида $R^n \times G/K$, где R^n — n -мерное евклидово пространство, G — полупростая группа Ли, имеющая инволютивный автоморфизм, множество неподвижных точек которого совпадает (в основном) с компактной группой K , и G/K снабжено инвариантной римановой структурой.

Классификация всех простых вещественных алгебр Ли, принадлежащая Э. Картану, быстро привела последнего к явной

классификации симметрических пространств в терминах классических и особых простых групп Ли. С другой стороны, упомянутая выше полупростая группа Ли G (или, вернее, класс групп, локально изоморфных G) является совершенно произвольной. Благодаря этому появляется возможность применения к теории полупростых групп Ли сильных геометрических средств. Кроме того, теория симметрических пространств помогает объединить и объяснить с общей точки зрения различные явления в классических геометриях. Так, изоморфизмы, имеющиеся между классическими группами небольших размерностей, получают геометрическую интерпретацию при помощи некоторых изометрий; аналогия между сферическими и гиперболическими геометриями является частным случаем общей двойственности для симметрических пространств.

На симметрическом пространстве с его разработанной геометрией особый интерес приобретает глобальная теория функций. Теория интегрирования, анализ Фурье и дифференциальные операторы в частных производных возникают здесь каноническим образом из требования геометрической инвариантности. Хотя эти теории и связи между ними очень хорошо известны в евклидовом пространстве (интеграл Лебега, интеграл Фурье, дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами), распространение их на симметрические пространства общего вида немедленно приводит к интересным нерешенным задачам. Два типа неевклидовых симметрических пространств — компактный и некомпактный — дают различные виды задач из теории функций. Симметрические пространства некомпактного типа не ставят топологических трудностей (так как эти пространства гомеоморфны евклидовым пространствам), и теория функций на них связана с теорией бесконечномерных представлений произвольных полупростых групп Ли, в которой в последние годы имеются большие успехи. С другой стороны, для симметрических пространств компактного типа естественными рамками является классическая теория конечномерных представлений компактных групп Ли, но геометрия этих пространств влияет на теорию функций на них менее тривиальным образом.

Цель настоящей книги состоит в том, чтобы дать содержательное введение в теорию Картана, а также познакомить чита-

теля с более новыми результатами в теории функций на симметрических пространствах.

Глава I содержит необходимые факты из дифференциальной геометрии, а основные геометрические свойства симметрических пространств изложены в главе IV. После этого главным предметом изучения становится теория групп Ли, и в главе IX дается картановская классификация симметрических пространств. Хотя эта классификация может рассматриваться как кульминационный пункт в теории Картана, мы ограничились в главе IX доказательством общих теорем, нужных для классификации и для изложения списка Картана. Этот заметный пропуск оправдывается, во-первых, тем, что применение классификации в экспериментальных целях основано больше на ее существовании, чем на доказательстве того, что она исчерпывает класс симметрических пространств. Во-вторых, этот пропуск позволил нам включить в книгу главу X (о функциях на симметрических пространствах), где возникает много открытых вопросов. В некоторых местах мы указываем связи с разделами классического анализа, такими, как анализ Фурье, теория специальных функций (Бесселя, Лежандра) и интегральные теоремы для инвариантных дифференциальных уравнений. Совершенно не упоминается, однако, роль симметрических пространств в теории автоморфных функций и аналитической теории чисел. Мы не нашли также возможным включить в книгу более новые топологические исследования по симметрическим пространствам.

Каждая глава начинается кратким резюме и заканчивается указанием источников, а также некоторыми замечаниями по истории вопроса. Цель этих исторических заметок состоит, во-первых, в том, чтобы ориентировать читателя в обширной литературе, и, во-вторых, отметить чьи-либо заслуги там, где это следует сделать. Но здесь мы должны заранее извиниться за неполноту и за возможные неточности¹⁾.

Книга возникла на основе лекций, прочитанных в Чикагском университете в 1958 г. и в Колумбийском университете в 1959—

¹⁾ «En hvatki es missagt es í fræðum þcessum, þá es skylt at hafa þat heldr, es sannara reynisk». (Ari Fróði: Íslendingabók, 1124.) [«Но что бы ни было ошибочного в этих рассказах, из них следует выбрать то, что окажется более близким к истине» (Ари Мудрый, Книга об исландцах, 1124 г.).]

1960 г. В Колумбийском университете я имел много долгих и ценных бесед с профессором Хариш-Чандра; большие куски глав VIII и X посвящены его результатам. Я счастлив выразить здесь ему мою глубокую благодарность. Я обязан также профессорам Кораньи, де Леу, Люфту и Меркилу, которые прочитали значительные части рукописи и сделали много исправлений. Наконец, я хочу поблагодарить мою жену, которая терпеливо помогала мне в подготовке рукописи и отпечатала всю ее на машинке.

УКАЗАНИЯ ЧИТАТЕЛЮ

Поскольку эта книга предназначена для читателей, обладающих различной подготовкой, мы дадим здесь некоторые указания для пользования ею.

Главу I, главу IV, § 1, и главу VIII, § 1—3, можно читать независимо от остальной части книги. Эти разделы дадут читателю неполное, но краткое и элементарное введение в современную дифференциальную геометрию, предполагающее лишь знание математического анализа и, в небольшой степени, теоретико-множественной топологии.

Главу I, § 1—6, главу II и главу III можно читать независимо от остальной части книги как введение в теорию полупростых групп Ли. Главы II и III предполагают, однако, некоторое знакомство с теорией топологических групп.

Главы I—IX не требуют никакой предварительной подготовки, кроме указанной выше. Но в главе X используются некоторые факты из теории гильбертовых пространств и предполагается некоторое знакомство с теорией меры.

Каждая глава заканчивается небольшим числом упражнений. За немногими исключениями (которые отмечены звездочкой), эти упражнения могут быть выполнены методами, развитыми в тексте. Упражнения, отмеченные звездочкой, — это теоремы, которые могли бы быть включены в текст, но не являются необходимыми для следующих глав.

С. Хелгасон

Глава I

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Эта вводная глава естественным образом делится на три части: § 1—3, в которых речь идет о тензорных полях на многообразиях; § 4—8, где рассматриваются общие свойства аффинных связностей, и § 9—14, где дается введение в риманову геометрию с некоторым ударением на вопросах, которые понадобятся в дальнейшем при изучении симметрических пространств.

§ 1—3. Если лишить евклидово пространство структуры векторного пространства и оставить только его дифференцируемую структуру, то существует много способов гладкого соединения его областей друг с другом, при помощи которых получаются так называемые дифференцируемые многообразия. Здесь можно придать смысл локальным понятиям, таким, как дифференцируемая функция и касательный вектор. Тем самым многообразие можно рассматривать «тангенциально», т. е. путем рассмотрения семейства его касательных пространств, подобно тому как кривая на плоскости, грубо говоря, определяется семейством своих касательных. Эта точка зрения приводит к изучению тензорных полей, являющихся важным орудием в локальной и глобальной дифференциальной геометрии. Они образуют алгебру $\mathfrak{D}(M)$ — смешанную тензорную алгебру над многообразием M . Кососимметрические ковариантные тензорные поля (дифференциальные формы) составляют подмодуль $\mathfrak{A}(M)$ в $\mathfrak{D}(M)$, в котором, исходя из умножения в $\mathfrak{D}(M)$, определяется внешнее умножение. Полученная алгебра называется алгеброй Грассмана многообразия M . Благодаря работам Э. Картана алгебра Грассмана с внешним дифференцированием d стала незаменимым инструментом при рассмотрении подмногообразий, которые аналитически описываются нулями дифференциальных форм. Более того, пара $(\mathfrak{A}(M), d)$ определяет, в силу теоремы де Рама, когомологии многообразия M . Однако мы не будем здесь касаться этой теоремы.

§ 4—8. Понятие аффинной связности было впервые определено Леви-Чивита для римановых многообразий. Оно существенно обобщает понятие параллельности для евклидовых пространств. На многообразии со счетной базой аффинная связность всегда существует (см. упражнения в конце главы). Если на многообразии M задана аффинная связность, то каждой кривой $\gamma(t)$ в M можно сопоставить изоморфизм между двумя касательными пространствами $M_{\gamma(t_1)}$ и $M_{\gamma(t_2)}$. Таким образом, аффинная связность позволяет связать касательные пространства в удаленных друг от друга точках многообразия. Если все касательные векторы к кривой $\gamma(t)$ соответствуют друг другу при этих изоморфизмах, то мы имеем аналог прямой линии, так называемую геодезическую. Теория аффинных связностей сводится в основном к изучению отображений $\text{Exp}_p: M_p \rightarrow M$, при которых прямые линии (или их отрезки), проходящие через начало координат в касательном пространстве M_p , переходят в геодезические в M , проходящие через p . Каждое отображение Exp_p есть диффеоморфизм некоторой окрестности точки 0 в M_p в M и тем самым определяет так называемые нормальные координаты в точке p . В § 6

даются и некоторые другие локальные свойства отображений Exp_p , а именно существование выпуклых окрестностей и формула для дифференциала отображения Exp_p .

Аффинная связность порождает два важных тензорных поля: поле тензора кривизны и поле тензора кручения, которые в свою очередь описывают аффинную связность при помощи структурных уравнений Э. Картана ([6] и [7], § 8).

§ 9—14. Особый интерес представляет тензорное поле на многообразии, называемое римановой структурой. Оно каноническим образом порождает на многообразии метрику. Оно определяет также аффинную связность на многообразии — риманову связность. Эта аффинная связность обладает тем свойством, что геодезическая является кратчайшей из кривых, соединяющих две (не слишком удаленные друг от друга) точки. Связь между метрикой и геодезическими развита дальше в § 9—10. Изложение основано главным образом на структурных уравнениях Э. Картана и является независимым от вариационного исчисления.

Аналог гауссовой кривизны поверхности для высоких размерностей был открыт Риманом. Риман ввел тензорное поле, которое для любой пары касательных векторов в точке измеряет кривизну соответствующего сечения, т. е. гауссову кривизну поверхности, порожденной геодезическими, которые касаются плоскости, натянутой на данные векторы. Особый интерес представляют римановы многообразия, у которых кривизна плоского сечения всегда имеет один и тот же знак. Неприводимые симметрические пространства принадлежат к этому типу. В § 13 рассмотрены римановы многообразия отрицательной кривизны, поскольку они важны в теории симметрических пространств. Большие успехи были сделаны в последнее время в изучении римановых многообразий, кривизны плоских сечений которых ограничены снизу некоторой положительной константой. Однако мы не касаемся этих вопросов, так как они не понадобятся в последующих главах. В последнем параграфе речь идет о вполне геодезических подмногообразиях, которые характеризуются тем условием, что геодезическая, касающаяся подмногообразия в некоторой точке, полностью лежит в нем. В противоположность положению, имеющему место для римановых многообразий общего вида, вполне геодезические подмногообразия часто встречаются для симметрических пространств.

§ 1. Многообразие

Пусть R^m и R^n — два евклидовых пространства размерностей m и n соответственно. Пусть O и O' — открытые подмножества, $O \subset R^m$, $O' \subset R^n$, и пусть φ — отображение множества O в O' . Отображение φ называется *дифференцируемым*, если координаты $y_j(\varphi(p))$ точки $\varphi(p)$ являются дифференцируемыми (т. е. бесконечно дифференцируемыми) функциями координат $x_i(p)$ ($p \in O$). Отображение φ называется *аналитическим*, если для всякой точки $p \in O$ существуют такая окрестность U точки p и такие n степенных рядов P_j ($1 \leq j \leq n$) от m переменных, что $y_j(\varphi(q)) = P_j(x_1(q) - x_1(p), \dots, x_m(q) - x_m(p))$ ($1 \leq j \leq n$) для $q \in U$. Дифференцируемое отображение φ называется *диффеоморфизмом* множества O на O' , если $\varphi(O) = O'$, φ взаимно однозначно и обратное отображение φ^{-1} дифференцируемо. В случае $n = 1$ термин «отображение» обычно заменяют термином «функция».

Аналитическая функция на R^m , обращающаяся в 0 на открытом множестве, тождественно равна нулю. Для дифференцируе-

мых функций положение совершенно иное. Действительно, если A и B — непересекающиеся подмножества в $\mathbf{R}^m$, причем A компактно, а B замкнуто, то существует дифференцируемая функция φ , тождественно равная 1 на A и 0 на B . Обычный способ построения такой функции φ состоит в следующем.

Положим $0 < a < b$ и рассмотрим функцию f на $\mathbf{R}$, определенную формулой

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right), & \text{если } a < x < b, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда f дифференцируема и тем же свойством обладает функция

$$F(x) = \int_x^b f(t) dt \Big/ \int_a^b f(t) dt,$$

которая равна 1 для $x \leq a$ и 0 для $x \geq b$. Функция ψ на $\mathbf{R}^m$, заданная равенством

$$\psi(x_1, \dots, x_m) = F(x_1^2 + \dots + x_m^2),$$

дифференцируема и равна 1 для $x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq a$ и 0 для $x_1^2 + \dots + x_m^2 \geq b$. Пусть S и S' — две концентрические сферы в $\mathbf{R}^m$, причем S' лежит внутри S . Исходя из функции ψ и используя линейное преобразование пространства $\mathbf{R}^m$, можно построить дифференцируемую функцию на $\mathbf{R}^m$, принимающую значение 1 внутри S' и 0 вне S . Обратимся теперь к множествам A и B . В силу компактности множества A , можно найти такую конечную систему сфер S_i ($1 \leq i \leq n$), что соответствующие открытые шары B_i ($1 \leq i \leq n$) образуют покрытие множества A (т. е. $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$) и что замкнутые шары $\bar{B}_i$ ($1 \leq i \leq n$) не пересекаются с B . Каждую сферу S_i можно уменьшить до такой концентрической сферы S'_i , что соответствующие открытые шары B'_i все еще покрывают A . Пусть ψ_i — дифференцируемая функция на $\mathbf{R}^m$, равная тождественно 1 на B'_i и тождественно 0 на дополнении к B_i . Тогда функция

$$\varphi = 1 - (1 - \psi_1)(1 - \psi_2) \dots (1 - \psi_n)$$

есть дифференцируемая функция на $\mathbf{R}^m$, равная тождественно 1 на A и тождественно 0 на B .

Пусть M — топологическое пространство. Предположим, что M удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа, т. е. что любые две различные точки в M можно разделить непересекающимися открытыми множествами. *Открытой картой* в M называется пара (U, φ) , где U — открытое подмножество в M и φ — гомеоморфизм множества U на открытое подмножество из $\mathbf{R}^m$.

Определение. Пусть M — хаусдорфово пространство. Дифференцируемая структура на M размерности m есть такой набор открытых карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ на M , где $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ — открытое подмножество в $\mathbf{R}^m$, что выполняются следующие условия:

$$(M_1) \quad M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

(M_2) Для любой пары $\alpha, \beta \in A$ отображение $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ есть дифференцируемое отображение множества $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ на $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.

(M_3) Набор $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ является максимальным семейством открытых карт, для которого имеют место (M_1) и (M_2) .

Дифференцируемое многообразие (или многообразие класса C^∞ , или просто многообразие) размерности m есть хаусдорфово пространство с дифференцируемой структурой размерности m . Если M — многообразие, то локальная карта на M (или локальная система координат на M) — это, по определению, пара $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, где $\alpha \in A$. Если $p \in U_\alpha$ и $\varphi_\alpha(p) = (x_1(p), \dots, x_m(p))$, то множество U_α называется координатной окрестностью точки p , а числа $x_i(p)$ называются локальными координатами точки p . Отображение $\varphi_\alpha: q \rightarrow (x_1(q), \dots, x_m(q))$ ($q \in U_\alpha$) часто обозначается $\{x_1, \dots, x_m\}$.

Замечание 1. Проверка условия (M_3) в конкретных примерах часто вызывает затруднения. Поэтому важно заметить, что условие (M_3) в определении многообразия не является существенным. Действительно, если выполнены только (M_1) и (M_2) , то семейство $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ можно единственным образом расширить до такого семейства $\mathfrak{M}$ открытых карт, что выполняются (M_1) , (M_2) и (M_3) . Это очевидно, если определить $\mathfrak{M}$ как множество всех открытых карт (V, φ) на M , обладающих свойствами: (1) $\varphi(V)$ есть открытое множество в $\mathbf{R}^m$; (2) $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ для каждого $\alpha \in A$ есть диффеоморфизм множества $\varphi(V \cap U_\alpha)$ на $\varphi_\alpha(V \cap U_\alpha)$.

Замечание 2. Если считать, что $\mathbf{R}^m$ для $m=0$ обозначает точку, то предыдущее определение остается в силе. Многообразия размерности 0 суть дискретные топологические пространства.

Замечание 3. Многообразие связно тогда и только тогда, когда оно линейно связно. Доказательство оставляем читателю.

Аналитическая структура размерности m определяется аналогичным образом. В (M_2) надо заменить слово «дифференцируемое» на «аналитическое». В этом случае M называется аналитическим многообразием.

Чтобы определить комплексное многообразие размерности m , мы заменим $\mathbf{R}^m$ в определении дифференцируемого многообразия m -мерным комплексным пространством $\mathbf{C}^m$. Условие (M_2) заменяется условием, согласно которому m координат точки $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(p)$

должны быть голоморфными функциями координат точки p . Функция $f(z_1, \dots, z_m)$ от m комплексных переменных называется здесь *голоморфной*, если в каждой точке $(z_1^0, \dots, z_m^0)$ существует степенной ряд

$$\sum a_{n_1 \dots n_m} (z_1 - z_1^0)^{n_1} \dots (z_m - z_m^0)^{n_m},$$

который абсолютно сходится к $f(z_1, \dots, z_m)$ в окрестности этой точки.

Многообразия, с которыми мы будем иметь дело в последующих главах этой книги (в основном группы Ли и их факторпространства), являются аналитическими многообразиями. Из замечания 1 ясно, что аналитическое многообразие всегда можно рассматривать как дифференцируемое многообразие. Это часто оказывается удобным по той причине, что, как уже было показано для R^m , класс дифференцируемых функций значительно богаче, чем класс аналитических функций.

Пусть f — вещественная функция на многообразии M класса C^∞ . Функция f называется *дифференцируемой* в точке $p \in M$, если существует такая локальная карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, где $p \in U_\alpha$, что сложная функция $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ является дифференцируемой функцией на $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Функция f называется *дифференцируемой*, если она дифференцируема в каждой точке $p \in M$. Если многообразие M аналитично, то функция f называется *аналитической* в $p \in M$, если существует такая локальная карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, что $p \in U_\alpha$, и $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ — аналитическая функция на множестве $\varphi_\alpha(U_\alpha)$.

Пусть M — дифференцируемое многообразие размерности m , и пусть $\mathfrak{F}$ — множество всех дифференцируемых функций на M . Множество $\mathfrak{F}$ обладает следующими свойствами:

($\mathfrak{F}_1$) Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in \mathfrak{F}$, и пусть u — дифференцируемая функция на R^r . Тогда $u(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \in \mathfrak{F}$.

($\mathfrak{F}_2$) Пусть f — такая вещественная функция на M , что для каждой точки $p \in M$ существует функция $g \in \mathfrak{F}$, совпадающая с f в некоторой окрестности точки p . Тогда $f \in \mathfrak{F}$.

($\mathfrak{F}_3$) Для каждой точки $p \in M$ существуют такие m функций $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathfrak{F}$ и открытая окрестность U точки p , что отображение $q \rightarrow (\varphi_1(q), \dots, \varphi_m(q))$ ($q \in U$) является гомеоморфизмом множества U на открытое подмножество в R^m . Множество U и функции $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ могут быть выбраны таким образом, что каждая $f \in \mathfrak{F}$ совпадает на U с функцией вида $u(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, где u — дифференцируемая функция на R^m .

Свойства ($\mathfrak{F}_1$) и ($\mathfrak{F}_2$) очевидны. Чтобы установить свойство ($\mathfrak{F}_3$), выберем локальную карту $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, такую, что $p \in U_\alpha$, и запишем $\varphi_\alpha(q) = (x_1(q), \dots, x_m(q)) \in R^m$ для $q \in U_\alpha$. Пусть S — такая компактная окрестность точки $\varphi_\alpha(p)$ в R^m , что S содержится в открытом множестве $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Тогда, как показано выше, существует дифференцируемая функция ψ на R^m , которая обладает

компактным носителем¹⁾, содержащимся в $\varphi_\alpha(U_\alpha)$, и $\psi(s) = 1$ для всех $s \in S$. Положим $U = \varphi_\alpha^{-1}(\mathring{S})$, где $\mathring{S}$ — внутренность S , и определим функции φ_i ($1 \leq i \leq m$) на M формулой

$$\varphi_i(q) = \begin{cases} 0, & \text{если } q \notin U_\alpha, \\ x_i(q) \psi(\varphi_\alpha(q)), & \text{если } q \in U_\alpha. \end{cases}$$

Тогда множество U и функции $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ обладают свойством $(\mathfrak{F}_3)$. Действительно, если $f \in \mathfrak{F}$, то функция $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ дифференцируема на множестве $\varphi_\alpha(U_\alpha)$.

Предложение 1.1. Пусть M — хаусдорфово пространство и m — целое положительное число. Предположим, что $\mathfrak{F}$ — набор вещественных функций на M , обладающий свойствами $(\mathfrak{F}_1)$, $(\mathfrak{F}_2)$ и $(\mathfrak{F}_3)$. Тогда существует единственный такой набор $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ открытых карт на M , что удовлетворяются условия (M_1) , (M_2) и (M_3) и что дифференцируемые функции на полученном многообразии суть в точности элементы набора $\mathfrak{F}$.

Для доказательства выберем для каждой $p \in M$ функции $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ и окрестность U точки p , согласно аксиоме $(\mathfrak{F}_3)$. Полагая $U_\alpha = U$ и $\varphi_\alpha(q) = (\varphi_1(q), \dots, \varphi_m(q))$ ($q \in U$), мы получим набор $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ открытых карт на M , удовлетворяющий (M_1) . Условие (M_2) также удовлетворяется, в силу $(\mathfrak{F}_3)$. Как было замечено раньше, набор $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ можно расширить до набора $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A^*}$, удовлетворяющего (M_1) , (M_2) и (M_3) . Последний индуцирует на M дифференцируемую структуру, и каждая функция $f \in \mathfrak{F}$, очевидно, является дифференцируемой. С другой стороны, предположим, что f — дифференцируемая функция на построенном многообразии. Если $p \in M$, то существует такая локальная карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, где $\alpha \in A^*$, что $p \in U_\alpha$ и $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ есть дифференцируемая функция на открытой окрестности точки $\varphi_\alpha(p)$. В силу (M_2) , мы можем предположить, что $\alpha \in A$. Существует такая дифференцируемая функция u на $\mathbf{R}^m$, что $f \circ \varphi_\alpha^{-1}(x) = u(x_1, \dots, x_m)$ для всех точек $x = (x_1, \dots, x_m)$ в некоторой открытой окрестности точки $\varphi_\alpha(p)$. Это значит, что

$$f = u(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$$

в некоторой окрестности точки p , где φ_i — определенные выше функции. Поскольку точка $p \in M$ произвольна, мы заключаем из условий $(\mathfrak{F}_2)$ и $(\mathfrak{F}_1)$, что $f \in \mathfrak{F}$. Пусть, наконец, $(V_\beta, \psi_\beta)_{\beta \in B}$ — другой набор открытых карт, удовлетворяющий (M_1) , (M_2) и (M_3) и порождающий то же множество $\mathfrak{F}$. Так как $f \circ \varphi_\alpha^{-1} = f \circ \psi_\beta^{-1} \circ (\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})$ для $f \in \mathfrak{F}$, то мы видим, что функция $\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ дифференцируема

¹⁾ Носитель функции есть замыкание множества точек, в которых функция отлична от 0.

на $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta)$. Поэтому, в силу условия максимальности (M_3) , $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in (V_\beta, \psi_\beta)_{\beta \in B}$, и единственность доказана.

Мы обычно будем писать $C^\infty(M)$ вместо $\mathfrak{F}$ и будем иногда обозначать через $C^\infty(p)$ множество функций на M , дифференцируемых в точке p . Множество $C^\infty(M)$ есть алгебра над $\mathbf{R}$, причем операции определяются формулами

$$\begin{aligned}(\lambda f)(p) &= \lambda f(p), \\(f + g)(p) &= f(p) + g(p), \\(fg)(p) &= f(p)g(p),\end{aligned}$$

где $\lambda \in \mathbf{R}$, $p \in M$, $f, g \in C^\infty(M)$.

Лемма 1.2. Пусть S — компактное подмножество многообразия M , и пусть V — открытое подмножество в M , содержащее S . Тогда существует функция $\psi \in C^\infty(M)$, которая тождественно равна 1 на S и тождественно равна 0 вне V .

Эта лемма была уже доказана в случае $M = \mathbf{R}^m$. Мы покажем сейчас, что общий случай не представляет дополнительных трудностей.

Пусть $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — локальная карта на M и S — компактное подмножество в U_α . Существует дифференцируемая функция f на $\varphi_\alpha(U_\alpha)$, которая тождественно равна 1 на $\varphi_\alpha(S)$ и имеет компактный носитель, содержащийся в $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Функция F на M , определенная формулой

$$F(q) = \begin{cases} f(\varphi_\alpha(q)), & \text{если } q \in U_\alpha, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

есть дифференцируемая функция на M , тождественно равная 1 на S и 0 вне U_α . Так как S компактно и V открыто, то существуют такие конечные системы координатных окрестностей $U_1, \dots, U_n$ и компактных множеств $S_1, \dots, S_n$, что

$$\begin{aligned}C &\subset \bigcup_{i=1}^n S_i, \quad S_i \subset U_i, \\ \bigcup_{i=1}^n U_i &\subset V.\end{aligned}$$

Как было показано раньше, существует функция $F_i \in C^\infty(M)$, тождественно равная 1 на S_i и 0 вне U_i . Функция

$$\psi = 1 - (1 - F_1)(1 - F_2) \dots (1 - F_n)$$

принадлежит к $C^\infty(M)$, тождественно равна 1 на S и 0 вне V .

Пусть M — многообразие класса C^∞ и $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ — набор, удовлетворяющий условиям (M_1) , (M_2) и (M_3) . Если U — открытое подмножество в M , то открытые карты $(V_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$, где $V_\alpha = U \cap U_\alpha$ и ψ_α — ограничение отображения φ_α на V_α , определяют

в U дифференцируемую структуру. Подмножество U с этой структурой называется *открытым подмногообразием* многообразия M . В частности, из локальной связности многообразия M следует, что каждая связная компонента в M является открытым подмногообразием многообразия M .

Пусть M и N — два многообразия размерностей m и n соответственно. Пусть $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ и $(V_\beta, \psi_\beta)_{\beta \in B}$ — наборы открытых карт на M и N соответственно, удовлетворяющие условиям (M_1) , (M_2) и (M_3) . Если $\alpha \in A$ и $\beta \in B$, то обозначим через $\varphi_\alpha \times \psi_\beta$ отображение $(p, q) \rightarrow (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q))$ прямого произведения $U_\alpha \times V_\beta$ в $\mathbb{R}^{m+n}$. Тогда набор $(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)_{\alpha \in A, \beta \in B}$ открытых карт в прямом произведении $M \times N$ удовлетворяет (M_1) и (M_2) . Поэтому, в силу замечания 1, $M \times N$ можно превратить в многообразие — *произведение* многообразий M и N .

Непосредственным следствием леммы 1.2 является следующий факт, который часто будет использоваться. Пусть V — открытое подмногообразие в M , f — функция из $C^\infty(V)$ и p — точка в V . Тогда существуют такая функция $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ и такая открытая окрестность N , где $p \in N \subset V$, что f и $\tilde{f}$ совпадают на N .

Определение. Пусть M — топологическое пространство. *Покрытие* пространства M есть набор открытых множеств в M , объединение которых совпадает с M . Покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ пространства M называется *локально конечным*, если каждая точка $p \in M$ обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом множеств U_α .

Определение. Хаусдорфово пространство M называется *паракомпактным*, если для всякого покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ пространства M существует локально конечное покрытие $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$, вписанное в $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (это значит, что каждое V_β содержится в некотором U_α).

Определение. Топологическое пространство называется *нормальным*, если для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств A и B существуют такие непересекающиеся открытые подмножества U и V , что $A \subset U$, $B \subset V$.

Известно, что локально компактное хаусдорфово пространство, имеющее счетную базу, паракомпактно и что каждое паракомпактное пространство нормально (см., например, Келли [1]; понятие паракомпактности принадлежит Дьедонне).

Теорема 1.3 (разбиение единицы). Пусть M — нормальное многообразие и $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — локально конечное покрытие многообразия M . Предположим, что каждое $\bar{U}_\alpha$ компактно. Тогда существует такая система $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ дифференцируемых функций на M , что

- (1) каждая φ_α имеет компактный носитель, содержащийся в U_α ;
 (2) $\varphi_\alpha \geq 0$, $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha = 1$.

Мы будем пользоваться следующим фактом (см., например, Келли [1], стр. 171).

Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — локально конечное покрытие нормального пространства M . Тогда каждое множество U_α можно уменьшить до такого V_α , что $V_\alpha \subset U_\alpha$ и что $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ все еще является покрытием пространства M .

Для доказательства теоремы 1.3 уменьшим сначала U_α так, как указано выше. При этом получится новое покрытие $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Согласно лемме 1.2, существует функция $\psi_\alpha \in C^\infty(M)$ с компактным носителем, содержащимся в U_α , которая тождественно равна 1 на V_α и неотрицательна на M . В силу локальной конечности, существует сумма $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha = \psi$. Далее, $\psi \in C^\infty(M)$ и $\psi(p) > 0$ для всех $p \in M$. Функции $\varphi_\alpha = \psi_\alpha / \psi$ обладают нужными свойствами (1) и (2).

Система $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется разбиением единицы, подчиненным покрытию $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

§ 2. Тензорные поля

1. Векторные поля и 1-формы

Пусть A — алгебра над полем K . Дифференцированием алгебры A называется такое отображение $D: A \rightarrow A$, что

- (1) $D(\alpha f + \beta g) = \alpha Df + \beta Dg$ для $\alpha, \beta \in K$, $f, g \in A$;
 (2) $D(fg) = f(Dg) + (Df)g$ для $f, g \in A$.

Определение. Векторное поле X на многообразии класса C^∞ есть дифференцирование алгебры $C^\infty(M)$.

Обозначим через $\mathfrak{D}^1$ (или $\mathfrak{D}^1(M)$) множество всех векторных полей на M . Если $f \in C^\infty(M)$ и $X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)$, то через fX и $X + Y$ обозначаются векторные поля

$$\begin{aligned} fX: g &\rightarrow f(Xg) \quad (g \in C^\infty(M)), \\ X + Y: g &\rightarrow Xg + Yg \quad (g \in C^\infty(M)). \end{aligned}$$

Тем самым $\mathfrak{D}^1(M)$ превращается в модуль над кольцом $\mathfrak{F} = C^\infty(M)$. Если $X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)$, то $XY - YX$ также является дифференцированием алгебры $C^\infty(M)$. Это дифференцирование называется коммутатором полей X и Y и обозначается через $[X, Y]$. В соответствии с традицией мы часто будем писать $\theta(X)Y = [X, Y]$. Оператор $\theta(X)$ называется производной Ли относительно X . Коммутатор удовлетворяет тождеству Якоби $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$, которое можно записать также в виде $\theta(X)([Y, Z]) = [\theta(X)Y, Z] + [Y, \theta(X)Z]$.

Из свойства (2) непосредственно следует, что если f постоянна и $X \in \mathfrak{D}^1$, то $Xf = 0$. Предположим теперь, что функция $g \in C^\infty(M)$ равна 0 на открытом подмножестве $V \subset M$. Пусть p — произвольная точка в V . Согласно лемме 1.2, существует такая функция $\tilde{f} \in C^\infty(M)$, что $\tilde{f}(p) = 0$ и $\tilde{f} = 1$ вне V . Тогда $g = \tilde{f}g$, и поэтому

$$Xg = \tilde{f}(Xg) + g(X\tilde{f}),$$

откуда видно, что Xg обращается в 0 в точке p . Так как p была произвольной, то $Xg = 0$ на V . Теперь мы можем определить Xf на V для любой функции $f \in C^\infty(V)$. Если $p \in V$, то выберем $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ так, чтобы f и $\tilde{f}$ совпадали в окрестности точки p , и положим $(Xf)(p) = (X\tilde{f})(p)$. Приведенное выше рассуждение показывает, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора функции $\tilde{f}$. Отсюда видно, что векторное поле на многообразии индуцирует векторное поле на любом открытом подмногообразии.

С другой стороны, пусть Z — векторное поле на открытом подмногообразии $V \subset M$ и p — точка в V . Тогда существуют такое векторное поле $\tilde{Z}$ на M и такая открытая окрестность N , где $p \in N \subset V$, что $\tilde{Z}$ и Z индуцируют на N одно и то же векторное поле. Действительно, пусть C — некоторая компактная окрестность точки p , содержащаяся в V , и пусть N — внутренность C . Выберем такую функцию $\psi \in C^\infty(M)$ с компактным носителем, содержащимся в V , что $\psi = 1$ на C . Для любой функции $g \in C^\infty(M)$ обозначим через g_V ее ограничение на V и определим $\tilde{Z}g$ формулой

$$(\tilde{Z}g)(q) = \begin{cases} \psi(q)(Zg_V)(q), & \text{если } q \in V, \\ 0 & \text{если } q \notin V. \end{cases}$$

Тогда $g \rightarrow \tilde{Z}g$ — нужное нам векторное поле на M .

Пусть теперь (U, φ) — локальная карта на M , X — векторное поле на U , и пусть p — произвольная точка в U . Положим $\varphi(q) = (x_1(q), \dots, x_m(q))$ ($q \in U$) и $f^* = f \circ \varphi^{-1}$ для $f \in C^\infty(M)$. Пусть V — такое открытое подмножество в U , что $\varphi(V)$ — открытый шар в R^m с центром $\varphi(p) = (a_1, \dots, a_m)$. Если $(x_1, \dots, x_m) \in \varphi(V)$, то

$$\begin{aligned} f^*(x_1, \dots, x_m) &= \\ &= f^*(a_1, \dots, a_m) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f^*(a_1 + t(x_1 - a_1), \dots, a_m + t(x_m - a_m)) dt = \\ &= f^*(a_1, \dots, a_m) + \sum_{j=1}^m (x_j - a_j) \int_0^1 f_j^*(a_1 + t(x_1 - a_1), \dots, \\ &\quad \dots, a_m + t(x_m - a_m)) dt. \end{aligned}$$

(Через f_j^* здесь обозначена частная производная функции f^* по j -му аргументу.) Переносим это равенство обратно на M , получаем

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^m (x_i(q) - x_i(p)) g_i(q) \quad (q \in V), \quad (1)$$

где $g_i \in C^\infty(V)$ ($1 \leq i \leq m$) и

$$g_i(p) = \left(\frac{\partial f^*}{\partial x_i} \right)_{\varphi(p)}.$$

Отсюда следует, что

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f^*}{\partial x_i} \right)_{\varphi(p)} (Xx_i)(p) \quad \text{для } p \in U. \quad (2)$$

Отображение $f \rightarrow \frac{\partial f^*}{\partial x_i} \circ \varphi$ ($f \in C^\infty(U)$) есть векторное поле на U и обозначается через $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Мы будем писать $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ вместо $\frac{\partial}{\partial x_i}(f)$. Тогда, в силу равенства (2), имеем

$$X = \sum_{i=1}^m (Xx_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{на } U. \quad (3)$$

Таким образом, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ($1 \leq i \leq m$) составляют базис модуля $\mathfrak{D}^1(U)$.

Для $p \in M$ и $X \in \mathfrak{D}^1$ обозначим через X_p линейное отображение $X_p: f \rightarrow (Xf)(p)$ пространства $C^\infty(p)$ в $\mathbf{R}$. Множество $\{X_p | X \in \mathfrak{D}^1(M)\}$ называется касательным пространством к M в точке p . Оно будет обозначаться через $\mathfrak{D}^1(p)$ или M_p , и его элементы будут называться касательными векторами к M в точке p . Соотношение (2) показывает, что M_p есть векторное пространство над $\mathbf{R}$, натянутое на m линейно независимых векторов

$$e_i: f \rightarrow \left(\frac{\partial f^*}{\partial x_i} \right)_{\varphi(p)} \quad (f \in C^\infty(M)).$$

Касательный вектор e_i обычно будет обозначаться через $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$. Линейное отображение $L: C^\infty(p) \rightarrow \mathbf{R}$ является касательным вектором к M в точке p тогда и только тогда, когда для всех $f, g \in C^\infty(p)$ выполняется условие $L(fg) = f(p)L(g) + g(p)L(f)$. Действительно, необходимость этого условия очевидна, а достаточность есть простое следствие равенства (1). Таким образом, векторное поле X на M можно отождествить с набором X_p ($p \in M$) касательных векторов к M , обладающим тем свойством, что для каждой функции $f \in C^\infty(M)$ функция $p \rightarrow X_p f$ дифференцируема.

Предположим, что многообразие M аналитично. Тогда векторное поле X на M называется *аналитическим* в точке p , если функция Xf аналитична в точке p для любой функции f , аналитической в точке p .

З а м е ч а н и е. Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbf{R}$. Если $X_1, \dots, X_n$ — некоторый базис пространства V , то отображение $\sum_{i=1}^n x_i X_i \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$ есть открытая карта, определенная на всем V . Полученная дифференцируемая структура не зависит от выбора базиса. Если $X \in V$, то касательное пространство V_X отождествляется с самим V при помощи формулы

$$(Yf)(X) = \left\{ \frac{d}{dt} f(X + tY) \right\}_{t=0} \quad (f \in C^\infty(V)),$$

которая сопоставляет каждому $Y \in V$ касательный вектор к V в точке X .

Пусть A — коммутативное кольцо с единицей, E — модуль над A . Пусть E^* — множество всех A -линейных отображений модуля E в A . Тогда E^* очевидным образом является A -модулем. Он называется *модулем, двойственным к E* .

О п р е д е л е н и е. Пусть M — многообразие класса C^∞ , и пусть $\mathfrak{F} = C^\infty(M)$. Обозначим через $\mathfrak{D}_1(M)$ модуль, двойственный к $\mathfrak{F}$ -модулю $\mathfrak{D}^1(M)$. Элементы модуля $\mathfrak{D}_1(M)$ называются *дифференциальными 1-формами на M* (или просто *1-формами на M*).

Пусть $X \in \mathfrak{D}^1(M)$, $\omega \in \mathfrak{D}_1(M)$. Предположим, что X обращается в 0 на открытом множестве V . Тогда функция $\omega(X)$ равна 0 на V . Действительно, если $p \in V$, то существует такая функция $f \in C^\infty(M)$, что $f = 0$ в некоторой компактной окрестности точки p и $f = 1$ вне V . Тогда $fX = X$ и, поскольку ω является $\mathfrak{F}$ -линейным отображением, $\omega(X) = f\omega(X)$. Отсюда $(\omega(X))(p) = 0$. Это рассуждение показывает также, что 1-форма на M индуцирует 1-форму на любом открытом подмногообразии в M . Используя (3), получаем следующую лемму.

Л е м м а 2.1. Пусть $X \in \mathfrak{D}^1(M)$ и $\omega \in \mathfrak{D}_1(M)$. Если $X_p = 0$ для некоторой точки $p \in M$, то функция $\omega(X)$ обращается в 0 в точке p .

Эта лемма показывает, что если задана функция $\omega \in \mathfrak{D}_1(M)$, то можно определить линейную функцию ω_p на M_p , полагая $\omega_p(X_p) = (\omega(X))(p)$ для $X \in \mathfrak{D}^1(M)$. Множество $\mathfrak{D}_1(p) = \{\omega_p \mid \omega \in \mathfrak{D}_1(M)\}$ есть векторное пространство над $\mathbf{R}$.

Мы уже видели, что 1-форма на M индуцирует 1-форму на любом открытом подмногообразии. С другой стороны, предполо-

жим, что θ есть 1-форма на открытом подмногообразии V в M и что p — точка из V . Тогда существуют такие 1-форма $\tilde{\theta}$ на M и открытая окрестность N точки p , где $p \in N \subset V$, что θ и $\tilde{\theta}$ индуцируют на N одну и ту же 1-форму. Действительно, пусть C — компактная окрестность точки p , содержащаяся в V , и пусть N — внутренность C . Выберем такую функцию $\psi \in C^\infty(M)$ с компактным носителем, содержащимся в V , что $\psi = 1$ на C . Тогда 1-форму $\tilde{\theta}$, обладающую нужным свойством, можно определить формулой

$$\tilde{\theta}(X) = \psi \theta(X_V) \text{ на } V, \quad \tilde{\theta}(X) = 0 \text{ вне } V,$$

где $X \in \mathfrak{D}^1(M)$ и через X_V обозначено векторное поле на V , индуцированное полем X .

Лемма 2.2. *Пространство $\mathfrak{D}_1(p)$ совпадает с пространством M_p^* , двойственным к M_p .*

Мы уже знаем, что $\mathfrak{D}_1(p) \subset M_p^*$. Пусть теперь $\{x_1, \dots, x_m\}$ — система координат в открытой окрестности U точки p . В силу равенства (3), существуют такие 1-формы ω^i на U , что¹⁾ $\omega^i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_{ij}$ ($1 \leq i, j \leq m$). Пусть $L \in M_p^*$, $l_i = L \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right)$ и $\theta = \sum_{i=1}^m l_i \omega^i$. Тогда существуют такие 1-форма $\tilde{\theta}$ на M и от-

крытая окрестность N точки p ($N \subset U$), что $\tilde{\theta}$ и θ индуцируют на N одну и ту же форму. Тогда $(\tilde{\theta})_p = L$, и лемма доказана.

Каждое поле $X \in \mathfrak{D}^1(M)$ индуцирует $\mathfrak{F}$ -линейное отображение $\omega \rightarrow \omega(X)$ модуля $\mathfrak{D}_1(M)$ в $\mathfrak{F}$. Если $X_1 \neq X_2$, то индуцированные отображения различны (в силу леммы 2.2). Таким образом, $\mathfrak{D}^1(M)$ можно рассматривать как подмножество в $\mathfrak{D}_1(M)^*$.

Лемма 2.3. *Модуль $\mathfrak{D}^1(M)$ совпадает с модулем, двойственным к $\mathfrak{D}_1(M)$.*

Доказательство. Пусть $F \in \mathfrak{D}_1(M)^*$. Тогда $F(f\omega) = fF(\omega)$ для всех $f \in C^\infty(M)$ и $\omega \in \mathfrak{D}_1(M)$. Отсюда видно, что если ω обращается в 0 на открытом множестве V , то $F(\omega)$ также равна 0 на V . Пусть $p \in M$ и $\{x_1, \dots, x_m\}$ — локальная система координат, действующая в открытой окрестности U точки p . Каждую 1-форму на U можно записать в виде $\sum_{i=1}^m f_i \omega^i$, где $f_i \in C^\infty(U)$ и ω^i имеет значение, указанное выше. Отсюда легко следует, что $F(\omega)$ обращается в 0 в точке p , если $\omega_p = 0$. Следовательно,

¹⁾ Как обычно, $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$; $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$.

отображение $\omega_p \rightarrow (F(\omega))(p)$ есть вполне определенная линейная функция на $\mathfrak{D}_1(p)$. В силу леммы 2.2, существует единственный вектор $X_p \in M_p$, такой, что $(F(\omega))(p) = \omega_p(X_p)$ для всех $\omega \in \mathfrak{D}_1(M)$. Таким образом, F порождает семейство $X_p (p \in M)$ касательных векторов к M . Для каждого $q \in U$ можно написать

$$X_q = \sum_{i=1}^m a_i(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q,$$

где $a_i(q) \in \mathbf{R}$. Для каждого $i (1 \leq i \leq m)$ существует 1-форма $\tilde{\omega}^i$ на M , совпадающая с ω^i в некоторой открытой окрестности N_p точки $p (N_p \subset U)$. Тогда $(F(\tilde{\omega}^i))(q) = \tilde{\omega}_q^i(X_q) = a_i(q)$ для $q \in N_p$. Отсюда видно, что функции a_i дифференцируемы. Если $f \in C^\infty(M)$ и если обозначить через Xf функцию $q \rightarrow X_q f (q \in M)$, то отображение $f \rightarrow Xf$ является векторным полем на M , удовлетворяющим условию $\omega(X) = F(\omega)$ для всех $\omega \in \mathfrak{D}_1(M)$. Тем самым лемма доказана.

2. Тензорная алгебра

Пусть A — коммутативное кольцо с единицей. Предположим, что задано некоторое множество I и что каждому $i \in I$ сопоставлен A -модуль E_i . Тогда прямое произведение множеств $\prod_{i \in I} E_i$ можно следующим образом превратить в A -модуль: если $e = \{e_i\}$, $e' = \{e'_i\}$ — два элемента из $\prod E_i$ (где $e_i, e'_i \in E_i$) и $a \in A$, то $e + e'$ и ae определяются формулами

$$(e + e')_i = e_i + e'_i, \quad (ae)_i = ae_i \text{ для } i \in I.$$

Модуль $\prod E_i$ называется *прямым произведением* модулей E_i . Прямая сумма $\sum_{i \in I} E_i$ определяется как подмодуль в $\prod E_i$, состоящий из тех элементов $e = \{e_i\}$, для которых все $e_i = 0$, кроме конечного числа индексов i .

Предположим теперь, что множество I конечно, например, $I = \{1, \dots, s\}$. Отображение $f: E_1 \times \dots \times E_s \rightarrow F$, где F — некоторый A -модуль, называется *A -полилинейным*, если оно A -линейно по каждому аргументу. Множество всех A -полилинейных отображений модуля $E_1 \times \dots \times E_s$ в F опять является A -модулем, если определить в нем операции формулами

$$(f + f')(e_1, \dots, e_s) = f(e_1, \dots, e_s) + f'(e_1, \dots, e_s),$$

$$(af)(e_1, \dots, e_s) = a(f(e_1, \dots, e_s)).$$

Предположим, что все сомножители E_i совпадают. Тогда A -полилинейное отображение f называется *кососимметрическим*, если $f(X_1, \dots, X_s) = 0$, когда по крайней мере два X_i совпадают.

Пусть теперь M — многообразие класса C^∞ , и пусть, как обычно, $\mathfrak{F} = C^\infty(M)$. Если s — целое число, $s \geq 1$, то рассмотрим $\mathfrak{F}$ -модуль

$$\mathfrak{D}^1 \times \mathfrak{D}^1 \times \dots \times \mathfrak{D}^1 \quad (s \text{ раз})$$

и обозначим через $\mathfrak{D}_s$ $\mathfrak{F}$ -модуль всех $\mathfrak{F}$ -полилинейных отображений модуля $\mathfrak{D}^1 \times \dots \times \mathfrak{D}^1$ в $\mathfrak{F}$. Аналогично через $\mathfrak{D}^r$ обозначим $\mathfrak{F}$ -модуль всех $\mathfrak{F}$ -полилинейных отображений модуля

$$\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_1 \times \dots \times \mathfrak{D}_1 \quad (r \text{ раз})$$

в $\mathfrak{F}$. Это обозначение допустимо, так как мы видели, что модули $\mathfrak{D}^1$ и $\mathfrak{D}_1$ двойственны друг другу. Более общим образом, через $\mathfrak{D}_s^r$ обозначим $\mathfrak{F}$ -модуль всех $\mathfrak{F}$ -полилинейных отображений модуля

$$\mathfrak{D}_1 \times \dots \times \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}^1 \times \dots \times \mathfrak{D}^1 \quad (\mathfrak{D}_1 \text{ } r \text{ раз; } \mathfrak{D}^1 \text{ } s \text{ раз})$$

в $\mathfrak{F}$. Мы часто будем писать $\mathfrak{D}_s^r(M)$ вместо $\mathfrak{D}_s^r$. Мы имеем $\mathfrak{D}_0^r = \mathfrak{D}^r$, $\mathfrak{D}_s^0 = \mathfrak{D}_s$ и положим $\mathfrak{D}_0^0 = \mathfrak{F}$.

Тензорное поле T на M типа (r, s) есть, по определению, элемент модуля $\mathfrak{D}_s^r(M)$. Такое тензорное поле T называется r раз *контравариантным* и s раз *ковариантным*. В частности, тензорные поля типов $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$ на M — это в точности дифференцируемые функции на M , векторные поля на M и 1-формы на M соответственно.

Если p — точка в M , то определим $\mathfrak{D}_s^r(p)$ как множество всех $\mathbf{R}$ -полилинейных отображений пространства

$$M_p^* \times \dots \times M_p^* \times M_p \times \dots \times M_p \quad (M_p^* \text{ } r \text{ раз; } M_p \text{ } s \text{ раз})$$

в $\mathbf{R}$. Множество $\mathfrak{D}_s^r(p)$ является векторным пространством над $\mathbf{R}$, это не что иное, как тензорное произведение

$$M_p \otimes \dots \otimes M_p \otimes M_p^* \otimes \dots \otimes M_p^* \quad (M_p \text{ } r \text{ раз; } M_p^* \text{ } s \text{ раз})$$

или, в другой записи,

$$\mathfrak{D}_s^r(p) = \otimes^r M_p \otimes^s M_p^*.$$

Мы положим также $\mathfrak{D}_0^0(p) = \mathbf{R}$. Рассмотрим теперь элемент $T \in \mathfrak{D}_s^r(M)$. Мы имеем

$$\begin{aligned} T(g_1\theta_1, \dots, g_r\theta_r, f_1Z_1, \dots, f_sZ_s) = \\ = g_1 \dots g_r f_1 \dots f_s T(\theta_1, \dots, \theta_r, Z_1, \dots, Z_s), \end{aligned}$$

где $f_i, g_j \in C^\infty(M)$, $Z_i \in \mathfrak{D}^1(M)$, $\theta_j \in \mathfrak{D}_1(M)$. Из леммы 1.2 следует, что если некоторая 1-форма θ_j или некоторое векторное поле Z_i обращается в 0 на открытом множестве V , то функция $T(\theta_1, \dots, \theta_r, Z_1, \dots, Z_s) = 0$ на V . Пусть $\{x_1, \dots, x_m\}$ — система координат в открытой окрестности U точки p . Тогда существуют

такие векторные поля $X_i (1 \leq i \leq m)$ и 1-формы $\omega_j (1 \leq j \leq m)$ на M и такая открытая окрестность N точки p , где $p \in N \subset U$, что на N выполняются равенства

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \omega_j(X_i) = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq m).$$

Поля Z_i и формы θ_j можно записать на N в виде

$$Z_i = \sum_{k=1}^m f_{ik} X_k, \quad \theta_j = \sum_{l=1}^m g_{jl} \omega_l,$$

где $f_{ik}, g_{jl} \in C^\infty(N)$. В силу сделанного выше замечания, для $q \in N$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} T(\theta_1, \dots, \theta_r, Z_1, \dots, Z_s)(q) = \\ = \sum_{l_j=1, k_i=1}^m g_{1l_1} \dots g_{rl_r} f_{1k_1} \dots f_{sk_s} T(\omega_{l_1}, \dots, \omega_{l_r}, X_{k_1}, \dots, X_{k_s})(q). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $T(\theta_1, \dots, \theta_r, Z_1, \dots, Z_s)(p) = 0$, если некоторая форма θ_j или некоторое поле Z_i обращается в 0 в точке p . Поэтому можно определить элемент $T_p \in \mathfrak{D}_s^r(p)$ условием

$$T_p((\theta_1)_p, \dots, (\theta_r)_p, (Z_1)_p, \dots, (Z_s)_p) = T(\theta_1, \dots, \theta_r, Z_1, \dots, Z_s)(p).$$

Таким образом, тензорное поле T порождает семейство T_p ($p \in M$), где $T_p \in \mathfrak{D}_s^r(p)$. Ясно, что если $T_p = 0$ для всех p , то $T = 0$. Элемент $T_p \in \mathfrak{D}_s^r(p)$ дифференцируемо зависит от p в том смысле, что если выразить T_q (q принадлежит координатной окрестности N точки p) через базы модулей $\mathfrak{D}_1(N)$ и $\mathfrak{D}^1(N)$, как это сделано выше, то коэффициенты будут дифференцируемыми функциями на N . С другой стороны, если задано правило $p \rightarrow T(p)$, которое каждому $p \in M$ сопоставляет элемент $T(p)$ из $\mathfrak{D}_s^r(p)$, дифференцируемо зависящий от p (в указанном выше смысле), то существует такое тензорное поле T типа (r, s) , что $T_p = T(p)$ для всех $p \in M$. В случае, когда M аналитично, ясно, как, обобщая понятие аналитического векторного поля, определить аналитичность тензорного поля T .

Векторные пространства $\mathfrak{D}_s^r(p)$ и $\mathfrak{D}_r^s(p)$ двойственны друг другу, причем двойственность определяется невырожденной билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{D}_s^r(p) \times \mathfrak{D}_r^s(p)$, определенной формулой

$$\begin{aligned} \langle e_1 \otimes \dots \otimes e_r \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_s, e'_1 \otimes \dots \otimes e'_s \otimes f'_1 \otimes \dots \otimes f'_r \rangle = \\ = \prod_{i,j} f_j(e'_j) f'_i(e_i), \end{aligned}$$

где e_i, e'_j — элементы некоторого базиса пространства M_p , f_j, f'_i — элементы двойственного базиса пространства M_p^* . Очевидно; что эта формула справедлива, если e_i, e'_j — произвольные элемен-

ты пространства M_p , а f_j, f'_i — произвольные элементы пространства M_p^* . В частности, форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ не зависит от выбора базиса, использованного в ее определении.

Каждое $T \in \mathfrak{D}_s^r(M)$ индуцирует $\mathfrak{F}$ -линейное отображение модуля $\mathfrak{D}_r^s(M)$ в $\mathfrak{F}$, определенное формулой

$$(T(S))(p) = \langle T_p, S_p \rangle \quad \text{для } S \in \mathfrak{D}_r^s(M).$$

Если $T(S) = 0$ для всех $S \in \mathfrak{D}_r^s(M)$, то $T_p = 0$ для всех $p \in M$, так что $T = 0$. Следовательно, $\mathfrak{D}_s^r(M)$ можно рассматривать как подмножество в $(\mathfrak{D}_r^s(M))^*$. Мы можем сформулировать теперь следующее обобщение леммы 2.3.

Лемма 2.3'. *Модуль $\mathfrak{D}_s^r(M)$ является двойственным к модулю $\mathfrak{D}_r^s(M)$ ($r, s \geq 0$).*

Доказательство совпадает с доказательством леммы 2.3, если изменить в нем обозначения. Чтобы подчеркнуть двойственность, мы будем иногда писать $\langle T, S \rangle$ вместо $T(S)$ ($T \in \mathfrak{D}_s^r, S \in \mathfrak{D}_r^s$).

Обозначим через $\mathfrak{D}$ (или $\mathfrak{D}(M)$) прямую сумму $\mathfrak{F}$ -модулей $\mathfrak{D}_s^r(M)$

$$\mathfrak{D} = \sum_{r, s=0}^{\infty} \mathfrak{D}_s^r.$$

Аналогично если $p \in M$, то рассмотрим прямую сумму

$$\mathfrak{D}(p) = \sum_{r, s=0}^{\infty} \mathfrak{D}_s^r(p).$$

Векторное пространство $\mathfrak{D}(p)$ можно следующим образом превратить в ассоциативную алгебру над R . Пусть $a = e_1 \otimes \dots \otimes e_r \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_s$, $b = e'_1 \otimes \dots \otimes e'_\sigma \otimes f'_1 \otimes \dots \otimes f'_\sigma$, где e_i, e'_i — элементы некоторого базиса пространства M_p , f_j, f'_j — элементы двойственного базиса для M_p^* . Тогда $a \otimes b$ определяется формулой

$$a \otimes b = e_1 \otimes \dots \otimes e_r \otimes e'_1 \otimes \dots \otimes e'_\sigma \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_s \otimes f'_1 \otimes \dots \otimes f'_\sigma.$$

Положим $a \otimes 1 = a$, $1 \otimes b = b$ и распространим операцию $(a, b) \rightarrow a \otimes b$ до билинейного отображения пространства $\mathfrak{D}(p) \times \mathfrak{D}(p)$ в $\mathfrak{D}(p)$. Тогда $\mathfrak{D}(p)$ станет ассоциативной алгеброй над R . Формула для $a \otimes b$ справедлива для произвольных элементов $e_i, e'_i \in M_p$ и $f_j, f'_j \in M_p^*$. Следовательно, умножение в $\mathfrak{D}(p)$ не зависит от выбора базиса.

Теперь тензорное умножение $\otimes$ определяется в $\mathfrak{D}$ как $\mathfrak{F}$ -билинейное отображение $(S, T) \rightarrow S \otimes T$ модуля $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{D}$ в $\mathfrak{D}$, такое, что

$$(S \otimes T)_p = S_p \otimes T_p \quad (S \in \mathfrak{D}_s^r, T \in \mathfrak{D}_\sigma^0, p \in M).$$

Оно превращает $\mathfrak{F}$ -модуль $\mathfrak{D}$ в кольцо, удовлетворяющее условию

$$f(S \otimes T) = fS \otimes T = S \otimes fT,$$

где $f \in \mathfrak{F}$, $S, T \in \mathfrak{D}$. Другими словами, $\mathfrak{D}$ есть ассоциативная алгебра над кольцом $\mathfrak{F}$. Алгебры $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}(p)$ называются *смешанными тензорными алгебрами* над M и M_p соответственно. Подмодули

$$\mathfrak{D}^* = \sum_{r=0}^{\infty} \mathfrak{D}^r, \quad \mathfrak{D}_* = \sum_{s=0}^{\infty} \mathfrak{D}_s$$

являются подалгебрами в $\mathfrak{D}$ (они будут также обозначаться $\mathfrak{D}^*(M)$ и $\mathfrak{D}_*(M)$), а подпространства

$$\mathfrak{D}^*(p) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathfrak{D}^r(p), \quad \mathfrak{D}_*(p) = \sum_{s=0}^{\infty} \mathfrak{D}_s(p)$$

являются подалгебрами в $\mathfrak{D}(p)$.

Пусть теперь r, s — два целых числа, больших или равных 1, и пусть i, j — такие целые числа, что $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$. Рассмотрим R -линейное отображение $C_j^i: \mathfrak{D}_s^r(p) \rightarrow \mathfrak{D}_{s-1}^{r-1}(p)$, определенное формулой

$$\begin{aligned} C_j^i(e_1 \otimes \dots \otimes e_r \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_s) = \\ = \langle e_i, f_j \rangle (e_1 \otimes \dots \otimes \hat{e}_i \otimes \dots \otimes e_r \otimes f_1 \otimes \dots \otimes \hat{f}_j \otimes \dots \otimes f_s), \end{aligned}$$

где $e_1, \dots, e_r$ — элементы некоторого базиса пространства M_p , $f_1, \dots, f_s$ — элементы двойственного базиса в M_p^* . (Символ $\hat{}$ над буквой означает, что эта буква отсутствует). Заметим, что формула для C_j^i справедлива для произвольных элементов $e_1, \dots, e_r \in M_p$, $f_1, \dots, f_s \in M_p^*$. В частности, C_j^i не зависит от выбора базиса.

Далее, существует единственное такое $\mathfrak{F}$ -линейное отображение $C_j^i: \mathfrak{D}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{D}_{s-1}^{r-1}(M)$, что

$$(C_j^i(T))_p = C_j^i(T_p)$$

для всех $T \in \mathfrak{D}_s^r(M)$ и всех $p \in M$. Это отображение удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} C_j^i(X_1 \otimes \dots \otimes X_r \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_s) = \\ = \langle X_i, \omega_j \rangle (X_1 \otimes \dots \otimes \hat{X}_i \otimes \dots \otimes X_r \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \hat{\omega}_j \otimes \dots \otimes \omega_s) \end{aligned}$$

для всех $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{D}^1$, $\omega_1, \dots, \omega_s \in \mathfrak{D}_1$. Отображение C_j^i называется *свертыванием* i -го контравариантного индекса с j -м ковариантным индексом.

3. Алгебра Грассмана

Как и раньше, пусть M — многообразие класса C^∞ и $\mathfrak{F} = C^\infty(M)$. Если $s \geq 1$ — целое число, то обозначим через $\mathfrak{A}_s$ (или $\mathfrak{A}_s(M)$) множество кососимметрических $\mathfrak{F}$ -полилинейных отображений модуля $\mathfrak{D}^1 \times \dots \times \mathfrak{D}^1$ (s раз) в $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{A}_s$ — подмодуль в $\mathfrak{D}_s$. Положим $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{F}$ и обозначим через $\mathfrak{A}$ (или $\mathfrak{A}(M)$) прямую сумму $\mathfrak{A} = \sum_{s=0}^{\infty} \mathfrak{A}_s$ $\mathfrak{F}$ -модулей $\mathfrak{A}_s$. Элементы модуля $\mathfrak{A}(M)$ называются *внешними дифференциальными формами* на M . Элементы модуля $\mathfrak{A}_s$ называются *дифференциальными s -формами* (или просто s -формами).

Обозначим через $\mathfrak{S}_s$ группу подстановок множества $\{1, 2, \dots, s\}$. Каждая подстановка $\sigma \in \mathfrak{S}_s$ индуцирует $\mathfrak{F}$ -линейное отображение модуля $\mathfrak{D}^1 \times \dots \times \mathfrak{D}^1$ на себя, определенное формулой

$$(X_1, \dots, X_s) \rightarrow (X_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, X_{\sigma^{-1}(s)}) \quad (X_i \in \mathfrak{D}^1).$$

Это отображение также будет обозначаться через σ . Так как каждый элемент $d \in \mathfrak{D}_s$ есть полилинейное отображение модуля $\mathfrak{D}^1 \times \dots \times \mathfrak{D}^1$ в $\mathfrak{F}$, то определено отображение $d \rightarrow d \circ \sigma^{-1}$. Более того, отображение $d \rightarrow d \circ \sigma^{-1}$ есть взаимно однозначное $\mathfrak{F}$ -линейное отображение модуля $\mathfrak{D}_s$ на себя. Если записать $\sigma \cdot d = d \circ \sigma^{-1}$, то получим равенство $(\sigma\tau) \cdot d = \sigma \cdot (\tau \cdot d)$. Пусть $\varepsilon(\sigma) = 1$ или -1 , в зависимости от того, четной или нечетной подстановкой является σ . Рассмотрим линейное преобразование $A_s: \mathfrak{D}_s \rightarrow \mathfrak{D}_s$, определенное формулой

$$A_s(d_s) = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_s} \varepsilon(\sigma) \sigma \cdot d_s \quad (d_s \in \mathfrak{D}_s).$$

Если $s = 0$, то положим $A_s(d_s) = d_s$. Распространим A_s до $\mathfrak{F}$ -линейного отображения $A: \mathfrak{D}_* \rightarrow \mathfrak{D}_*$, полагая $A(d) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s(d_s)$, если

$d = \sum_{s=0}^{\infty} d_s$, $d_s \in \mathfrak{D}_s$. Если $\tau \in \mathfrak{S}_s$, то мы имеем соотношения

$$\begin{aligned} \tau A_s(d_s) &= \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_s} \varepsilon(\sigma) \tau \cdot (\sigma \cdot d_s) = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_s} \varepsilon(\sigma) (\tau\sigma) \cdot d_s = \\ &= \varepsilon(\tau) \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_s} \varepsilon(\sigma) \sigma \cdot d_s. \end{aligned}$$

Значит, $\tau \cdot (A_s(d_s)) = \varepsilon(\tau) A_s(d_s)$. Отсюда видно, что $A_s(\mathfrak{D}_s) \subset \mathfrak{A}_s$ и $A(\mathfrak{D}_*) \subset \mathfrak{A}$. С другой стороны, если $d_s \in \mathfrak{A}_s$, то $\sigma \cdot d_s = \varepsilon(\sigma) d_s$ для любой $\sigma \in \mathfrak{S}_s$. Так как $\varepsilon(\sigma)^2 = 1$, то получаем, что

$$A_s(d_s) = d_s, \text{ если } d_s \in \mathfrak{A}_s.$$

Отсюда следует, что $A^2 = A$ и $A(\mathfrak{D}_*) = \mathfrak{A}$. Другими словами, A есть проектирование модуля $\mathfrak{D}_*$ на $\mathfrak{A}$. Отображение A называется *альтернированием*.

Обозначим через N ядро отображения A . Очевидно, N — подмодуль в $\mathfrak{D}_*$.

Лемма 2.4¹⁾. Модуль N является двусторонним идеалом в $\mathfrak{D}_*$.

Достаточно показать, что если $n_r \in N \cap \mathfrak{D}_r$, $d_s \in \mathfrak{D}_s$, то $A_{r+s}(n_r \otimes d_s) = A_{s+r}(d_s \otimes n_r) = 0$. Пусть $b_{r+s} = A_{r+s}(n_r \otimes d_s)$. Тогда

$$(r+s)!b_{r+s} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} \varepsilon(\sigma) \sigma \cdot (n_r \otimes d_s),$$

где

$$\begin{aligned} \sigma \cdot (n_r \otimes d_s) (X_1, \dots, X_{r+s}) &= \\ &= n_r (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) d_s (X_{\sigma(r+1)}, \dots, X_{\sigma(r+s)}). \end{aligned}$$

Элементы из $\mathfrak{S}_{r+1}$, оставляющие на месте каждое из чисел $r+1, \dots, r+s$, составляют подгруппу $G \subset \mathfrak{S}_{r+s}$, изоморфную $\mathfrak{S}_r$. Пусть S — подмножество в $\mathfrak{S}_{r+s}$, содержащее в точности по одному элементу из каждого левого смежного класса $\sigma_0 G$ группы $\mathfrak{S}_{r+s}$. Тогда, поскольку $\varepsilon(\sigma_1 \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1) \varepsilon(\sigma_2)$,

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} \varepsilon(\sigma) \sigma \cdot (n_r \otimes d_s) = \sum_{\sigma_0 \in S} \varepsilon(\sigma_0) \sum_{\tau \in G} \varepsilon(\tau) (\sigma_0 \tau) \cdot (n_r \otimes d_s).$$

Пусть $X_i \in \mathfrak{D}^1$ ($1 \leq i \leq r+s$), $(Y_1, \dots, Y_{r+s}) = \sigma_0^{-1}(X_1, \dots, X_{r+s})$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in G} \varepsilon(\tau) ((\sigma_0 \tau) \cdot (n_r \otimes d_s)) (X_1, \dots, X_{r+s}) &= \\ &= d_s (Y_{r+1}, \dots, Y_{r+s}) \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon(\tau) (\tau \cdot n_r) (Y_1, \dots, Y_r) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $b_{r+s} = 0$. Аналогично доказывается, что $A_{s+r}(d_s \otimes n_r) = 0$.

Теперь мы можем определить для любых $\theta, \omega \in \mathfrak{A}$ внешнее произведение

$$\theta \wedge \omega = A(\theta \otimes \omega).$$

Оно превращает $\mathfrak{F}$ -модуль $\mathfrak{A}$ в ассоциативную алгебру, изоморфную $\mathfrak{D}_*/N$. Модуль $\mathfrak{A}(M)$ кососимметрических $\mathfrak{F}$ -полилинейных функций с внешним умножением называется *алгеброй Грассмана* над многообразием M .

Можно также для каждой точки $p \in M$ определить алгебру Грассмана $\mathfrak{A}(p)$ над касательным пространством M_p . Элементами

¹⁾ См. Шевалле [2], стр. 208.

алгебры $\mathfrak{A}(p)$ являются кососимметрические R -полилинейные вещественные функции на M_p , а произведение (которое также обозначается символом $\wedge$) удовлетворяет условию

$$\theta_p \wedge \omega_p = (\theta \wedge \omega)_p \quad (\theta, \omega \in \mathfrak{A}).$$

Тем самым $\mathfrak{A}(p)$ превращается в ассоциативную алгебру, содержащую двойственное пространство M_p^* . Если $\theta, \omega \in M_p^*$, то мы имеем $\theta \wedge \omega = -\omega \wedge \theta$. В качестве следствия легко вывести следующее правило.

Пусть $\theta^1, \dots, \theta^l \in M_p^*$, и пусть $\omega^i = \sum_{j=1}^l a_{ij} \theta^j$ ($1 \leq i, j \leq l$, $a_{ij} \in R$). Тогда

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^l = \det(a_{ij}) \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^l.$$

Для удобства выпишем явное выражение для внешнего произведения. Пусть $f, g \in C^\infty(M)$, $\theta \in \mathfrak{A}_r$, $\omega \in \mathfrak{A}_s$, $X_i \in \mathfrak{D}^1$. Тогда

$$f \wedge g = fg,$$

$$(f \wedge \theta)(X_1, \dots, X_r) = f \theta(X_1, \dots, X_r),$$

$$(\omega \wedge g)(X_1, \dots, X_s) = g \omega(X_1, \dots, X_s),$$

$$(\theta \wedge \omega)(X_1, \dots, X_{r+s}) =$$

$$= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} \varepsilon(\sigma) \theta(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) \omega(X_{\sigma(r+1)}, \dots, X_{\sigma(r+s)}). \quad (4)$$

Мы имеем также соотношение

$$\theta \wedge \omega = (-1)^{rs} \omega \wedge \theta. \quad (5)$$

4. Внешнее дифференцирование

Пусть M — многообразие класса C^∞ , $\mathfrak{A}(M)$ — алгебра Грассмана над M . Оператор d — внешнее дифференцирование — описывается в следующей теореме.

Теорема 2.5. *Существует единственное R -линейное отображение $d: \mathfrak{A}(M) \rightarrow \mathfrak{A}(M)$, обладающее следующими свойствами:*

- (i) $d\mathfrak{A}_s \subset \mathfrak{A}_{s+1}$ для каждого $s \geq 0$;
- (ii) если $f \in \mathfrak{A}_0 (= C^\infty(M))$, то df есть 1-форма, определенная равенством $df(X) = Xf$, где $X \in \mathfrak{D}^1(M)$;
- (iii) $d \circ d = 0$;
- (iv) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2$, если $\omega_1 \in \mathfrak{A}_r$, $\omega_2 \in \mathfrak{A}(M)$.

Доказательство. Предположим, что отображение d существует как для M , так и для открытых подмногообразий в M , и докажем сначала формулу для d (см. ниже формулу (9)), из

которой единственность вытекает в качестве следствия. Пусть $p \in M$ и $\{x_1, \dots, x_m\}$ — система координат на открытой окрестности U точки p . Пусть V — такое открытое подмножество в U , что $\bar{V}$ компактно и $p \in V$, $\bar{V} \subset U$. Из свойства (ii) видно, что формы dx_i ($1 \leq i \leq m$) обладают свойством $dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_{ij}$ на U . Поэтому dx_i ($1 \leq i \leq m$) есть базис $C^\infty(U)$ -модуля $\mathfrak{D}_1(U)$. Следовательно, каждый элемент из $\mathfrak{D}_*(U)$ представляется в виде

$$\sum F_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_r}, \quad F_{i_1 \dots i_r} \in C^\infty(U).$$

Отсюда следует, что если $\theta \in \mathfrak{A}(M)$ и если θ_U — форма, индуцированная формой θ на U , то θ_U можно записать в виде

$$\theta_U = \sum f_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}, \quad f_{i_1 \dots i_r} \in C^\infty(U). \quad (6)$$

Эта запись называется *выражением* формы θ_U на U . Мы докажем формулу

$$d(\theta_V) = (d\theta)_V.$$

В силу леммы 1.2, существуют такие функции $\psi_{i_1 \dots i_r} \in C^\infty(M)$ и $\varphi_i \in C^\infty(M)$ ($1 \leq i \leq m$), что

$$\psi_{i_1 \dots i_r} = f_{i_1 \dots i_r}, \quad \varphi_1 = x_1, \dots, \varphi_m = x_m \text{ на } V.$$

Рассмотрим форму

$$\omega = \sum \psi_{i_1 \dots i_r} d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_r}$$

на M . Очевидно, имеем $\omega_V = \theta_V$. Более того, поскольку $d(f(\theta - \omega)) = df \wedge (\theta - \omega) + f d(\theta - \omega)$ для любой $f \in C^\infty(M)$, можно, выбрав функцию f тождественно равной 0 вне V и 1 на открытом подмножестве в V , заключить, что $(d\theta)_V = (d\omega)_V$. Так как

$$d\omega = \sum d\psi_{i_1 \dots i_r} \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_r}$$

в силу свойств (iii) и (iv) и так как $d(f_V) = (df)_V$ для любой $f \in C^\infty(M)$, то мы получаем равенство

$$(d\omega)_V = \sum df_{i_1 \dots i_r} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}. \quad (7)$$

Тем самым доказано соотношение

$$(d\theta)_V = d(\theta_V) = \sum df_{i_1 \dots i_r} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}. \quad (8)$$

На самом M имеет место формула

$$\begin{aligned} (p+1) d\omega(X_1, \dots, X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i \cdot \omega(X_1, \dots, \\ &\dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1}) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \\ &\dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}) \end{aligned} \quad (9)$$

для $\omega \in \mathfrak{A}_p(M)$ ($p \geq 1$), $X_i \in \mathfrak{D}^1(M)$. Действительно, достаточно доказать ее в координатной окрестности каждой точки. Но в этом случае она является простым следствием равенства (8). Единственность отображения d теперь очевидна.

Чтобы доказать существование отображения d , мы *определим* d при помощи формулы (9) и свойства (ii). Используя соотношение $[X, fY] = f[X, Y] + (Xf)Y$ ($f \in \mathfrak{F}$, $X, Y \in \mathfrak{D}^1$), легко вывести, что правая часть формулы (9) $\mathfrak{F}$ -линейна по каждому переменному X_i и обращается в 0, если два переменных совпадают. Значит, $d\omega \in \mathfrak{A}_{p+1}$, если $\omega \in \mathfrak{A}_p$. Если $X \in \mathfrak{D}^1$, то обозначим через X_V векторное поле, индуцированное им на V . Тогда $[X, Y]_V = [X_V, Y_V]$ и поэтому из соотношения (9) следует соотношение $(d\theta)_V = d(\theta_V)$. Теперь заметим, что из формулы (9) и из свойства (ii) следует формула (8). Из свойства (ii) вытекает также, что

$$d(fg) = f dg + g df. \quad (10)$$

Для доказательства свойств (iii) и (iv) достаточно показать, что они имеют место в координатной окрестности каждой точки многообразия M . Но на V свойство (iv) является простым следствием формул (10) и (8). Далее, из (8) и свойства (ii) следует, что $d(dx_i) = 0$. Значит (в силу свойства (iv)),

$$d(df) = d\left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j = 0$$

для каждой $f \in C^\infty(U)$. Теперь свойство (iii) следует из (8) и из свойства (iv).

§ 3. Отображения

1. Интерпретация матрицы Якоби

Пусть M и N — многообразия класса C^∞ и Φ — отображение многообразия M в N . Пусть $p \in M$. Отображение Φ называется *дифференцируемым в точке p* , если $g \circ \Phi \in C^\infty(p)$ для каждой $g \in C^\infty(\Phi(p))$. Отображение Φ называется *дифференцируемым*, если оно дифференцируемо в каждой $p \in M$. Аналогичным образом определяются *аналитические* отображения. Пусть $\psi: q \rightarrow (x_1(q), \dots, x_m(q))$ — система координат в окрестности U точки $p \in M$ и $\psi': r \rightarrow (y_1(r), \dots, y_n(r))$ — система координат в окрестности точки $\Phi(p)$ в N . Предположим, что $\Phi(U) \subset U'$. Отображение $\psi' \circ \Phi \circ \psi^{-1}$ множества $\psi(U)$ в $\psi'(U')$ задается системой n функций

$$y_j = \varphi_j(x_1, \dots, x_m) \quad (1 \leq j \leq n), \quad (1)$$

которую мы назовем *выражением* отображения Φ в координатах. Отображение Φ дифференцируемо в точке p тогда и только тог-

да, когда функции φ_j имеют частные производные всех порядков в некоторой фиксированной окрестности точки $(x_1(p), \dots, x_m(p))$.

Отображение Φ называется *диффеоморфизмом* многообразия M на N , если Φ есть взаимно однозначное дифференцируемое отображение многообразия M на N , причем Φ^{-1} дифференцируемо. Если, кроме того, M , N , Φ и Φ^{-1} аналитичны, то Φ называется *аналитическим диффеоморфизмом*.

Если Φ дифференцируемо в точке $p \in M$ и $A \in M_p$, то линейное отображение $B: C^\infty(\Phi(p)) \rightarrow \mathbf{R}$, определенное формулой $B(g) = A(g \circ \Phi)$ ($g \in C^\infty(\Phi(p))$), является касательным вектором к N в точке $\Phi(p)$. Отображение $A \rightarrow B$ пространства M_p в $N_{\Phi(p)}$ обозначается через $d\Phi_p$ (или просто Φ_p) и называется *дифференциалом* отображения Φ в точке p . Мы видели выше, что векторы

$$e_i: f \rightarrow \left(\frac{\partial f^*}{\partial x_i} \right)_{\psi(p)} \quad (1 \leq i \leq m), \quad f^* = f \circ \psi^{-1},$$

$$\bar{e}_j: g \rightarrow \left(\frac{\partial g^*}{\partial y_j} \right)_{\psi'(\Phi(p))} \quad (1 \leq j \leq n), \quad g^* = g \circ (\psi')^{-1}$$

составляют базисы пространств M_p и $N_{\Phi(p)}$ соответственно. Тогда имеем соотношения

$$d\Phi_p(e_i)g = e_i(g \circ \Phi) = \left(\frac{\partial (g \circ \Phi)^*}{\partial x_i} \right)_{\psi(p)}.$$

Но

$$(g \circ \Phi)^*(x_1, \dots, x_m) = g^*(y_1, \dots, y_n),$$

где $y_j = \varphi_j(x_1, \dots, x_m)$ ($1 \leq j \leq n$). Значит,

$$d\Phi_p(e_i) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right)_{\psi(p)} \bar{e}_j. \quad (2)$$

Отсюда видно, что если записать $d\Phi_p$ матрицей, используя базисы e_i ($1 \leq i \leq m$), $\bar{e}_j$ ($1 \leq j \leq n$), то получится матрица Якоби системы (1). Из стандартной теоремы о якобиане (теорема о неявной функции) вытекает

Предложение 3.1. Если $d\Phi_p$ является изоморфизмом пространства M_p на $N_{\Phi(p)}$, то существуют такие открытые подмногообразия $U \subset M$ и $V \subset N$, что $p \in U$ и что Φ есть диффеоморфизм многообразия U на V .

Замечание. Если $N = \mathbf{R}$, то пространство $N_{\Phi(p)}$ отождествляется с $\mathbf{R}$ (§ 2, замечание) и поэтому $d\Phi_p$ становится линейной функцией на M_p . Это та же самая линейная функция, которая получается, если рассматривать $d\Phi$ как дифференциальную форму на M . Действительно, если $X \in M_p$, то касательный век-

тор $d\Phi_p(X)$ и касательный вектор

$$f \rightarrow \left\{ \frac{d}{dt} f(\Phi(p) + tX\Phi) \right\}_{t=0}, \quad (f \in C^\infty(R))$$

оба сопоставляют функции f число $f'(\Phi(p))(X\Phi)$.

Определение. Пусть M и N — дифференцируемые (или аналитические) многообразия.

(а) Отображение $\Phi: M \rightarrow N$ называется *регулярным* в точке $p \in M$, если Φ дифференцируемо (аналитично) в точке p и $d\Phi_p$ есть взаимно однозначное отображение пространства M_p в $N_{\Phi(p)}$.

(б) M называется *подмногообразием* многообразия N , если (1) $M \subset N$ (теоретико-множественное включение); (2) тождественное отображение I многообразия M в N регулярно в каждой точке M .

Например, сфера $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ является подмногообразием в R^3 и одновременно топологическим подпространством. Однако подмногообразие M многообразия N не обязано быть топологическим подпространством в N . Например, пусть N — тор, и пусть M — кривая на N без двойных точек, плотная в N (глава II, § 2). Предложение 3.1 показывает, что подмногообразие M многообразия N является открытым подмногообразием в N тогда и только тогда, когда $\dim M = \dim N$.

Предложение 3.2. Пусть M — подмногообразие многообразия N , и пусть $p \in M$. Тогда существует такая система координат $\{x_1, \dots, x_n\}$ в открытой окрестности V точки p в N , что $x_1(p) = \dots = x_m(p) = 0$ и что множество

$$U = \{q \in V \mid x_j(q) = 0 \text{ для } m+1 \leq j \leq n\}$$

вместе с ограничениями функций $x_1, \dots, x_m$ на U образует локальную карту на M , содержащую p .

Доказательство. Пусть $\{y_1, \dots, y_m\}$ и $\{z_1, \dots, z_n\}$ — системы координат в открытых окрестностях точки p в M и N соответственно, такие, что $y_i(p) = z_j(p) = 0$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$). Выражение тождественного отображения $I: M \rightarrow N$ дается (вблизи p) системой функций $z_j = \varphi_j(y_1, \dots, y_m)$ ($1 \leq j \leq n$). Матрица Якоби $\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} \right)$ этой системы имеет ранг m в точке p , так как I регулярно в p . Без ограничения общности можно предположить, что квадратная матрица $\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} \right)_{1 \leq i, j \leq m}$ имеет в точке p определитель, отличный от 0. Тогда в окрестности точки $(0, \dots, 0)$ имеем $y_i = \psi_i(z_1, \dots, z_m)$ ($1 \leq i \leq m$), где каждая функция ψ_i дифференцируема. Если положить теперь

$$x_i = z_i \quad (1 \leq i \leq m),$$

$$x_j = z_j - \varphi_j(\psi_1(z_1, \dots, z_m), \dots, \psi_m(z_1, \dots, z_m)) \quad (m+1 \leq j \leq n),$$

то ясно, что

$$\det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_l} \right)_{1 \leq i, l \leq m} \neq 0, \quad \det \left(\frac{\partial x_j}{\partial z_k} \right)_{1 \leq j, k \leq n} \neq 0.$$

Значит, $\{x_1, \dots, x_n\}$ есть искомая система координат.

2. Преобразование векторных полей

Пусть M и N — многообразия класса C^∞ и Φ — дифференцируемое отображение многообразия M в N . Пусть X и Y — векторные поля на M и N соответственно. Поля X и Y называются Φ -связанными, если

$$d\Phi_p(X_p) = Y_{\Phi(p)} \quad \text{для всех } p \in M. \quad (3)$$

Легко видеть, что равенство (3) эквивалентно соотношению

$$(Yf) \circ \Phi = X(f \circ \Phi) \quad \text{для всех } f \in C^\infty(N). \quad (4)$$

Вместо (3) мы будем писать $d\Phi \cdot X = Y$ или $X^\Phi = Y$.

Предложение 3.3.

(i) Пусть $d\Phi \cdot X_i = Y_i$ ($i = 1, 2$). Тогда

$$d\Phi \cdot [X_1, X_2] = [Y_1, Y_2].$$

(ii) Допустим, что Φ — диффеоморфизм многообразия M на себя, и положим $f^\Phi = f \circ \Phi^{-1}$ для $f \in C^\infty(M)$. Тогда, если $X \in \mathfrak{D}^1(M)$, то

$$(fX)^\Phi = f^\Phi X^\Phi, \quad (Xf)^\Phi = X^\Phi f^\Phi.$$

Доказательство. Из формулы (4) следует соотношение $(Y_1(Y_2f)) \circ \Phi = X_1(Y_2f \circ \Phi) = X_1(X_2(f \circ \Phi))$. Отсюда вытекает утверждение (i). Последнее соотношение в утверждении (ii) также непосредственно следует из равенства (4). Что касается первого соотношения, то для $g \in C^\infty(M)$ имеет место формула

$$((fX)^\Phi g) \circ \Phi = (fX)(g \circ \Phi) = f((X^\Phi g) \circ \Phi),$$

так что

$$(fX)^\Phi g = f^\Phi (X^\Phi g).$$

Замечание. Так как $X^\Phi f = (Xf^{\Phi^{-1}})^\Phi$, то естественно дать следующее определение. Пусть Φ — диффеоморфизм многообразия M на себя и A — отображение алгебры $C^\infty(M)$ в себя. Тогда отображение A^Φ определяется формулой $A^\Phi f = (Af^{\Phi^{-1}})^\Phi$ для $f \in C^\infty(M)$. Мы будем обозначать через $[Af](p)$ значение функции Af в точке $p \in M$. Если Φ и Ψ — два диффеоморфизма многообразия M , то $f^{\Phi\Psi} = (f^\Psi)^\Phi$ и $A^{\Phi\Psi} = (A^\Psi)^\Phi$.

3. Действие на дифференциальные формы

Пусть M и N — многообразия класса C^∞ и $\Phi: M \rightarrow N$ дифференцируемое отображение. Пусть ω — некоторая r -форма на N . Тогда на M имеется единственная r -форма $\Phi^*\omega$, удовлетворяющая соотношению

$$\Phi^*\omega(X_1, \dots, X_r) = \omega(Y_1, \dots, Y_r) \circ \Phi$$

для любых Φ -связанных векторных полей X_i и Y_i ($1 \leq i \leq r$). Достаточно положить

$$(\Phi^*\omega)_p(A_1, \dots, A_r) = \omega_{\Phi(p)}(d\Phi_p(A_1), \dots, d\Phi_p(A_r))$$

для каждой точки $p \in M$ и $A_i \in M_p$. Если $f \in C^\infty(N)$, то положим $\Phi^*f = f \circ \Phi$. Определим по линейности $\Phi^*\theta$ для любой формы $\theta \in \mathfrak{A}(M)$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\Phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \Phi^*(\omega_1) \wedge \Phi^*(\omega_2) \quad (\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{A}(M)), \quad (5)$$

$$d(\Phi^*\omega) = \Phi^*(d\omega). \quad (6)$$

Действительно формула (5) следует из соотношения (4) § 2, а (6) — из равенства (9) § 2. Таким же способом можно определить Φ^*T для любого ковариантного тензорного поля $T \in \mathfrak{D}_*(M)$. Если $M = N$ и Φ — диффеоморфизм M на себя, причем $\Phi^*T = T$, то мы говорим, что T инвариантно относительно Φ .

Форму $\Phi^*\omega$ очень просто вычислить в координатах. Пусть U и V — открытые множества в M и N соответственно, в которых введены системы координат

$$\xi: q \rightarrow (x_1(q), \dots, x_m(q)), \quad \eta: r \rightarrow (y_1(r), \dots, y_n(r)).$$

Предположим, что $\Phi(U) \subset V$. Отображение Φ имеет на U выражение в координатах

$$y_j = \varphi_j(x_1, \dots, x_m) \quad (1 \leq j \leq n).$$

Если $\omega \in \mathfrak{A}(N)$, то форма ω_V имеет выражение

$$\omega_V = \sum g_{j_1 \dots j_s} dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_s}, \quad (7)$$

где $g_{j_1 \dots j_s} \in C^\infty(V)$. Форма $\Phi^*\omega$ индуцирует форму $(\Phi^*\omega)_U$ на U , которая имеет выражение

$$(\Phi^*\omega)_U = \sum f_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

Последнее выражение получается, если подставить

$$y_j = \varphi_j(x_1, \dots, x_m), \quad dy_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i \quad (1 \leq j \leq n)$$

в (7). Это следует из формулы (5), если заметить, что

$$\Phi^*(dy_j) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \circ \xi \right) dx_i.$$

§ 4. Аффинные связности

Определение. Аффинная связность на многообразии M — это правило ∇ , которое сопоставляет каждому $X \in \mathfrak{D}^1(M)$ линейное отображение ∇_X векторного пространства $\mathfrak{D}^1(M)$ в себя, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$\begin{aligned} (\nabla_1) \quad & \nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y; \\ (\nabla_2) \quad & \nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + (Xf)Y \end{aligned}$$

для $f, g \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)$. Оператор ∇_X называется ковариантной производной относительно X .

Лемма 4.1. Предположим, что M имеет аффинную связность $X \rightarrow \nabla_X$ и что U — открытое подмногообразие в M . Пусть $X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)$. Если векторное поле X или Y тождественно равно 0 на U , то тем же свойством обладает $\nabla_X(Y)$.

Доказательство. Предположим, что $Y = 0$ на U . Пусть $p \in U$ и $g \in C^\infty(M)$. Для доказательства равенства $(\nabla_X(Y)g)(p) = 0$ выберем такую функцию $f \in C^\infty(M)$, что $f(p) = 0$ и $f = 1$ вне U (лемма 1.2). Тогда $fY = Y$ и

$$\nabla_X(Y)g = \nabla_X(fY)g = (Xf)(Yg) + f(\nabla_X(Y)g),$$

что равно 0 в точке p . Утверждение для X доказывается аналогично.

Аффинная связность ∇ на M индуцирует аффинную связность ∇_U на произвольном открытом подмногообразии U в M . Действительно, пусть X, Y — два векторных поля на U . Для каждой точки $p \in U$ существуют векторные поля X', Y' на M , совпадающие с X и Y в некоторой открытой окрестности V точки p . Положим тогда $((\nabla_U)_X(Y))_q = (\nabla_{X'}(Y'))_q$ для $q \in V$. В силу леммы 4.1, правая часть этого равенства не зависит от выбора X', Y' . Сразу видно, что правило $\nabla_U: X \rightarrow (\nabla_U)_X$ ($X \in \mathfrak{D}^1(U)$) есть аффинная связность на U .

В частности, предположим, что U — координатная окрестность с системой координат $\varphi: q \rightarrow (x_1(q), \dots, x_m(q))$. Для простоты будем писать ∇_i вместо $(\nabla_U)_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$. Определим функции Γ_{ij}^k на U

формулой

$$\nabla_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (1)$$

Для простоты мы будем обозначать функции $\Gamma_{ij}^k \circ \varphi^{-1}$ также через Γ_{ij}^k . Если $\{y_1, \dots, y_m\}$ — другая система координат, действующая на U , то равенства

$$\nabla_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y_\beta} \right) = \sum_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial}{\partial y_\gamma}$$

определяют другое множество функций $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$. Используя аксиомы (∇_1) и (∇_2) , легко получить, что

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \sum_{i,j,k} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_k} \Gamma_{ij}^k + \sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_j}. \quad (2)$$

С другой стороны, предположим, что задано покрытие многообразия M открытыми координатными окрестностями U и что в каждой окрестности задана такая система функций Γ_{ij}^k , что в пересечении любых двух окрестностей имеет место соотношение (2). Тогда можно определить ∇_i формулой (1) и получить таким образом аффинную связность ∇_U в каждой координатной окрестности U . Определим, наконец, аффинную связность $\tilde{\nabla}$ на M следующим образом. Пусть $X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)$ и $p \in M$. Если U — координатная окрестность, содержащая точку p , то положим

$$(\tilde{\nabla}_X(Y))_p = ((\nabla_U)_{X_1}(Y_1))_p,$$

где X_1 и Y_1 — векторные поля на U , индуцированные полями X и Y соответственно. Тогда $\tilde{\nabla}$ — аффинная связность на M , индуцирующая в каждой координатной окрестности U связность ∇_U .

Лемма 4.2. Пусть $X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)$. Если X обращается в 0 в точке $p \in M$, то тем же свойством обладает $\nabla_X(Y)$.

Пусть $\{x_1, \dots, x_m\}$ — система координат, действующая в открытой окрестности U точки p . На множестве U мы имеем $X = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, где $f_i \in C^\infty(U)$ и $f_i(p) = 0$ ($1 \leq i \leq m$). Используя лемму 4.1, получаем $(\nabla_X(Y))_p = \sum_i f_i(p) (\nabla_i(Y))_p = 0$.

Определение. Предположим, что ∇ — аффинная связность на M и что Φ — диффеоморфизм многообразия M . Тогда формула

$$\nabla'_X(Y) = (\nabla_{X^\Phi}(Y^\Phi))^{\Phi^{-1}} \quad (X, Y \in \mathfrak{D}^1(M))$$

определяет на M новую аффинную связность ∇' . То что ∇' действительно является аффинной связностью, легче всего усмотреть из предложения 3.3. Аффинная связность ∇ называется *инвариантной* относительно Φ , если $\nabla' = \nabla$. В этом случае Φ

называется *аффинным преобразованием* многообразия M . Аналогичным образом можно определить аффинное преобразование одного многообразия на другое.

§ 5. Параллелизм

Пусть M — многообразие класса C^∞ . Кривая в M есть регулярное отображение открытого интервала $I \subset \mathbb{R}$ в M . Ограничение кривой на некоторый замкнутый подинтервал называется *отрезком кривой*. Отрезок кривой называется конечным, если интервал конечен.

Пусть $\gamma: t \rightarrow \gamma(t)$ ($t \in I$) — кривая в M . Дифференцирование по параметру будет обычно обозначаться точкой $(\cdot)$. В частности, $\dot{\gamma}(t)$ — это касательный вектор $d\gamma\left(\frac{d}{dt}\right)_t$. Предположим теперь, что с каждым $t \in I$ связан вектор $Y(t) \in M_{\gamma(t)}$ и что $Y(t)$ дифференцируемо зависит от t . Мы определим понятие параллельности семейства $Y(t)$ относительно кривой γ . Пусть J — такой компактный подинтервал в I , что конечный отрезок кривой $\gamma_J: t \rightarrow \gamma(t)$ ($t \in J$) не имеет двойных точек и что $\gamma(J)$ содержится в некоторой координатной окрестности U . В силу регулярности отображения γ , каждая точка из I содержится в таком интервале J с непустой внутренностью. Пусть $\{x_1, \dots, x_m\}$ — система координат на U .

Лемма 5.1. Пусть $g(t)$ — дифференцируемая функция на некотором открытом интервале, содержащем J . Тогда существует такая функция $G \in C^\infty(M)$, что

$$G(\gamma(t)) = g(t) \quad (t \in J).$$

Доказательство. Фиксируем $t_0 \in J$. Существует такой индекс i , что функция $t \rightarrow x_i(\gamma(t))$ имеет ненулевую производную при $t = t_0$. Следовательно, существует такая функция η_i одного переменного, дифференцируемая в некоторой окрестности точки $x_i(\gamma(t_0))$, что $t = \eta_i(x_i(\gamma(t)))$ для всех t в некотором интервале, окружающем t_0 . Функция $q \rightarrow g(\eta_i(x_i(q)))$ определена и дифференцируема для всех $q \in U$, достаточно близких к $\gamma(t_0)$. Выберем такую функцию $G^* \in C^\infty(U)$, что $G^*(q) = g(\eta_i(x_i(q)))$ для всех q в некоторой окрестности точки $\gamma(t_0)$. Тогда

$$G^*(\gamma(t)) = g(t)$$

для всех t в некотором интервале, окружающем t_0 . В силу компактности интервала J , существуют такая конечная система относительно компактных открытых подмножеств $U_1, \dots, U_n$ множества U , покрывающая $\gamma(J)$, и такие функции $G_i \in C^\infty(U)$, что $G_i(\gamma(t)) = g(t)$ для $\gamma(t) \in U_i$ ($1 \leq i \leq n$). Поскольку U имеет

счетную базу, оно паракомпактно, и последовательность $U_1, \dots, U_n$ можно дополнить до локально конечного покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ множества U . Мы можем считать, что каждое U_α относительно компактно и что $U_\alpha \cap \gamma(J) = \emptyset$, если α не совпадает ни с одним из чисел $1, \dots, n$. Пусть $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Тогда функция $G' = \sum_{i=1}^n G_i \varphi_i$ принадлежит $C^\infty(U)$ и $G'(\gamma(t)) = g(t)$ для каждого $t \in J$. Наконец, пусть ψ — функция из $C^\infty(M)$ с компактным носителем, содержащимся в U , такая, что $\psi = 1$ на $\gamma(J)$. Тогда функция G , определенная формулой

$$G(q) = \begin{cases} \psi(q) G'(q), & \text{если } q \in U, \\ 0, & \text{если } q \notin U, \end{cases}$$

имеет нужные свойства.

Положим $X(t) = \dot{\gamma}(t)$ ($t \in J$). Используя лемму 5.1, легко показать, что существуют такие векторные поля $X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)$, что

$$X_{\gamma(t)} = X(t), \quad Y_{\gamma(t)} = Y(t) \quad (t \in J),$$

где $Y(t)$ — определенное выше семейство. Семейство $Y(t)$ ($t \in J$) называется *параллельным* относительно γ_J (или параллельным вдоль γ_J), если

$$\nabla_X(Y)_{\gamma(t)} = 0 \quad \text{для всех } t \in J. \quad (1)$$

Для доказательства того, что это определение не зависит от выбора полей X и Y , мы выразим (1) в координатах $\{x_1, \dots, x_m\}$. Существуют такие функции X^i, Y^j ($1 \leq i, j \leq m$) на U , что

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{на } U.$$

Для простоты положим $x_i(t) = x_i(\gamma(t))$, $X^i(t) = X^i(\gamma(t))$ и $Y^i(t) = Y^i(\gamma(t))$ ($t \in J$, $1 \leq i \leq m$). Тогда $\dot{X}^i(t) = \dot{x}_i(t)$. Так как

$$\nabla_X(Y) = \sum_k \left(\sum_i X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x_i} + \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{на } U,$$

то мы получаем

$$\frac{dY^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} Y^j = 0 \quad (t \in J). \quad (2)$$

В этом уравнении участвуют только значения полей X и Y на кривой. Следовательно, условие параллельности (1) не зависит от выбора полей X и Y . Теперь ясно, как определить параллель-

ность относительно любого конечного отрезка кривой γ_J и, наконец, относительно всей кривой γ .

Определение. Пусть $\gamma: t \rightarrow \gamma(t)$ ($t \in I$) — кривая в M . Кривая γ называется *геодезической*, если семейство касательных векторов $\dot{\gamma}(t)$ параллельно относительно γ . Геодезическая γ называется *максимальной*, если она не является собственным ограничением никакой геодезической.

Предположим, что γ_J — конечный отрезок геодезической без двойных точек, содержащийся в координатной окрестности U с координатами $\{x_1, \dots, x_m\}$. Тогда из уравнения (2) следует, что

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0 \quad (t \in J). \quad (3)$$

Если изменить параметр на геодезической и положить $t = f(s)$ ($f'(s) \neq 0$), то получится новая кривая $s \rightarrow \gamma_J(f(s))$. Эта кривая является геодезической тогда и только тогда, когда f — линейная функция. Это следует из формулы (3).

Предложение 5.2. Пусть p, q — две точки в M и γ — отрезок кривой с концами p и q . Параллелизм τ относительно γ индуцирует изоморфизм пространства M_p на M_q .

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что γ не имеет двойных точек и лежит в координатной окрестности U . Пусть $\{x_1, \dots, x_m\}$ — система координат в U . Допустим, что отрезок кривой γ задается отображением $t \rightarrow \gamma(t)$ ($a \leq t \leq b$), причем $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$. Как и раньше, положим $x_i(t) = x_i(\gamma(t))$ ($a \leq t \leq b$, $1 \leq i \leq m$).

Рассмотрим систему (2). Из теории систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка можно вывести следующее.

Существуют такие m функций $\varphi_i(t, y_1, \dots, y_m)$ ($1 \leq i \leq m$), определенных и дифференцируемых¹⁾ для $a \leq t \leq b$, $-\infty < y_i < \infty$, что

(i) для каждого набора $(y_1, \dots, y_m)$ функции $Y^i(t) = \varphi_i(t, y_1, \dots, y_m)$ удовлетворяют системе (2);

(ii) $\varphi_i(a, y_1, \dots, y_m) = y_i$ ($1 \leq i \leq m$).

Функции φ_i однозначно определены этими свойствами.

Свойства (i) и (ii) показывают, что семейство векторов $Y(t) = \sum_i Y^i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$ ($a \leq t \leq b$) параллельно относительно γ и что

¹⁾ Функция на замкнутом интервале I называется дифференцируемой на I , если ее можно продолжить до дифференцируемой функции на некотором открытом интервале, содержащем I .

$Y(a) = \sum_i y_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$. Отображение $Y(a) \rightarrow Y(b)$ есть линейное отображение пространства M_p в M_q , так как функции φ_i линейны по переменным $y_1, \dots, y_m$. Это отображение взаимно однозначно в силу единственности функций φ_i . Следовательно, это изоморфизм.

Предложение 5.3. Пусть M — дифференцируемое многообразие с аффинной связностью. Пусть p — точка в M , и пусть $X \neq 0$ — элемент пространства M_p . Тогда существует единственная максимальная геодезическая $t \rightarrow \gamma(t)$ в M , такая, что

$$\gamma(0) = p, \quad \dot{\gamma}(0) = X. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $\varphi: q \rightarrow (x_1(q), \dots, x_m(q))$ — такая система координат в окрестности U точки p , что $\varphi(U)$ есть куб $\{(x_1, \dots, x_m) \mid |x_i| < c\}$ и $\varphi(p) = 0$. Тогда X можно записать в виде $X = \sum_i \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$, где $\alpha_i \in \mathbf{R}$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_i}{dt} = z_i \quad (1 \leq i \leq m), \quad (5)$$

$$\frac{dz_k}{dt} = - \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k(x_1, \dots, x_m) z_i z_j \quad (1 \leq k \leq m) \quad (5')$$

с начальными условиями

$$(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_m)_{t=0} = (0, \dots, 0, \alpha_1, \dots, \alpha_m).$$

Пусть c_1, K удовлетворяют неравенствам $0 < c_1 < c$, $0 < K < \infty$. В области $|x_i| < c_1$, $|z_i| < K$ ($1 \leq i \leq m$) правые части написанных выше уравнений удовлетворяют условию Липшица.

Из теоремы существования и единственности (см., например, Миллер и Муррей [1], стр. 42¹⁾) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вытекает следующее.

Существуют такая константа $b_1 > 0$ и такие дифференцируемые функции $x_i(t)$, $z_i(t)$ ($1 \leq i \leq m$) в интервале $|t| \leq b_1$, что

$$(i) \quad \frac{dx_i(t)}{dt} = z_i(t) \quad (1 \leq i \leq m), \quad |t| < b_1,$$

$$\frac{dz_k(t)}{dt} = - \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k(x_1(t), \dots, x_m(t)) z_i(t) z_j(t) \quad (1 \leq k \leq m),$$

$$|t| < b_1;$$

¹⁾ См. также Степанов [1], стр. 142. — Прим. перев.

(ii) $(x_1(t), \dots, x_m(t), z_1(t), \dots, z_m(t))_{t=0} = (0, \dots, 0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$;

(iii) $|x_i(t)| < c_1$ $|z_i(t)| < K$ ($1 \leq i \leq m$), $|t| < b_1$;

(iv) $x_i(t), z_i(t)$ ($1 \leq i \leq m$) — единственное семейство функций, удовлетворяющее условиям (i), (ii) и (iii).

Отсюда видно, что существует геодезическая $t \rightarrow \gamma(t)$ в M , удовлетворяющая условию (iv), и что две таких геодезических совпадают в некотором интервале, содержащем $t=0$. Далее, из (iv) можно вывести, что если две геодезических $t \rightarrow \gamma_1(t)$ ($t \in I_1$) и $t \rightarrow \gamma_2(t)$ ($t \in I_2$) совпадают в некотором открытом интервале, то они совпадают для всех $t \in I_1 \cap I_2$. Отсюда сразу следует предложение 5.3.

Определение. Геодезическая, обладающая свойствами, указанными в предложении 5.3, будет обозначаться через γ_X . Если $X=0$, то мы полагаем $\gamma_X(t) = p$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

§ 6. Экспоненциальное отображение

Предположим снова, что M — многообразие класса C^∞ с аффинной связностью. Пусть $p \in M$. Мы будем использовать обозначения из доказательства предложения 5.3. Сейчас мы изучим решения систем (5) и (5') и их зависимость от начальных условий. Из теоремы существования и единственности (см., например, Миллер и Муррей [1], стр. 64¹⁾) для систем (5), (5') можно вывести следующее.

Существуют такая константа b ($0 < b < c$) и такие дифференцируемые функции $\varphi_i(t, \xi_1, \dots, \xi_m, \zeta_1, \dots, \zeta_m)$ для $|t| \leq 2b$, $|\xi_i| \leq b$, $|\zeta_j| \leq b$ ($1 \leq i, j \leq m$), что

(i) для каждого фиксированного набора $(\xi_1, \dots, \xi_m, \zeta_1, \dots, \zeta_m)$ функции

$$x_i(t) = \varphi_i(t, \xi_1, \dots, \xi_m, \zeta_1, \dots, \zeta_m),$$

$$z_i(t) = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right] (t, \xi_1, \dots, \xi_m, \zeta_1, \dots, \zeta_m) \quad (1 \leq i \leq m, |t| \leq 2b)$$

удовлетворяют уравнениям (5) и (5') и $|x_i(t)| < c_1$, $|z_i(t)| < K$;

(ii) $(x_1(t), \dots, x_m(t), z_1(t), \dots, z_m(t))_{t=0} = (\xi_1, \dots, \xi_m, \zeta_1, \dots, \zeta_m)$;

(iii) Функции φ_i однозначно определены двумя первыми свойствами.

Теорема 6.1. Пусть M — многообразие с аффинной связностью. Пусть p — некоторая точка в M . Тогда существуют такая открытая окрестность N_0 точки 0 в M_p и такая от-

¹⁾ См. также Степанов [1], стр. 304. — Прим. перев.

крытая окрестность N_p точки p в M , что отображение $X \rightarrow \gamma_X(1)$ является диффеоморфизмом окрестности N_0 на N_p .

Доказательство. Используя введенные выше обозначения, положим

$$\psi_i(t, \zeta_1, \dots, \zeta_m) = \varphi_i(t, 0, \dots, 0, \zeta_1, \dots, \zeta_m)$$

для $1 \leq i \leq m$, $|t| \leq 2b$, $|\zeta_i| \leq b$. Тогда

$$\psi_i(0, \zeta_1, \dots, \zeta_m) = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t}(0, \zeta_1, \dots, \zeta_m) = \zeta_i.$$

Поскольку $\gamma_X(st) = \gamma_{sX}(t)$, из единственности (iii) следует, что

$$\psi_i(st, \zeta_1, \dots, \zeta_m) = \psi_i(t, s\zeta_1, \dots, s\zeta_m) \quad (1)$$

для $|s| \leq 1$, $|t| \leq 2b$, $|\zeta_i| \leq b$. Обозначим через D_i частную производную по i -му аргументу. Дифференцируя по s , получаем из равенства (1) соотношения

$$t[D_1\psi_i](st, \zeta_1, \dots, \zeta_m) = \sum_{k=1}^m \zeta_k [D_{k+1}\psi_i](t, s\zeta_1, \dots, s\zeta_m),$$

$$t^2[D_1^2\psi_i](st, \zeta_1, \dots, \zeta_m) = \sum_{j,k=1}^m \zeta_j \zeta_k [D_{j+1}D_{k+1}\psi_i](t, s\zeta_1, \dots, s\zeta_m).$$

Из формулы Тейлора следует, что

$$\psi_i(b, \zeta_1, \dots, \zeta_m) = \zeta_i b + \frac{1}{2} [D_1^2\psi_i](b^*, \zeta_1, \dots, \zeta_m) b^2 \quad (0 \leq b^* \leq b).$$

Значит,

$$\begin{aligned} \psi_i(b, \zeta_1, \dots, \zeta_m) &= \\ &= \zeta_i b + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m \zeta_j \zeta_k [D_{j+1}D_{k+1}\psi_i] \left(b, \frac{b^*}{b} \zeta_1, \dots, \frac{b^*}{b} \zeta_m \right). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что отображение

$$\Psi: (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \rightarrow (\psi_1(b, \zeta_1, \dots, \zeta_m), \dots, \psi_m(b, \zeta_1, \dots, \zeta_m))$$

имеет в нуле якобиан, равный b^m . Отображение Ψ есть в точности отображение $X \rightarrow \gamma_X(b)$, выраженное в координатах (§ 3, п.1). Поскольку $\gamma_{bX}(1) = \gamma_X(b)$, отсюда следует теорема.

Определение. Отображение $X \rightarrow \gamma_X(1)$, описанное в теореме 6.1, называется *экспоненциальным отображением* в точке p и будет обозначаться через Exp (или Exp_p).

Определение. Пусть M — многообразие с аффинной связностью и p — точка в M . Открытая окрестность N_0 начала коор-

динат в M_p называется *нормальной*, если (1) отображение Exp диффеоморфно отображает N_0 на открытую окрестность N_p точки p в M ; (2) если $X \in N_0$ и $0 \leq t \leq 1$, то $tX \in N_0$.

Последнее условие означает, что N_0 является «звездной». Окрестность N_p точки p в M называется *нормальной окрестностью* точки p , если $N_p = \text{Exp } N_0$, где N_0 — нормальная окрестность точки 0 в M_p . Если предположить, что это условие выполнено, и обозначить через $X_1, \dots, X_m$ некоторый базис пространства M_p , то обратное отображение¹⁾

$$\text{Exp}_p(a_1X_1 + \dots + a_mX_m) \rightarrow (a_1, \dots, a_m)$$

окрестности N_p в $\mathbf{R}^m$ называется системой *нормальных координат* в точке p .

Докажем теперь одно полезное усиление теоремы 6.1.

Теорема 6.2. Пусть M — многообразие класса C^∞ с аффинной связностью. Тогда каждая точка $p \in M$ обладает нормальной окрестностью N_p , которая является нормальной окрестностью каждой из своих точек. (В частности, любые две точки из N_p можно соединить в точности одним²⁾ геодезическим отрезком, содержащимся в N_p .)

Мы используем обозначения из доказательства предложения 5.3. Рассмотрим снова функции $\varphi_i(t, \xi_1, \dots, \xi_m, \zeta_1, \dots, \zeta_m)$. Если $q \in U$ и $0 < \delta \leq c - \max_i |x_i(q)|$, то подмножество в U , определенное условием

$$V_\delta(q) = \{r \in U \mid \sum_{i=1}^m (x_i(r) - x_i(q))^2 < \delta^2\},$$

будет называться *сферической окрестностью* точки q радиуса δ .

Рассмотрим теперь набор $(\xi_1, \dots, \xi_m)$, где $|\xi_i| < b$ ($1 \leq i \leq m$). Определим $q \in U$ равенствами $x_i(q) = \xi_i$ ($1 \leq i \leq m$). По данному выше доказательству, отображение

$$\begin{aligned} \Phi: (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \rightarrow & (\varphi_1(b, \xi_1, \dots, \xi_m, \zeta_1, \dots, \zeta_m), \dots \\ & \dots, \varphi_m(b, \xi_1, \dots, \xi_m, \zeta_1, \dots, \zeta_m)) \end{aligned}$$

имеет в точке $(\zeta_1, \dots, \zeta_m) = (0, \dots, 0)$ якобиан b^m . Значит, $\varphi^{-1} \circ \Phi$ есть диффеоморфизм некоторой окрестности $\zeta_1^2 + \dots + \zeta_m^2 < r^2$ ($r \leq b$) начала координат в $\mathbf{R}^m$ на открытую окрестность N_q точки q в M . Мы можем предположить, что r есть самое большое из чисел, обладающих этим свойством. Из соображений

1) Здесь и кое-где в дальнейшем мы позволяем себе обозначать отображение, обратное к взаимно однозначному отображению $X \rightarrow \varphi(X)$, через $\varphi(X) \rightarrow X$.

2) Не считая линейной замены параметра на геодезической.

непрерывности существует такое $\delta_0 > 0$, что если $\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2 < \delta_0^2$, то в пересечении всех N_q содержится сферическая окрестность точки p . Если взять δ_0 достаточно малым, то можно считать, что эта сферическая окрестность есть $V_{4\delta_0}(p)$. Так как N_q нормальна, то тем самым доказана

Лемма 6.3. *Существует такое число $\delta_0 > 0$, что для каждой точки $q \in V_{\delta_0}(p)$ сферическая окрестность $V_{2\delta_0}(q)$ содержится в некоторой нормальной окрестности точки q .*

Окрестность $V_{\delta_0}(p)$ обладает поэтому следующим свойством: для каждой пары точек $q_1, q_2 \in V_{\delta_0}(p)$ существует не более одного геодезического отрезка, содержащегося в $V_{\delta_0}(p)$ и соединяющего q_1 с q_2 . Окрестность, обладающая этим свойством, будет называться *простой*. Очевидно, что если $0 < \delta \leq \delta_0$, то $V_\delta(p)$ также проста. Мы покажем теперь, что для всех достаточно малых δ окрестность $V_\delta(p)$, помимо этого, является *выпуклой*, т. е. любые две точки из $V_\delta(p)$ можно соединить геодезическим отрезком, содержащимся в $V_\delta(p)$.

Пусть δ^* — число, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$(i) \quad 0 < \delta^* < \delta_0;$$

(ii) матрица $(\delta_{ij} - \sum_k x_k \Gamma_{ij}^k)$ является положительно определенной для $\sum_k x_k^2 \leq (\delta^*)^2$. (Здесь δ_{ij} равно 1, если $i = j$, и 0 в противном случае.)

Очевидно, такое число δ^* существует. Утверждение теоремы 6.2 содержится в следующей лемме.

Лемма 6.4. *Если $0 < \delta \leq \delta^*$, то окрестность $V_\delta(p)$ является нормальной окрестностью каждой из своих точек. В частности, $V_\delta(p)$ проста и выпукла.*

Доказательство. Граница D окрестности $V_\delta(p)$ есть подмногообразие в $V_{\delta_0}(p)$. Докажем сначала, что если геодезическая $\gamma: t \rightarrow \gamma(t)$ касается подмногообразия D в точке $q_0 = \gamma(t_0)$, то для всех $t \neq t_0$, достаточно близких к t_0 , точка $\gamma(t)$ лежит вне D . Как и раньше, положим $x_k(t) = x_k(\gamma(t))$ ($1 \leq k \leq m$). Тогда функции $x_k(t)$ удовлетворяют уравнению (3) из § 5 в окрестности точки t_0 . В формуле Тейлора

$$F(t_0 + \Delta t) = F(t_0) + \Delta t \dot{F}(t_0) + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \ddot{F}(t_0) + O(\Delta t)^3$$

для функции $F(t) = \sum_{k=1}^m (x_k(t))^2 - \delta^2$ имеем

$$\dot{F}(t_0) = 2 \sum_{k=1}^m x_k(t_0) \dot{x}_k(t_0) = 0, \quad F(t_0) = 0,$$

$$\begin{aligned}\ddot{F}(t_0) &= 2 \sum_{k=1}^m (\dot{x}_k(t_0) \dot{x}_k(t_0) + x_k(t_0) \ddot{x}_k(t_0)) = \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^m (\delta_{ij} - \sum_k x_k(t_0) \Gamma_{ij}^k) \dot{x}_i(t_0) \dot{x}_j(t_0).\end{aligned}$$

Используя условие (ii), получаем отсюда, что $F(t_0 + \Delta t) > 0$, если Δt достаточно мало и отлично от 0. Тем самым утверждение относительно γ доказано.

Таким образом, для пары $P, Q \in V_\delta(p)$ есть лишь две возможности.

1) Не существует геодезического отрезка, содержащегося в $V_\delta(p)$ и соединяющего P и Q . В этом случае единственный геодезический отрезок в $V_{2\delta_0}(P)$, соединяющий P и Q , будет содержать точки, лежащие вне D .

2) Существует геодезический отрезок в $V_\delta(p)$, соединяющий P и Q . В этом случае мы говорим, что P и Q *видны друг из друга* в окрестности $V_\delta(p)$.

Обозначим через S подмножество в $V_\delta(p) \times V_\delta(p)$, состоящее из всех пар точек, видных друг из друга в $V_\delta(p)$. Множество S непусто. Мы покажем сейчас, что S открыто и замкнуто в $V_\delta(p) \times V_\delta(p)$. В силу связности множества $V_\delta(p)$, отсюда будет следовать лемма 6.4.

I. S замкнуто. Пусть (p_n, q_n) — последовательность в S , сходящаяся к $(p^*, q^*) \in V_\delta(p) \times V_\delta(p)$. Соединим p_n с q_n таким геодезическим отрезком $t \rightarrow \gamma_n(t)$ в $V_\delta(p)$, что $\gamma_n(0) = p_n$, $\gamma_n(b) = q_n$. Аналогично, p^* и q^* соединены геодезическим отрезком $\gamma^*(t)$ ($0 \leq t \leq b$) в $V_{2\delta_0}(p^*)$. Рассмотрим определенное выше отображение Φ для $(\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_m^{(n)}) = (x_1(p_n), \dots, x_m(p_n))$. При этом отображении точка q_n соответствует некоторому набору $(\zeta_1^{(n)}, \dots, \zeta_m^{(n)})$. Поскольку эти наборы ограничены ($|\zeta_i| \leq b$), можно, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, предположить, что $(\zeta_1^{(n)}, \dots, \zeta_m^{(n)})$ сходится к пределу $(\zeta_1^*, \dots, \zeta_m^*)$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда при $1 \leq i \leq m$ и $0 \leq t \leq b$ последовательность

$$\varphi_i(t, \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_m^{(n)}, \zeta_1^{(n)}, \dots, \zeta_m^{(n)})$$

сходится к

$$\varphi_i(t, x_1(p^*), \dots, x_m(p^*), \zeta_1^*, \dots, \zeta_m^*).$$

Но это есть геодезическая в $V_{2\delta_0}(p^*)$, соединяющая p^* с q^* . В силу единственности, отсюда следует, что

$$x_i(\gamma^*(t)) = \varphi_i(t, x_1(p^*), \dots, x_m(p^*), \zeta_1^*, \dots, \zeta_m^*)$$

при $0 \leq t \leq b$, $1 \leq i \leq m$. Другими словами, $\gamma_n(t) \rightarrow \gamma^*(t)$ при $0 \leq t \leq b$. Поскольку $\gamma_n(t) \in V_\delta(p)$ ($0 \leq t \leq b$), то γ^* не содержит

точек, лежащих вне границы D . В силу 1), имеет место включение $(p^*, q^*) \in S$. Значит, S замкнуто.

II. S открыто. Действительно, то же доказательство, что в части I, показывает, что дополнение $(V_\delta(p) \times V_\delta(p)) \setminus S$ замкнуто.

Определение. Пусть M — многообразие с аффинной связностью. Пусть p — точка в M и N_p — нормальная окрестность точки p . Возьмем $X \in M_p$ и для каждой $q \in N_p$ положим $(X^*)_q = \tau_{pq}X$, где τ_{pq} — параллельный перенос вдоль единственного геодезического отрезка в N_p , соединяющего p и q . Из уравнения (2) § 5 ясно, что $(X^*)_q$ дифференцируемо зависит от q . Определенное таким образом векторное поле X^* на N_p называется *адаптированным* к касательному вектору X . Как и раньше, обозначим через $\theta(X^*)$ производную Ли относительно X^* .

Определение. Аффинная связность ∇ на аналитическом многообразии M называется *аналитической*, если для каждой точки $p \in M$ поле $\nabla_X(Y)$ аналитично в точке p для любых векторных полей X и Y , аналитических в точке p .

Теорема 6.5. Пусть M — аналитическое многообразие с аналитической аффинной связностью ∇ . Пусть $p \in M$ и $X \neq 0$ в пространстве M_p . Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что при $|t| < \varepsilon$ дифференциал отображения $\text{Exp} (= \text{Exp}_p)$ выражается формулой

$$(d \text{Exp})_{tX}(Y) = \left\{ \frac{1 - e^{\theta(-tX^*)}}{\theta(tX^*)} (Y^*) \right\}_{\text{Exp } tX} \quad (Y \in M_p).$$

Здесь через $\frac{1 - e^{-A}}{A}$ обозначается ряд $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-A)^m}{(m+1)!}$ и, как обычно

(замечание из § 2, п.1), M_p отождествляется с касательным пространством в каждой из своих точек.

Доказательство. Отображение Exp аналитично в начале координат пространства M_p . Пусть f — функция, аналитическая в точке p . Тогда существует такая звездная окрестность U_0 точки 0 в M_p , что

$$f(\text{Exp } Z) = P(z_1, \dots, z_m) \quad (Z \in U_0),$$

где P — абсолютно сходящийся степенной ряд и $z_1, \dots, z_m$ — координаты точки Z в некотором базисе в M_p . Отсюда следует, что для фиксированного $Z \in U_0$

$$f(\text{Exp } tZ) = P(tz_1, \dots, tz_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n t^n \quad (a_n \in \mathbb{R})$$

при $0 \leq t \leq 1$. Если t достаточно мало, то

$$[Z^* f](\text{Exp } tZ) = \left\{ \frac{d}{du} f(\text{Exp}(t+u)Z) \right\}_{u=0} = \frac{d}{dt} f(\text{Exp } tZ),$$

откуда по индукции выводим, что

$$[(Z^*)^n f](\text{Exp } tZ) = \frac{d^n}{dt^n} f(\text{Exp } tZ).$$

Полагая $t=0$, получаем, что $[(Z^*)^n f](p) = a_n$. Значит,

$$f(\text{Exp } Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(Z^*)^n f](p) \quad (Z \in U_0). \quad (2)$$

Пусть теперь $Y \in M_p$. Тогда

$$d \text{Exp}_{tX}(Y) f = Y_{tX}(f \circ \text{Exp}) = \left\{ \frac{d}{du} f(\text{Exp}(tX + uY)) \right\}_{u=0}.$$

Если t и u достаточно малы, то из соотношения (2) получаем равенство

$$\begin{aligned} f(\text{Exp}(tX + uY)) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} [(tX^* + uY^*)^r f](p) = \\ &= \sum_{m, n \geq 0} \frac{t^n u^m}{(n+m)!} [S_{n,m} f](p), \end{aligned} \quad (3)$$

где $S_{n,m}$ — коэффициент при $t^n u^m$ в выражении $(tX^* + uY^*)^{n+m}$. В частности,

$$S_{n,1} = (X^*)^n Y^* + (X^*)^{n-1} Y^* X^* + \dots + Y^* (X^*)^n.$$

Продифференцируем разложение (3) по u и положим $u=0$. Тогда получим, что

$$d \text{Exp}_{tX}(Y) f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} [((X^*)^n Y^* + \dots + Y^* (X^*)^n) f](p).$$

Пусть N_p — нормальная окрестность точки p . Обозначим через $\mathbf{D}(N_p)$ алгебру операторов в $C^\infty(N_p)$, порожденную векторными полями Z^* , где Z пробегает все M_p . Обозначим через L_{X^*} и R_{X^*} линейные преобразования в $\mathbf{D}(N_p)$, определенные формулами $L_{X^*}: A \rightarrow X^*A$ и $R_{X^*}: A \rightarrow AX^*$. Поскольку $\theta(X^*)Y^* = X^*Y^* - Y^*X^*$, мы полагаем $\theta(X^*)A = X^*A - AX^*$ для каждого $A \in \mathbf{D}(N_p)$. Тогда $\theta(X^*) = L_{X^*} - R_{X^*}$ и потому $\theta(X^*)$ и L_{X^*} перестановочны. Значит,

$$(R_{X^*})^m = (L_{X^*} - \theta(X^*))^m = \sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{m}{p} (L_{X^*})^{m-p} (\theta(X^*))^p.$$

Используя соотношение

$$\sum_{p=0}^{n-k} \binom{n-p}{k} = \binom{n+1}{k+1},$$

получаем формулу

$$\begin{aligned} S_{n,1} &= \sum_{p=0}^n (X^*)^p \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \binom{n-p}{k} (X^*)^{n-p-k} (\theta(X^*))^k (Y^*) = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} (X^*)^{n-k} (\theta(-X^*))^k (Y^*), \end{aligned}$$

откуда

$$d \operatorname{Exp}_{tX}(Y) f = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \left\{ \frac{(tX^*)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{(\theta(-tX^*))^k}{(k+1)!} (Y^*) \right\} f \right] (p).$$

При достаточно малых t правую часть можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \left\{ \frac{(tX^*)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{(\theta(-tX^*))^k}{(k+1)!} (Y^*) \right\} f \right] (p) = \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{(tX^*)^r}{r!} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\theta(-tX^*))^m}{(m+1)!} (Y^*) \right\} f \right) \right] (p). \quad (4) \end{aligned}$$

Для обоснования формулы (4) мы докажем сначала следующие утверждения:

(i) существуют такой интеграл I_δ : $-\delta < t < \delta$ и такая открытая окрестность U точки p , что ряд

$$G(t, q) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\theta(-tX^*))^m}{(m+1)!} (Y^*) \right\}_q f \quad (5)$$

абсолютно сходится и представляет аналитическую функцию при $(t, q) \in I_\delta \times U$, причем оператор X^* можно применять к ряду (5) почленно;

(ii) существует такой подинтервал I_{δ_1} : $-\delta_1 < t < \delta_1$ в I_δ , что ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} [(X^*)^r G](t, p)$$

равномерно сходится при $t \in I_{\delta_1}$.

При доказательстве утверждений (i) и (ii) мы можем предположить, что в подходящей системе координат $\{x_1, \dots, x_m\}$ в окрестности точки p мы имеем $x_1(p) = \dots = x_m(p) = 0$ и $X^* = \frac{\partial}{\partial x_1}$ (простое доказательство см. в книге Шевалле [2], стр. 133).

Можно предположить также, что $Y^* = g \frac{\partial}{\partial x_2}$, где функция g аналитична. Тогда

$$(\theta(X^*))^m(Y^*) = \frac{\partial^m g}{\partial x_1^m} \frac{\partial}{\partial x_2},$$

и ряд (5) сводится к ряду

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-t)^s}{(s+1)!} \frac{\partial^s g}{\partial x_1^s} \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Поскольку g аналитична, ее производные s -го порядка ограничены числом $Cs!$ (C — константа) равномерно в некоторой окрестности начала координат. Отсюда следует (i). Для доказательства утверждения (ii) разложим $G(t, q)$ в степенной ряд

$$G(t, q) = \sum a_{i_0 i_1 \dots i_m} t^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}.$$

Тогда

$$[(X^*)^r G](t, p) = \sum_{i=0}^{\infty} (r! a_{i, r, 0 \dots 0}) t^i.$$

Пусть $\varrho > 0$ — такое число, что ряд для $G(t, q)$ сходится при $(t, x_1, \dots, x_m) = (\varrho, \varrho, \dots, \varrho)$. Тогда существует такая константа K , что

$$|a_{i_0 i_1 \dots i_m}| \leq K \varrho^{-(i_0 + \dots + i_m)}.$$

Отсюда следует, что

$$|[(X^*)^r G](t, p)| \leq K \varrho^{-r} r! \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\varrho}\right)^i \leq 2K \varrho^{-r} r!$$

в предположении, что $|t| \leq \frac{1}{2} \varrho$. Утверждение (ii) теперь очевидно.

Положим

$$a_{m+r, r} = \left[\left\{ \frac{(X^*)^r (\theta(-X^*))^m}{r! (m+1)!} (Y^*) \right\} f \right] (p).$$

Тогда из утверждений (i) и (ii) следует, что существует такой круг D с центром в начале координат на комплексной плоскости, что ряды

$$\sum_{n=r}^{\infty} a_{n, r} t^n \quad \text{и} \quad \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{n=r}^{\infty} a_{n, r} t^n \right)$$

абсолютно и равномерно сходятся для $t \in D$. По теореме Вейерштрасса о двойных рядах можно изменить порядок суммирования, так что справедливо равенство

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=r}^{\infty} a_{n,r} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n a_{n,r} t^n.$$

Однако это есть в точности соотношение (4). В силу (2), мы доказали существование такого числа $\varepsilon_f > 0$, что

$$d \operatorname{Exp}_{tX} (Y) f = \left\{ \frac{1 - e^{-\theta(tX^*)}}{\theta(tX^*)} (Y^*) \right\}_{\operatorname{Exp}_{tX}} f$$

при $|t| < \varepsilon_f$. Применяя это равенство к координатным функциям $f = x_1, \dots, f = x_m$, получаем нашу теорему, причем $\varepsilon = \min(\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_m})$.

§ 7. Ковариантное дифференцирование

В § 5 параллелизм был определен в терминах ковариантного дифференцирования ∇_X . Теорема 7.1, которую мы докажем ниже, показывает, что можно также идти другим путем и описать ковариантную производную в терминах параллельного переноса. Отсюда возникает возможность определения ковариантных производных для других объектов.

Определение. Пусть X — векторное поле на многообразии M . Кривая $s \rightarrow \varphi(s)$ ($s \in I$) называется *интегральной кривой* поля X , если

$$\dot{\varphi}(s) = X_{\varphi(s)} \quad (s \in I). \quad (1)$$

Предположим, что $0 \in I$. Пусть $p = \varphi(0)$, и пусть $\{x_1, \dots, x_m\}$ — система координат, действующая в окрестности U точки p . Существуют такие функции $X^i \in C^\infty(U)$, что $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ на U .

Для простоты положим $x_i(s) = x_i(\varphi(s))$ и будем писать X^i вместо $(X^i)^*$ (§ 2, п.1). Тогда условие (1) эквивалентно системе

$$\frac{dx_i(s)}{ds} = X^i(x_1(s), \dots, x_m(s)) \quad (1 \leq i \leq m). \quad (2)$$

Значит, если $X_p \neq 0$, то существует интегральная кривая поля X , проходящая через p .

Теорема 7.1. Пусть M — многообразие с аффинной связностью. Пусть $p \in M$, и пусть X, Y — два векторных поля на M . Предположим, что $X_p \neq 0$. Пусть $s \rightarrow \varphi(s)$ — интегральная кривая поля X , проходящая через $p = \varphi(0)$, и пусть τ_t —

параллельный перенос из p в точку $\varphi(t)$ относительно кривой φ . Тогда

$$(\nabla_X(Y))_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\tau_s^{-1} Y_{\varphi(s)} - Y_p).$$

Доказательство. Мы будем пользоваться введенными выше обозначениями. Рассмотрим фиксированное $s > 0$ и семейство $Z_{\varphi(t)}$ ($0 \leq t \leq s$), параллельное относительно кривой φ и такое, что $Z_{\varphi(0)} = \tau_s^{-1} Y_{\varphi(s)}$. Мы можем написать

$$Z_{\varphi(t)} = \sum_i Z^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\varphi(t)}, \quad Y_{\varphi(t)} = \sum_i Y^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\varphi(t)}$$

и имеем соотношения

$$\begin{aligned} \dot{Z}^k(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i(t) Z^j(t) &= 0 \quad (0 \leq t \leq s), \\ Z^k(s) &= Y^k(s) \quad (1 \leq k \leq m). \end{aligned}$$

По теореме о среднем значении имеем равенство

$$Z^k(s) = Z^k(0) + s \dot{Z}^k(t^*)$$

для подходящего числа t^* между 0 и s . Значит, k -я компонента вектора $\frac{1}{s} (\tau_s^{-1} Y_{\varphi(s)} - Y_p)$ равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} (Z^k(0) - Y^k(0)) &= \frac{1}{s} \{Z^k(s) - s \dot{Z}^k(t^*) - Y^k(0)\} = \\ &= \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\varphi(t^*)) \dot{x}_i(t^*) Z^j(t^*) + \frac{1}{s} (Y^k(s) - Y^k(0)). \end{aligned}$$

При $s \rightarrow 0$ это выражение стремится к пределу

$$\frac{dy^k}{ds} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{ds} y^j.$$

Обозначим это последнее выражение через A_k . Раньше было показано, что

$$\nabla_X(Y)_p = \sum_k A_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Используя теорему 7.1, можно теперь определить ковариантные производные произвольных тензорных полей. Пусть p и q — две точки в M и γ — отрезок кривой в M , соединяющий p с q . Пусть τ — параллельный перенос вдоль γ . Если $F \in M_p^*$, то определим $\tau \cdot F \in M_q^*$ формулой $(\tau \cdot F)(A) = F(\tau^{-1} \cdot A)$ для любого

$A \in M_q$. Если T — тензорное поле на M типа (r, s) , где $r + s > 0$, то определим $\tau \cdot T_p \in \mathfrak{D}_s^r(q)$ формулой

$$(\tau \cdot T_p)(F_1, \dots, F_r, A_1, \dots, A_s) = \\ = T_p(\tau^{-1} F_1, \dots, \tau^{-1} F_r, \tau^{-1} A_1, \dots, \tau^{-1} A_s),$$

где $A_i \in M_q$, $F_j \in M_q^*$. Пусть теперь $X \in \mathfrak{D}^1(M)$, и пусть p — любая точка в M , в которой $X_p \neq 0$. В обозначениях теоремы 7.1 положим

$$(\nabla_X T)_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\tau_s^{-1} T_{\varphi(s)} - T_p). \quad (3)$$

Для каждой точки $q \in M$, где $X_q = 0$, положим $(\nabla_X T)_q = 0$ в соответствии с леммой 4.2. Для функции $f \in C^\infty(M)$ положим

$$(\nabla_X f)_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (f(\varphi(s)) - f(p)),$$

если $X_p \neq 0$, и $(\nabla_X f)_p = 0$ в противном случае. Тогда $\nabla_X f = Xf$. Наконец, ∇_X продолжается до линейного отображения пространства $\mathfrak{D}$ в себя.

Предложение 7.2. *Оператор ∇_X обладает следующими свойствами:*

- (i) ∇_X есть дифференцирование смешанной тензорной алгебры $\mathfrak{D}(M)$ (рассматриваемой как алгебра над $\mathbf{R}$).
- (ii) ∇_X сохраняет тип тензоров.
- (iii) ∇_X перестановочно со всеми свертываниями C_j^i .

Проверка этих свойств проводится непосредственно. Рассмотрим одно простое приложение. Пусть $X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)$, $\omega \in \mathfrak{D}_1(M)$. Тогда, в силу (i),

$$\nabla_X (Y \otimes \omega) = \nabla_X (Y) \otimes \omega + Y \otimes \nabla_X \omega. \quad (4)$$

Поэтому из свойства (iii) следует, что

$$(\nabla_X \omega)(Y) = X \cdot \omega(Y) - \omega(\nabla_X(Y)). \quad (5)$$

Тензорное поле $Y \otimes \omega$ можно рассматривать как $\mathfrak{F}$ -линейное отображение модуля $\mathfrak{D}^1$ в себя, заданное формулой

$$Y \otimes \omega: Z \rightarrow \omega(Z) Y \quad (Z \in \mathfrak{D}^1).$$

Если A, B — два отображения модуля $\mathfrak{D}^1$ в себя, то положим $[A, B] = AB - BA$. Тогда

$$[\nabla_X, Y \otimes \omega] = \nabla_X (Y \otimes \omega). \quad (6)$$

Действительно,

$$[\nabla_X, Y \otimes \omega](Z) = \nabla_X (\omega(Z) Y) - (Y \otimes \omega)(\nabla_X Z) = \\ = \omega(Z) \nabla_X(Y) + (X \cdot \omega(Z)) Y - \omega(\nabla_X Z) Y.$$

С другой стороны, из формул (4) и (5) следует, что

$$\begin{aligned}\nabla_X(Y \otimes \omega)(Z) &= \omega(Z) \nabla_X(Y) + (\nabla_X \omega)(Z) Y = \\ &= \omega(Z) \nabla_X(Y) + (X \cdot \omega(Z)) Y - \omega(\nabla_X(Z)) Y,\end{aligned}$$

откуда вытекает соотношение (6). Таким образом,

$$[\nabla_X, B] = \nabla_X \cdot B, \quad (7)$$

если B — тензорное поле типа $(1,1)$. В левой части этого равенства B следует рассматривать как линейное отображение модуля $\mathfrak{D}^1$ в $\mathfrak{D}^1$, определенное формулой

$$Z \rightarrow C_1^1(Z \otimes B),$$

где C_1^1 — свертывание первого контравариантного и первого ковариантного индексов.

§ 8. Структурные уравнения

Пусть M — многообразие с аффинной связностью ∇ . Положим

$$T(X, Y) = \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y],$$

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$$

для всех $X, Y \in \mathfrak{D}^1$. Заметим, что $T(X, Y) = -T(Y, X)$ и $R(X, Y) = -R(Y, X)$. Легко проверить, что $T(fX, gY) = fgT(X, Y)$ и $R(fX, gY) \cdot hZ = fghR(X, Y) \cdot Z$ для всех $f, g, h \in C^\infty(M)$, $X, Y, Z \in \mathfrak{D}^1$. Отображение

$$(\omega, X, Y) \rightarrow \omega(T(X, Y))$$

есть $\mathfrak{F}$ -полилинейное отображение модуля $\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}^1 \times \mathfrak{D}^1$ в $\mathfrak{F}$ и, следовательно, элемент модуля $\mathfrak{D}_2^1(M)$. Этот элемент называется *тензорным полем кручения* и обозначается также через T . Аналогично, отображение

$$(\omega, Z, X, Y) \rightarrow \omega(R(X, Y) \cdot Z)$$

есть $\mathfrak{F}$ -полилинейное отображение модуля $\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}^1 \times \mathfrak{D}^1 \times \mathfrak{D}^1$ в $\mathfrak{F}$ и, следовательно, элемент модуля $\mathfrak{D}_3^1(M)$. Этот элемент называется *тензорным полем кривизны* и обозначается также через R . Тензорные поля T и R имеют типы $(1,2)$ и $(1,3)$ соответственно.

Пусть $p \in M$, и пусть $X_1, \dots, X_m$ — базис для векторных полей в некоторой открытой окрестности N_p точки p , т. е. каждое векторное поле X на N_p можно записать в виде $X = \sum_i f_i X_i$, где $f_i \in C^\infty(N_p)$. Определим функции $\Gamma_{ij}^k, T_{ij}^k, R_{lij}^k$ на N_p форму-

лами

$$\nabla_{X_i}(X_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k,$$

$$T(X_i, X_j) = \sum_k T_{ij}^k X_k,$$

$$R(X_i, X_j) \cdot X_l = \sum_k R_{lij}^k X_k.$$

Пусть ω^i, ω_j^i ($1 \leq i, j \leq m$) — 1-формы на N_p , определенные равенствами

$$\omega^i(X_j) = \delta_j^i, \quad \omega_j^i = \sum_k \Gamma_{kj}^i \omega^k.$$

Ясно, что формы ω_j^i определяют функции Γ_{kj}^i на N_p и тем самым связность ∇ . С другой стороны, как показывает следующая теорема, формы ω_j^i описываются тензорными полями кручения и кривизны.

Теорема 8.1 (структурные уравнения Картана).

$$d\omega^i = - \sum_p \omega_p^i \wedge \omega^p + \frac{1}{2} \sum_{j,k} T_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \quad (1)$$

$$d\omega_l^i = - \sum_p \omega_p^i \wedge \omega_l^p + \frac{1}{2} \sum_{j,k} R_{ljk}^i \omega^j \wedge \omega^k. \quad (2)$$

Обе части равенства (1) представляют собой 2-формы на N_p . Применим обе части этого уравнения к (X_j, X_k) и вычислим результаты при помощи правил (4) и (9) из § 2. Если определить функции c_{jk}^i равенствами $[X_j, X_k] = \sum_i c_{jk}^i X_i$, то левая часть уравнения (1) дает

$$\begin{aligned} d\omega^i(X_j, X_k) &= \frac{1}{2} \{X_j \cdot \omega^i(X_k) - X_k \cdot \omega^i(X_j) - \omega^i([X_j, X_k])\} = \\ &= \frac{1}{2} \{0 - 0 - c_{jk}^i\}. \end{aligned}$$

Что касается правой части, то, прежде всего, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} T(X_j, X_k) &= \nabla_{X_j}(X_k) - \nabla_{X_k}(X_j) - [X_j, X_k] = \\ &= \sum_i (\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i - c_{jk}^i) X_i, \end{aligned}$$

откуда

$$T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i - c_{jk}^i. \quad (3)$$

Аналогично получаем, что

$$R_{lij}^k = \sum_p (\Gamma_{jl}^p \Gamma_{ip}^k - \Gamma_{il}^p \Gamma_{jp}^k) + X_i \cdot \Gamma_{jl}^k - X_j \cdot \Gamma_{il}^k - \sum_p c_{ij}^p \Gamma_{pl}^k. \quad (4)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \left(- \sum_p \omega_p^i \wedge \omega^p \right) (X_j, X_k) &= - \sum_p \frac{1}{2} \{ \omega_p^i (X_j) \omega^p (X_k) - \\ &\quad - \omega^p (X_j) \omega_p^i (X_k) \} = \frac{1}{2} (\Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^i), \\ \left(\frac{1}{2} \sum_{r,s} T_{rs}^i \omega^r \wedge \omega^s \right) (X_j, X_k) &= \frac{1}{4} \sum_{r,s} (\Gamma_{rs}^i - \Gamma_{sr}^i - c_{rs}^i) (\delta_{jr} \delta_{ks} - \\ &\quad - \delta_{js} \delta_{kr}) = \frac{1}{2} (\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i - c_{jk}^i). \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует (1). Аналогичным образом доказывается (2), если использовать формулу (4).

Предположим, что $Y_1, \dots, Y_m$ — базис касательного пространства M_p . Пусть N_0 — нормальная окрестность начала координат в M_p , и пусть N_p — нормальная окрестность $\text{Exp } N_0$ точки p в M . Пусть $Y_1^*, \dots, Y_m^*$ — векторные поля на N_p , адаптированные к касательным векторам $Y_1, \dots, Y_m$. Тогда, в силу предложения 5.2, $Y_1^*, \dots, Y_m^*$ составляют базис для векторных полей на N_p . Предположим, что $\omega^i, \omega_l^i, \Gamma_{ij}^k, R_{lij}^k$ и T_{ij}^k определены при помощи этого базиса. Пусть V — множество точек $(t, a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$, для которых $ta_1 Y_1 + \dots + ta_m Y_m \in N_0$. Рассмотрим теперь отображение $\Phi: V \rightarrow N_p$, заданное формулой

$$\Phi: (t, a_1, \dots, a_m) \rightarrow \text{Exp}(ta_1 Y_1 + \dots + ta_m Y_m). \quad (5)$$

Мы докажем, что формы $\Phi^* \omega^i$ и $\Phi^* \omega_l^i$ задаются формулами

$$\Phi^* \omega^i = a_i dt + \bar{\omega}^i, \quad \Phi^* \omega_l^i = \bar{\omega}_l^i, \quad (5')$$

где $\bar{\omega}^i$ и $\bar{\omega}_l^i$ — 1-формы от $da_1, \dots, da_m$ (не содержащие dt). Действительно, можно написать

$$\begin{aligned} \Phi^* \omega^i &= f_i(t, a_1, \dots, a_m) dt + \bar{\omega}^i, \\ \Phi^* \omega_l^i &= g_{il}(t, a_1, \dots, a_m) dt + \bar{\omega}_l^i. \end{aligned}$$

Для фиксированной точки $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{R}^m$ рассмотрим отображение

$$\tau: t \rightarrow \text{Exp}(ta_1 Y_1 + \dots + ta_m Y_m),$$

переводящее открытое множество из $\mathbf{R}$ в M . Легко видеть, что

$$\tau^* \omega^i = f_i(t, a_1, \dots, a_m) dt, \quad \tau^* \omega_l^i = g_{il}(t, a_1, \dots, a_m) dt,$$

$$\dot{\tau}(t) = \left(\sum_j a_j Y_j^* \right)_{\tau(t)}.$$

Используя двойственность отображений τ^* и $d\tau$, получаем, что

$$\begin{aligned} f_i(t, a_1, \dots, a_m) &= a_i, \\ g_{il}(t, a_1, \dots, a_m) &= \sum_q \Gamma_{ql}^i a_q. \end{aligned}$$

Однако последняя сумма обращается в 0, так как $Y^* = \sum_j a_j Y_j^*$ — касательное векторное поле к геодезической $t \rightarrow \text{Exp}(ta_1 Y_1 + \dots + ta_m Y_m)$ и, следовательно, выражение

$$\nabla_{Y^*}(Y_l^*) = \sum_k \left(\sum_q a_q \Gamma_{ql}^k \right) Y_k^*$$

равно 0 вдоль этой геодезической. Отсюда следует (5').

Формы $\bar{\omega}^i$ обращаются в 0 при $t=0$. Действительно, пусть A — точка $(0, a_1, \dots, a_m)$ в V . Тогда

$$\bar{\omega}_A^i \left(\frac{\partial}{\partial a_j} \right) = \omega^i \left(d\Phi_A \left(\frac{\partial}{\partial a_j} \right) \right).$$

Если f дифференцируема в окрестности точки p , то

$$d\Phi_A \left(\frac{\partial}{\partial a_j} \right) f = \left\{ \frac{\partial}{\partial a_j} (f \circ \Phi) \right\}_{t=0} = \frac{\partial}{\partial a_j} ((f \circ \Phi)_{t=0}) = 0.$$

Аналогично, формы $\bar{\omega}_l^i$ обращаются в 0 при $t=0$.

Для внешних производных форм (5') имеем равенства

$$\Phi^*(d\omega^i) = d(\Phi^* \omega^i) = da_i \wedge dt + dt \wedge \frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial t} + \dots,$$

$$\Phi^*(d\omega_l^i) = d(\Phi^* \omega_l^i) = dt \wedge \frac{\partial \bar{\omega}_l^i}{\partial t} + \dots,$$

где не написанные члены не содержат dt . С другой стороны, поскольку Φ^* — гомоморфизм относительно внешних произведений [формула (5) § 3], мы можем вычислить $\Phi^*(d\omega^i)$ и $\Phi^*(d\omega_l^i)$ при помощи структурных уравнений. Приравнявая коэффициенты при dt , получаем систему дифференциальных уравнений на V

$$\frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial t} = da_i + \sum_k a_k \bar{\omega}_k^i + \sum_{j,k} T_{jk}^i a_j \bar{\omega}^k, \quad \bar{\omega}^i(t; a_j; da_k)_{t=0} = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}_l^i}{\partial t} = \sum_{j,k} R_{ljk}^i a_j \bar{\omega}^k, \quad \bar{\omega}_l^i(t; a_j; da_k)_{t=0} = 0, \quad (7)$$

которая будет полезна в дальнейшем. При выводе уравнений (6) и (7) используется кососимметричность тензоров R и T по двум последним индексам. Заметим, что в (6) и (7) мы пишем для простоты T_{jk}^i и R_{ljk}^i вместо $(T_{jk}^i \circ \Phi)$ и $(R_{ljk}^i \circ \Phi)$. Эти уравнения, представляющие собой структурные уравнения в «полярных

координатах», играют важную роль в изложении римановой геометрии, принадлежащем Картану (Э. Картан [22]).

§ 9. Риманова связность

Определение. Пусть M — многообразие класса C^∞ . Псевдориманова структура на M есть тензорное поле g типа $(0,2)$, удовлетворяющее условиям

(а) $g(X, Y) = g(Y, X)$ для всех $X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)$;

(б) в каждой точке $p \in M$ значения g_p поля g есть невырожденная билинейная форма на $M_p \times M_p$.

Псевдоримановым многообразием называется связное многообразие класса C^∞ с псевдоримановой структурой. Если (и только если) форма g_p положительно определена для каждой точки $p \in M$, то мы отбрасываем приставку «псевдо» и говорим о римановой структуре и римановом многообразии. Риманова структура на многообразии индуцирует очевидным образом риманову структуру на любом подмногообразии. Аналогичное утверждение для любой псевдоримановой структуры неверно.

Теорема 9.1. На псевдоримановом многообразии существует одна и только одна аффинная связность, удовлетворяющая следующим двум условиям:

(i) тензор кручения $T = 0$;

(ii) параллельный перенос сохраняет скалярное произведение в касательных пространствах.

Доказательство. Условия (i) и (ii) можно записать в виде

$$(i') \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (X, Y \in \mathfrak{D}^1);$$

$$(ii') \nabla_Z g = 0 \quad (Z \in \mathfrak{D}^1).$$

Применим дифференцирование ∇_Z к тензорному полю $X \otimes Y \otimes g$ и используем тот факт, что ∇_Z перестановочно со свертываниями. В силу условия (ii'), получаем равенства

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y),$$

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_X Z, Y) + g(X, \nabla_Z Y) + g([Z, X], Y). \quad (1)$$

Циклически переставим буквы в формулах (1) и исключим ∇_X и ∇_Y из полученных соотношений. Тогда получим, что

$$2g(X, \nabla_Z Y) = Zg(X, Y) + g(Z, [X, Y]) + Yg(X, Z) + \\ + g(Y, [X, Z]) - Xg(Y, Z) - g(X, [Y, Z]). \quad (2)$$

Это соотношение показывает (поскольку форма g невырождена), что может существовать самое большее одна аффинная связность,

удовлетворяющая условиям (i) и (ii). С другой стороны, мы можем определить $\nabla_Z Y$ при помощи формулы (2), и тривиальное вычисление показывает, что аксиомы аффинной связности ∇_1 и ∇_2 удовлетворяются. Более того, проводя сделанные выше вычисления в обратном порядке, можно проверить (i') и (ii') на основании формулы (2).

Связность ∇ , определенная формулой (2), называется *псевдоримановой* (или *римановой*) связностью. Если многообразие M аналитично и тензорное поле g аналитично, то M называется *аналитическим псевдоримановым многообразием*. В этом случае псевдориманова связность аналитична.

Предположим теперь, что M — риманово многообразие. Тогда форма g_p положительно определена для всех $p \in M$. Если $X \in M_p$, то мы будем иногда писать $\|X\|$ вместо $g_p(X, X)^{1/2}$. Существует такой базис $Y_1, \dots, Y_m$ пространства M_p , что $g_p(Y_i, Y_j) = \delta_{ij}$ ($1 \leq i, j \leq m$). Пусть N_0 — нормальная окрестность точки 0 в M_p , и пусть $N_p = \text{Exp } N_0$. Мы можем применить формулы (6) и (7) из § 8 к адаптированному базису $Y_1^*, \dots, Y_m^*$ векторных полей в нормальной окрестности N_p . Поскольку поле g инвариантно при параллельном переносе, мы имеем равенство

$$g(Y_i^*, Y_j^*) = g(Y_i, Y_j) = \delta_{ij}$$

на N_p . Поскольку $\omega^i(Y_j^*) = \delta_j^i$, то

$$g = \sum_i (\omega^i)^2 \text{ в } N_p,$$

где симметрическое произведение $\alpha\beta$ двух 1-форм задается формулой $\alpha\beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha)$.

Пусть S — единичная сфера $\|X\| = 1$ в M_p , и пусть U — множество всех пар $(t, X) \in \mathbf{R} \times S$, для которых $tX \in N_0$. Тогда U открыто в $\mathbf{R} \times S$. Обозначим через Ψ отображение $\Psi = \Phi \circ I$, где Φ — отображение (5) из § 8, а I — тождественное отображение множества U в $\mathbf{R} \times M_p$, причем M_p отождествляется с $\mathbf{R}^m$ при помощи базиса $Y_1, \dots, Y_m$. Таким образом, $\Psi(t, X) = \text{Exp } tX$, если $(t, X) \in U$. Тогда Ψ^*g (§ 3, п. 3) есть элемент модуля $\mathfrak{D}_2^0(U)$ и

$$\Psi^*g = \sum_i (\Psi^*\omega^i)^2.$$

Лемма 9.2. *Тензорное поле Ψ^*g на U имеет вид*

$$\Psi^*g = (dt)^2 + \sum_{i=1}^m (\bar{\omega}^i)^2.$$

Доказательство. Для римановой связности мы имеем $\omega_i^l = -\omega_l^i$ и, значит, (в силу формулы (5') из § 8) $\bar{\omega}_l^i = -\bar{\omega}_i^l$.

Действительно, это немедленно следует из соотношения

$$g(\nabla_{Y_i^*}(Y_j^*), Y_k^*) + g(Y_j^*, \nabla_{Y_i^*}(Y_k^*)) = Y_i^* g(Y_j^*, Y_k^*) = 0.$$

Используя (5') из § 8, получаем

$$\Phi^* g = \sum_i (\Phi^* \omega^i)^2 = \sum_i a_i^2 (dt)^2 + \sum_i (\bar{\omega}^i)^2 + 2 \sum_i a_i \bar{\omega}^i dt.$$

Согласно равенству (6) из § 8,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_i a_i \bar{\omega}^i \right) = \sum_i a_i da_i + \sum_{i, k} a_i a_k \bar{\omega}_k^i = \sum_i a_i da_i$$

в силу кососимметричности $\bar{\omega}_k^i$. Далее, $I^* \left(\sum_i a_i da_i \right) = 0$. Но окрестность N_0 является звездной. Значит, для $X \in S$ множество таких $t \in \mathbb{R}$, что $(t, X) \in U$, есть интервал, содержащий $t = 0$. Так как $\bar{\omega}^i = 0$ при $t = 0$, то $I^* \left(\sum_i a_i \bar{\omega}^i \right) = 0$. Далее,

$$I^* \left(\sum_i a_i^2 \right) = 1.$$

Отсюда и из соотношения $\Psi^* = I^* \circ \Phi^*$ следует лемма.

Введем теперь риманову метрику на римановом многообразии M . Пусть $t \mapsto \gamma(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) — отрезок кривой на M . Длина дуги кривой γ определяется формулой

$$L(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))\}^{1/2} dt, \quad (3)$$

из которой ясно, что два отрезка кривой, совпадающие с точностью до замены параметра, имеют одну и ту же длину дуги.

Для риманова многообразия мы будем говорить просто «геодезическая» вместо «отрезок геодезической». Иногда будет также удобно не различать две кривые, совпадающие с точностью до замены параметра.

Лемма 9.3. Пусть M — риманово многообразие и p — некоторая точка в M . Пусть N_0 — нормальная окрестность точки 0 в M_p и $N_p = \text{Exp } N_0$. Для каждой $q \in N_p$ обозначим через γ_{pq} единственную геодезическую в N_p , соединяющую p с q . Тогда

$$L(\gamma_{pq}) < L(\gamma)$$

для любого отрезка кривой $\gamma \neq \gamma_{pq}$ в N_p , соединяющего p с q . Если, в частности, нормальная окрестность N_0 есть открытый шар $0 \leq \|X\| < \delta$ в M_p , то неравенство $L(\gamma_{pq}) < L(\gamma)$ имеет место для любого отрезка кривой $\gamma \neq \gamma_{pq}$ в M , соединяющего p с q .

Доказательство. Пусть $s \rightarrow \gamma(s)$ ($0 \leq s \leq 1$) — любой отрезок кривой в N_p , соединяющий p с q . Для доказательства приведенного выше неравенства можно предположить, что $\gamma(s) \neq p$ для $s \neq 0$. Тогда можно написать $\gamma = \Psi \circ \gamma_0$, где γ_0 — отрезок кривой в $R \times S$,

$$\gamma_0 : s \rightarrow (t(s), X(s)) \quad (0 \leq s \leq 1),$$

такой, что $t(s) > 0$ для $0 < s \leq 1$. Отрезок кривой γ_0 содержится в множестве U , о котором идет речь в лемме 9.2. Мы имеем

$$\dot{\gamma}_0(s) = d\gamma_0 \left(\frac{d}{ds} \right) = \left(\dot{t}(s) \frac{d}{dt}, \dot{X}(s) \right),$$

где через t обозначена координата на R . Следовательно,

$$g(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) = (\Psi^* g)(\dot{\gamma}_0(s), \dot{\gamma}_0(s)) = (\dot{t}(s))^2 + \sum_{i=1}^m (\bar{\omega}^i(\dot{X}(s)))^2. \quad (4)$$

Тогда

$$L(\gamma) = \int_0^1 \left\{ (\dot{t}(s))^2 + \sum_i (\bar{\omega}^i(\dot{X}(s)))^2 \right\}^{1/2} ds \geq \int_0^1 |\dot{t}(s)| ds = L(\gamma_{pq}). \quad (5)$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $\bar{\omega}^i(\dot{X}(s)) = 0$ для всех i и всех s . В силу формулы (5') из § 8, это эквивалентно тому, что $\dot{X}(s) = 0$ или $X(s) = \text{const.}$, откуда $\gamma = \gamma_{pq}$ (с точностью до замены параметра).

Наконец, рассмотрим случай, когда N_0 — открытый шар $0 \leq \|X\| < \delta$ в M_p . Пусть $s \rightarrow \gamma(s)$ — такой отрезок кривой в M , соединяющий p с q , что γ не лежит в N_p . Пусть X_1 — такой элемент в N_0 , что $\text{Exp } X_1 = q$, и пусть δ^* удовлетворяет неравенствам $\|X_1\| < \delta^* < \delta$. Положим

$$N^* = \{\text{Exp } X \mid X \in M_p, \|X\| < \delta^*\}.$$

Пусть s_0 — нижняя грань значений параметра s , для которых $\gamma(s) \in N^*$. Тогда точка $q_0 = \gamma(s_0)$ лежит на границе множества N^* и, в силу первой части доказательства, длина отрезка кривой γ от p до q_0 не меньше δ^* . Поскольку $L(\gamma_{pq}) = \|X_1\|$, отсюда следует, что

$$L(\gamma) > L(\gamma_{pq}).$$

Тем самым лемма доказана.

Теперь мы можем превратить риманово многообразие M в метрическое пространство. Поскольку M связно, каждая пара точек $p, q \in M$ может быть соединена отрезком кривой. Расстояние между точками p и q определяется формулой

$$d(p, q) = \inf_{\gamma} L(\gamma), \quad (6)$$

где γ пробегает всевозможные отрезки кривых, соединяющие p и q . Имеют место следующие свойства:

$$(a) \ d(p, q) = d(q, p),$$

$$(б) \ d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q),$$

$$(в) \ d(p, q) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } p = q.$$

Первые два очевидны, а последнее прямо следует из леммы 9.3. Таким образом, d определяет метрику на множестве M . Для $p \in M$ положим

$$B_r(p) = \{q \in M \mid d(p, q) < r\} \quad (0 \leq r \leq \infty),$$

$$S_r(p) = \{q \in M \mid d(p, q) = r\} \quad (0 \leq r < \infty).$$

Множество $B_r(p)$ называется *открытым шаром* радиуса r с центром p , а $S_r(p)$ — *сферой* радиуса r с центром в p .

Предложение 9.4. Предположим, что открытый шар

$$V_r(0) = \{X \in M_p \mid 0 \leq \|X\| < r\}$$

является нормальной окрестностью точки 0 в M_p . Тогда

$$B_r(p) = \text{Exp } V_r(0).$$

Доказательство. Очевидно, что $\text{Exp } V_r(0) \subset B_r(p)$. С другой стороны, если q — точка в $B_r(p)$, не принадлежащая $\text{Exp } V_r(0)$, то каждый отрезок кривой, соединяющий p с q , должен пересекать границу каждого множества $\text{Exp } V_\rho(0)$ ($\rho < r$). Тогда из леммы 9.3 следует, что $d(p, q) \geq \rho$ для всех $\rho < r$. Отсюда $d(p, q) \geq r$. Это противоречие показывает, что $B_r(p) = \text{Exp } V_r(0)$.

Следствие 9.5. Топология в M , определяемая метрикой d , совпадает с исходной топологией многообразия M .

Действительно, множества $B_r(p)$ ($r > 0$) составляют фундаментальную систему окрестностей точки p в метрической топологии на M . С другой стороны, теорема 6.1 показывает, что в исходной топологии многообразия M множества $\text{Exp } V_r(0)$ ($r > 0$) составляют фундаментальную систему окрестностей точки p .

Предложение 9.6. Каждое риманово многообразие сепарабельно.

Это предложение является частным случаем следующей теоремы П. С. Александрова: *связное локально компактное метрическое пространство сепарабельно*. Простое доказательство этого элементарного результата см. в книге Пфлюгера [1], стр. 22—23.

Определение. В предположениях предложения 9.4 окрестности $B_r(p)$ и $V_r(0)$ называются *сферическими нормальными окрестностями* точки p в M и точки 0 в M_p соответственно.

Предположим, что V — связное подмногообразие риманова многообразия M . Риманова структура на M индуцирует риманову структуру на V . Пусть d_M и d_V — расстояния на M и V , порожденные этими римановыми структурами. Тогда $d_V(p, q) \geq d_M(p, q)$ для каждой пары $p, q \in V$. Примеры показывают, что в общем случае знак равенства не имеет места. Однако в случае, когда V — открытое подмногообразие в M и $p \in V$, знак равенства, в силу предложения 9.4, имеет место, если q достаточно близка к p .

Пусть $B_\delta(p)$ — сферическая нормальная окрестность точки p . Если $r < \delta$, то $S_r(p)$ является образом сферы $\|X\| = r$ в M_p при диффеоморфизме Exp_p . Таким образом, $S_r(p)$ есть подмногообразие в M .

Лемма 9.7. Пусть $r < \delta$. Тогда каждая геодезическая γ , выходящая из p , перпендикулярна к $S_r(p)$ в первой точке пересечения.

Доказательство. Предположим, что геодезическая γ параметризована длиной дуги, измеряемой от точки p , и пусть X — касательный к ней вектор в точке p . Тогда $\|X\| = 1$, и отрезок геодезической γ от p до первой точки пересечения с $S_r(p)$ есть $\gamma(s) = \text{Exp } sX$ ($0 \leq s \leq r$). Пусть Y — касательный вектор к $S_r(p)$ в точке $\gamma(r)$. Тогда существует единственный касательный вектор Y_0 к S в точке X , такой, что $(d\Psi)_{(r, X)}(0, Y_0) = Y$. Тогда, в силу леммы 9.2,

$$g\left(d\gamma_r\left(\frac{d}{ds}\right), Y\right) = (\Psi^*g)\left(\left(\frac{d}{ds}, 0\right), (0, Y_0)\right) = 0.$$

Замечание. В общем случае геодезическая γ может пересекать $S_r(p)$ ($r > \delta$) больше, чем один раз. Эти пересечения не обязательно будут происходить под прямым углом. Примером является всюду плотная геодезическая на плоском двумерном торе (определение слова «плоский» см. в § 6 гл. V).

Лемма 9.8. Пусть M — риманово многообразие с метрикой d , заданной формулой (6). Пусть p и q — две точки в M и γ_{pq} — отрезок кривой, соединяющий p и q . Если $L(\gamma_{pq}) = d(p, q)$, то γ_{pq} — геодезическая.

Доказательство. Существует такая конечная последовательность точек $r_0, r_1, \dots, r_n$ (где $r_0 = p, r_n = q$) на γ_{pq} , что каждый отрезок $\gamma_{r_i r_{i+1}}$ лежит в сферической нормальной окрестности $B_{\delta_i}(r_i)$ (см. теорему 6.2). Тогда

$$\sum_{i=0}^{n-1} L(\gamma_{r_i r_{i+1}}) = L(\gamma_{pq}), \quad d(p, q) \leq \sum_{i=0}^{n-1} d(r_i, r_{i+1}).$$

и $d(r_i, r_{i+1}) \leq L(\gamma_{r_i r_{i+1}})$. Если теперь предположить, что $L(\gamma_{pq}) = d(p, q)$, то получим, что

$$d(r_i, r_{i+1}) = L(\gamma_{r_i r_{i+1}}).$$

Согласно лемме 9.3, $\gamma_{r_i r_{i+1}}$ — геодезическая, и лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Утверждение леммы остается справедливым и в том случае, когда кривая γ_{pq} предполагается только кусочно-дифференцируемой.

Мы часто будем пользоваться следующим результатом, который получается путем комбинации лемм 6.4 и 9.3.

Т е о р е м а 9.9. Пусть M — риманово многообразие с метрикой d . Каждой точке $p \in M$ соответствует такое число $r(p) > 0$, что если $0 < \rho \leq r(p)$, то шар $B_\rho(p)$ обладает следующими свойствами:

(А) $B_\rho(p)$ является нормальной окрестностью каждой из своих точек.

(Б) Пусть $a, b \in B_\rho(p)$, и пусть γ_{ab} — единственная геодезическая в $B_\rho(p)$, соединяющая a и b . Тогда γ_{ab} — единственный отрезок кривой в M , имеющий длину $d(a, b)$ и соединяющий a и b .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X_1, \dots, X_m$ — ортонормированный базис пространства M_p , и пусть $x_1, \dots, x_m$ — нормальные координаты в точке p по отношению к этому базису, введенные в окрестности U точки p . Если $\delta > 0$ достаточно мало, то

$$B_\delta(p) = \{q \in U \mid \sum_{i=1}^m x_i(q)^2 < \delta^2\}.$$

Используя лемму 6.4, заключаем, что существует такое число $\delta^* > 0$, что $B_\delta(q)$ является нормальной окрестностью каждой из своих точек, если $0 < \delta \leq \delta^*$. Положим $r(p) = \frac{1}{4} \delta^*$. Если $0 < \rho \leq r(p)$, то окрестность $B_\rho(p)$, очевидно, обладает свойством (А). Она обладает также и свойством (Б). Действительно, поскольку $B_{\delta^*}(p)$ есть нормальная окрестность точки a , геодезическая γ_{ab} является единственным кратчайшим отрезком кривой в $B_{\delta^*}(p)$, соединяющим a и b . С другой стороны, отрезок кривой, который соединяет a и b , но не лежит полностью в $B_{\delta^*}(p)$, имеет, очевидно, длину больше 3ρ . Поскольку $L(\gamma_{ab}) \leq d(a, p) + d(p, b) \leq 2\rho$, свойство (Б) также проверено.

О п р е д е л е н и е. Шар $B_\rho(p)$, являющийся нормальной окрестностью каждой из своих точек, будет называться *выпуклым нормальным шаром*. Шар будет называться *минимизирующим*, если он обладает также указанным выше свойством (Б).

Замечание. Легко показать на примерах, что выпуклый нормальный шар не обязан быть минимизирующим.

Предложение 9.10. Пусть, в обозначениях теоремы 9.9, A и B — единственные точки в M_p , удовлетворяющие соотношениям

$$\text{Exp}_p(A) = a, \quad \text{Exp}_p(B) = b, \quad \|A\| < r(p), \quad \|B\| < r(p).$$

Тогда

$$\frac{\|A - B\|}{d(a, b)} \rightarrow 1,$$

если $(a, b) \rightarrow (p, p)$.

Доказательство. Мы можем предположить, что отрезок прямой, соединяющий A и B , не проходит через начало координат. Рассмотрим теперь уравнения (6) и (7) из § 8. Формы $\bar{\omega}^i - t da_i$ и $\bar{\omega}_i$ и их первые производные по t все равны нулю при $t = 0$. Используя формулу Тейлора с остаточным членом, получаем:

$$\bar{\omega}^i = t da_i + t^2 \theta^i, \quad \bar{\omega}_i = t^2 \theta_i,$$

где θ^i и θ_i — некоторые 1-формы. Пусть теперь $\Gamma: s \rightarrow \Gamma(s)$ ($0 \leq s \leq 1$) — некоторый отрезок кривой в $B_{r(p)}(p)$, соединяющий a и b и не проходящий через p . Пусть Γ_0 — отрезок кривой в шаре $\|X\| < r(p)$ в M_p , соединяющий A и B и такой, что $\Gamma = \text{Exp} \circ \Gamma_0$. Тогда $\Gamma_0(s)$ можно записать в виде

$$\Gamma_0(s) = t(s) X(s), \quad (0 \leq s \leq 1),$$

где $t(s) > 0$ для всех s и $s \rightarrow X(s)$ — отрезок кривой на S . Тогда мы имеем, как и раньше,

$$q(\dot{\Gamma}(s), \dot{\Gamma}(s)) = \dot{t}(s)^2 + \sum_{i=1}^m (\bar{\omega}^i(\dot{X}(s)))^2$$

и

$$L(\Gamma) = \int_0^1 \left\{ \dot{t}(s)^2 + t(s)^2 \sum_i [da_i(\dot{X}(s)) + t(s) \theta^i(\dot{X}(s))]^2 \right\}^{1/2} ds. \quad (7)$$

Для риманова многообразия M_p имеем $R = 0$ и $\bar{\omega}^i = t da_i$. Отсюда

$$L(\Gamma_0) = \int_0^1 \left\{ \dot{t}(s)^2 + t(s)^2 \sum_i (da_i(\dot{X}(s)))^2 \right\}^{1/2} ds. \quad (8)$$

Если Γ_0 — отрезок прямой, соединяющий A и B , то $t(s) \rightarrow 0$ равномерно по s , когда $(a, b) \rightarrow (p, p)$. Из формул (7) и (8) следует, что

$$\lim_{(a, b) \rightarrow (p, p)} \frac{L(\Gamma_0)}{L(\Gamma)} = 1.$$

По той же причине это соотношение справедливо для кривой γ_{ab} , единственной геодезической в $B_{r(p)}(p)$, соединяющей a и b , и для γ_{AB} , соответствующего отрезка кривой в шаре $\|X\| < r(p)$. Другими словами,

$$\lim_{(a, b) \rightarrow (p, p)} \frac{L(\gamma_{AB})}{L(\gamma_{ab})} = 1. \quad (10)$$

Но $L(\gamma_{AB}) \geq L(\Gamma_0)$ и $L(\Gamma) \geq L(\gamma_{ab})$, так что

$$\frac{L(\gamma_{AB})}{L(\gamma_{ab})} \geq \frac{L(\Gamma_0)}{L(\gamma_{ab})} \geq \frac{L(\Gamma_0)}{L(\Gamma)}.$$

Поскольку $L(\Gamma_0) = \|A - B\|$ и $L(\gamma_{ab}) = d(a, b)$, предложение следует из соотношений (9) и (10).

§ 10. Полные римановы многообразия

Определение. Риманово многообразие M называется *полным*, если каждая последовательность Коши¹⁾ в M сходится.

Лемма 10.1. Для каждой точки p_0 риманова многообразия M существует выпуклый нормальный шар $B_r(p_0)$ с центром в p_0 , обладающий таким свойством. Пусть p и q — две точки в $B_r(p_0)$, γ — единственная геодезическая в $B_r(p_0)$, соединяющая p и q . Пусть $L(\gamma)$ — длина геодезической γ . Пусть Y и Z — единичные касательные векторы к γ в точках p и q соответственно.

Тогда:

- (i) если пара (p', Y') достаточно близка к (p, Y) и Y' — единичный вектор в $M_{p'}$, то в $B_r(p_0)$ существует геодезическая длины $L(\gamma)$, выходящая из точки p' с касательным вектором Y' ;
- (ii) пара (q, Z) дифференцируемым образом зависит от p , Y и $L(\gamma)$.

Эта лемма прямо следует из теоремы существования и единственности, сформулированной в начале § 6.

Лемма 10.2. Пусть p — точка в римановом многообразии M и $\gamma_n(t)$ ($t \in I_n$) — последовательность геодезических, выходящих из точки p , где t — длина дуги, измеряемая от точки p . Пусть X_n — касательный вектор к γ_n в точке p , и пусть последовательность (X_n) сходится к некоторому $X \in M_p$. Обозначим через $\gamma_X(t)$ ($t \in I$) максимальную геодезическую, касательную к X , такую, что $\gamma_X(0) = p$. Пусть $t^* \in I$ — предел $t^* = \lim t_n$, где $t_n \in I_n$. Тогда $\gamma_X(t^*) = \lim_n \gamma_n(t_n)$.

¹⁾ Последовательность (x_n) в метрическом пространстве с метрикой d называется последовательностью Коши, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое целое N , что $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $n, m > N$.

Действительно, отрезок $\gamma_X(t)$ ($0 \leq t \leq t^*$) можно разбить на конечное число отрезков, каждый из которых лежит в выпуклом нормальном шаре B_i , обладающем свойством, сформулированным в лемме 10.1. Из первой части леммы 10.1 следует, что для достаточно больших n все $\gamma_n(t)$ ($0 \leq t \leq t_n$) лежат в объединении шаров B_i . Теперь для доказательства леммы 10.2 нужно несколько раз применить вторую часть леммы 10.1.

Важность условия полноты отчетливо видна из следующих двух теорем.

Теорема 10.3. Пусть M — риманово многообразие. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) M полно;
- (ii) каждое ограниченное замкнутое подмножество в M компактно;
- (iii) каждая максимальная геодезическая в M имеет вид $\gamma_X(t)$ ($-\infty < t < \infty$) («имеет бесконечную длину»).

Теорема 10.4. В полном римановом многообразии M с метрикой d каждая пара точек $p, q \in M$ может быть соединена геодезической длины $d(p, q)$.

Эти две теоремы будут доказаны одновременно.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Пусть $\gamma_X(t)$ ($t \in I$) — максимальная геодезическая в M , где $|t|$ — длина дуги, измеряемая от точки приложения вектора X . Если t_0 — граничная точка (открытого) интервала I , например, правая, то выберем последовательность $(t_n) \subset I$, сходящуюся к t_0 . Тогда $(\gamma_X(t_n))$ есть последовательность Коши в M и, значит, сходится к пределу $p \in M$, который, очевидно, не зависит от выбора последовательности (t_n) . Пусть $B_\rho(p)$ — выпуклый нормальный шар с центром в p , и пусть $\{x_1, \dots, x_m\}$ — система нормальных координат в точке p , действующая в $B_\rho(p)$. Пусть $J = \{t \in I \mid \gamma_X(t) \in B_\rho(p)\}$. Положим $x_i(t) = x_i(\gamma_X(t))$ ($t \in J$) и $x_i(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t)$ (мы знаем, что этот предел существует).

Мы имеем

$$\ddot{x}_i(t) + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \dot{x}_j(t) \dot{x}_k(t) = 0 \quad (1)$$

для $t \in J$. Функции $\dot{x}_i(t)$ ограничены ($\sum_i \dot{x}_i(t)^2 \equiv 1$), а дифференциальное уравнение показывает ограниченность функций $\ddot{x}_i(t)$. В частности, $\ddot{x}_i(t)$ равномерно непрерывна в окрестности точки t_0 и поэтому имеет предел при $t \rightarrow t_0$. По теореме о среднем значении

$$(x_i(t) - x_i(t_0))/(t - t_0) = \dot{x}_i(t_0 + \theta(t - t_0)) \quad (0 \leq \theta \leq 1),$$

откуда для левой производной $\dot{x}_i(t_0)$ получаем, что

$$\dot{x}_i(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \dot{x}_i(t) \quad (1 \leq i \leq m). \quad (2)$$

Из дифференциального уравнения (1) следует существование предела $\lim_{t \rightarrow t_0} \ddot{x}_i(t)$. При помощи теоремы о среднем значении снова получаем для левой производной выражение

$$\ddot{x}_i(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \ddot{x}_i(t). \quad (3)$$

Вектор $Z = (\dot{x}_1(t_0), \dots, \dot{x}_m(t_0))$ в касательном пространстве M_p имеет длину 1, и мы можем рассмотреть геодезическую $\gamma_Z(t)$ для $t_0 \leq t < t_0 + \varrho$. Отображение $t \rightarrow \Gamma(t)$, где

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \gamma_X(t) & (t \in I), \\ \gamma_Z(t) & (t_0 \leq t < t_0 + \varrho), \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению (1) для $t \in I$ и для $t_0 < t < t_0 + \varrho$. Более того, (1) удовлетворяется для *правых производных* в точке $t = t_0$. Уравнения (2) и (3) показывают, что (1) удовлетворяется также для *левых производных* в точке $t = t_0$. Таким образом, $\Gamma(t)$ — геодезическая, что противоречит максимальной геодезической $\gamma_X(t)$ ($t \in I$).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Пусть (x_n) — последовательность Коши в многообразии M . Замыкание множества (x_n) ограничено и, значит, в силу утверждения (ii), компакно. Поэтому некоторая подпоследовательность последовательности (x_n) сходится. Будучи последовательностью Коши, последовательность (x_n) сама сходится.

Используя рассуждение де Рама [1], мы докажем теперь, что при выполнении условия (iii) каждую пару точек $p, q \in M$ можно соединить геодезической длины $d(p, q)$. Для каждого $r \geq 0$ обозначим через $\bar{B}_r$ замыкание открытого шара $B_r(p)$ и через E_r — множество точек $x \in \bar{B}_r$, которые могут быть соединены с точкой p геодезическими длины $d(p, x)$. Достаточно доказать, что

$$E_r = \bar{B}_r \quad (4)$$

для каждого $r \geq 0$. В силу леммы 10.2, из условия (iii) следует сепарабельность многообразия M и компактность множества E_r . Соотношение (4) справедливо для $r = 0$, и из его справедливости для $r = r_0 > 0$, очевидно, вытекает его справедливость для $r < r_0$. С другой стороны, если (4) имеет место для всех $r < r_0$, то оно верно также для $r = r_0$. Действительно, каждая точка $x \in \bar{B}_{r_0}$ есть предел последовательности точек x_n , расстояние которых от точки p меньше, чем r_0 . Таким образом, $x_n \in E_{r_0}$ и $x \in E_{r_0}$, так как мно-

жество E_{r_0} замкнуто. Итак, достаточно доказать, что если формула (4) справедлива для $r = R$, то она справедлива и для некоторого большего значения $r = R + \varrho$. При доказательстве мы можем предположить, что $B_R \neq M$.

В силу компактности множества $E_R = \overline{B}_R$, существуют такие конечные наборы точек $x_1, \dots, x_N \in E_R$ и положительных чисел $\varrho_1, \dots, \varrho_N$, что шары $B_{\varrho_i}(x_i)$ ($1 \leq i \leq N$) покрывают E_R и что каждый шар $B_{2\varrho_i}(x_i)$ есть относительно компактный минимизирующий выпуклый нормальный шар. Поскольку множество $\bigcup_{i=1}^N B_{\varrho_i}(x_i)$ относительно компактно, в его дополнении существует точка, находящаяся на кратчайшем расстоянии от точки p . Так как это расстояние больше R , то существует такое число ϱ , что $0 < \varrho < \min(\varrho_1, \dots, \varrho_N)$ и что $\overline{B}_{R+\varrho} \subset \bigcup_{i=1}^N B_{\varrho_i}(x_i)$.

Пусть теперь y — такая точка в M , что $R < d(p, y) \leq R + \varrho$. Пусть x — точка на (компактной) сфере $S_R(p)$, находящаяся на кратчайшем расстоянии от y . Поскольку каждый отрезок кривой, соединяющий p и y , должен пересекать $S_R(p)$, то

$$d(p, x) + d(x, y) = d(p, y).$$

Следовательно, $d(x, y) = d(p, y) - d(p, x) \leq R + \varrho - R = \varrho$, так что y и x лежат в одном и том же шаре $B_{2\varrho_i}(x_i)$. Взяв кратчайшую кривую, соединяющую x и y , вместе с кривой кратчайшей длины, соединяющей p и x , мы получим кривую длины $d(p, y)$, соединяющую p и y . По лемме 9.8 эта кривая является геодезической, так что (4) доказано для всех $r \geq 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Пусть S — ограниченное замкнутое подмножество в M . Пусть (q_n) — некоторая последовательность точек в подмножестве S и p — фиксированная точка в M . Мы знаем, что M сепарабельно и что существует геодезическая γ_n длины $d(p, q_n)$, соединяющая p и q_n . Перейдя в случае надобности к подпоследовательности, мы можем предположить, что единичные касательные векторы к геодезическим γ_n в точке p образуют сходящуюся последовательность и что последовательность $(d(p, q_n))$ сходится. Теперь лемма 10.2 показывает, что (iii) $\Rightarrow$ (ii). Тем самым доказательство теорем 10.3 и 10.4 закончено.

Замечание. Назовем риманово многообразие M *полным в точке* $p \in M$, если Exp_p определено во всем пространстве M_p . Тогда из приведенного выше доказательства видно, что полнота в единственной точке $p \in M$ влечет за собой полноту многообразия M .

Предложение 10.5. Для каждой точки p в полном римановом многообразии M экспоненциальное отображение Exp_p

является дифференцируемым отображением пространства M_p на M . Если M аналитично, то отображение Exp_p аналитично.

Доказательство. Лемма 10.2 выражает непрерывность отображения Exp_p . Дифференцируемость доказывается таким же способом с применением леммы 10.1, так как мы теперь знаем, что отображение Exp_p определено на всем M_p . Если многообразие M аналитично, то заметим, прежде всего, что теорема существования и единственности из § 6 справедлива также для аналитического случая, причем получаются аналитические решения. Поэтому можно заменить в лемме 10.1 слова «дифференцируемым образом» на «аналитически» и дальше действовать так же, как раньше.

Определение. Пусть M — полное риманово многообразие, p — точка в M и Exp — экспоненциальное отображение в точке p . Пусть $C(p)$ — множество векторов $X \in M_p$, для которых линейное отображение $d\text{Exp}_X$ является вырожденным. Точка многообразия M (или пространства M_p) называется сопряженной точке p , если она лежит в $\text{Exp} C(p)$ (или в $C(p)$).

В силу предложения 10.5, множество $C(p)$ является замкнутым в M_p . Оно играет важную роль в глобальной дифференциальной геометрии. Вообще говоря, $\text{Exp} C(p)$ не является подмногообразием в M . Для сферы S^2 множество $\text{Exp} C(p)$ состоит из двух противоположных точек. В гл. VII будет доказано неравенство

$$\dim(\text{Exp} C(p)) \leq \dim M - 2,$$

имеющее место для симметрического пространства компактного типа, где $\dim$ обозначает топологическую размерность. Это неравенство, однако, несправедливо для римановых многообразий общего вида.

Пусть M и N — связные топологические пространства и π — непрерывное отображение пространства M в N . Пара (M, π) называется *накрывающим пространством* пространства N , если каждая точка $n \in N$ имеет такую открытую окрестность U , что π гомеоморфно отображает каждую компоненту множества $\pi^{-1}(U)$ на U .

Предположим, что N — дифференцируемое многообразие и что (M, π) — накрывающее пространство пространства N . Тогда на пространстве M существует единственная дифференцируемая структура, такая, что отображение π регулярно. Если на M задана эта дифференцируемая структура, то мы говорим, что (M, π) — *накрывающее многообразие* многообразия N .

Нам потребуется следующая стандартная теорема из теории накрывающих пространств. Мы сформулируем ее только для мно-

гообразий, хотя она справедлива уже при некоторых предположениях о локальной связности¹⁾.

Пусть (M, π) — накрывающее многообразие многообразия N , и пусть $\Gamma: [a, b] \rightarrow N$ — путь в N . Если t — точка в M , такая, что $\pi(t) = \Gamma(a)$, то существует единственный путь $\Gamma^*: [a, b] \rightarrow M$, для которого $\Gamma^*(a) = t$ и $\pi \circ \Gamma^* = \Gamma$.

Путь Γ^* называется накрывающим путем для пути Γ , проходящим через точку t .

Предложение 10.6. Пусть N — риманово многообразие с римановой структурой g . Пусть (M, π) — накрывающее многообразие многообразия N . Тогда π^*g является римановой структурой на M . Далее, M полно тогда и только тогда, когда N полно.

Доказательство. Отображение π регулярно, так что π^*g , очевидно, является римановой структурой на M . Если γ — отрезок кривой в M , то $\pi \circ \gamma$ есть отрезок кривой в N . Если использовать характеризацию геодезических при помощи дифференциальных уравнений (3) (см. § 5), то ясно, что γ является геодезической тогда и только тогда, когда $\pi \circ \gamma$ — геодезическая. Но полнота эквивалентна бесконечности каждой максимальной геодезической. Отсюда сразу следует предложение.

Замечание. Пусть N — риманово многообразие, (M, π) — накрывающее многообразие многообразия N , причем на M рассматривается риманова структура, индуцированная отображением π . Если задана точка $a \in N$, то существует такой выпуклый минимизирующий нормальный шар $B_r(a)$, что π диффеоморфно отображает каждую компоненту V множества $\pi^{-1}(B_r(a))$ на $B_r(a)$. Поскольку геодезические соответствуют друг другу при отображении π , то π отображает V на $B_r(a)$ с сохранением расстояний.

Определение. Геодезическая $\gamma(t)$ ($0 \leq t < \infty$) в римановом многообразии называется *лучом*, если она реализует кратчайшее расстояние между любыми двумя своими точками. Точка $\gamma(0)$ называется *начальной точкой* луча.

Предложение 10.7. Пусть o — точка в полном некомпактном римановом многообразии M . Тогда M содержит луч с начальной точкой o .

Из теоремы 10.3 следует, что M не ограничено. Пусть (p_n) — такая последовательность в M , что $d(o, p_n) \rightarrow \infty$. Пусть γ_n — геодезическая длины $d(o, p_n)$, соединяющая o и p_n . Параметри-

¹⁾ См. Понтрягин [1], стр. 352. — Прим. перев.

зуем γ_n длиной дуги, измеряемой от точки o . Пусть X_n — единичный касательный вектор к γ_n в точке o . Можно предположить, что последовательность (X_n) сходится к пределу $X \in M_o$. Тогда геодезическая $t \rightarrow \gamma_X(t)$ ($0 \leq t < \infty$) является лучом. Действительно, пусть $t_0 \geq 0$. Существует такое целое число N , что $d(o, p_n) > t_0$ для $n \geq N$. Из леммы 10.2 вытекает, что

$$\lim_{n \geq N, n \rightarrow \infty} \gamma_n(t_0) = \gamma_X(t_0)$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \geq N, n \rightarrow \infty} d(o, \gamma_n(t_0)) = d(o, \gamma_X(t_0)).$$

С другой стороны, $t_0 = d(o, \gamma_n(t_0))$ для $n \geq N$. Поэтому из последнего соотношения следует, что $t_0 = d(o, \gamma_X(t_0))$. Отсюда вытекает, что $d(\gamma_X(t_1), \gamma_X(t_0)) = t_0 - t_1$ для $0 \leq t_1 \leq t_0$, и предложение доказано.

§ 11. Изометрии

Определение. Пусть M и N — два многообразия класса C^∞ с псевдоримановыми структурами g и h соответственно. Пусть φ — отображение многообразия M в N .

(i) Отображение φ называется *изометрией*, если φ диффеоморфно отображает M на N и $\varphi^*h = g$.

(ii) Отображение φ называется *локальной изометрией*, если для каждой точки $p \in M$ существуют такие открытые окрестности U точки p и V точки $\varphi(p)$, что φ является изометрией многообразия U на V .

Очевидно, что если φ — изометрия риманова многообразия M на себя, то φ сохраняет расстояния, т. е. $d(\varphi(p), \varphi(q)) = d(p, q)$ для $p, q \in M$. С другой стороны, справедлива

Теорема 11.1. Пусть M — риманово многообразие и φ — отображение многообразия M на себя, сохраняющее расстояния. Тогда φ является изометрией.

Доказательство. Пусть p — произвольная точка из M , и пусть $q = \varphi(p)$. Обозначим через $B_r(p)$ и $B_r(q)$ сферические нормальные окрестности точек $p \in M$ и $q \in M$ соответственно. Тогда φ взаимно однозначно отображает $B_r(p)$ на $B_r(q)$. Для каждого вектора $X \in M_p$ рассмотрим геодезическую $\text{Exp } tX$ $\left(-\frac{r}{\|X\|} < t < \frac{r}{\|X\|}\right)$. Образ $\Gamma(t) = \varphi(\text{Exp } tX)$ лежит в $B_r(q)$ и обладает тем свойством, что $d(\Gamma(t), \Gamma(t')) = |t - t'| \|X\|$ для всех t, t' в данном интервале. Для доказательства того, что Γ — геодезическая, рассмотрим точку $q = \Gamma(0)$ и произвольную

точку Q на Γ . Их можно соединить единственной геодезической γ длины $d(q, Q)$. Пусть $B_R(Q)$ — сферическая нормальная окрестность точки Q , и пусть m — произвольная точка кривой Γ , лежащая между q и Q и такая, что $m \in B_R(Q)$. Тогда $d(q, m) + d(m, Q) = d(q, Q)$. Если мы соединим q и m кратчайшей геодезической, а потом соединим m и Q кратчайшей геодезической, то получится ломаная кривая длины $d(q, Q)$, соединяющая q и Q . Эта кривая должна совпадать с γ , в силу леммы 9.8 (и следующего за ней замечания). Поскольку Q была произвольной точкой кривой Γ , тем самым доказано, что Γ — геодезическая. В частности, кривая Γ дифференцируема. Пусть X' — касательный вектор к Γ в точке q . Мы получили отображение $X \rightarrow X'$ пространства M_p в M_q . Обозначив это отображение через φ' , имеем равенства $\|X\| = \|\varphi'(X)\|$ и $\varphi'(\alpha X) = \alpha \varphi'(X)$ ($\alpha \in \mathbf{R}$, $X \in M_p$). Пусть $A, B \in M_p$. Выберем ϱ так, чтобы $\|\varrho A\|$ и $\|\varrho B\|$ были меньше r . Положим $a_t = \text{Exp } tA$, $b_t = \text{Exp } tB$ для $0 \leq t \leq \varrho$. Тогда из предложения 9.10 следует, что

$$\begin{aligned} \frac{2g_p(A, B)}{\|A\| \|B\|} &= \frac{\|A\|^2 + \|B\|^2}{\|A\| \|B\|} - \frac{\|tA - tB\|^2}{\|tA\| \|tB\|} = \\ &= \frac{\|A\|^2 + \|B\|^2}{\|A\| \|B\|} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(a_t, b_t)^2}{\|tA\| \|tB\|}. \end{aligned}$$

Поскольку правая часть этого равенства сохраняется при отображении φ , мы получаем, что

$$g_p(A, B) = g_q(\varphi' A, \varphi' B).$$

Но вектор $A + B$ полностью определяется величинами $\|A\|$, $\|B\|$ и $g_p(A, B)$, которые все сохраняются при отображении φ' . Отсюда следует, что $\varphi'(A + B) = \varphi'(A) + \varphi'(B)$. Вместе с указанными раньше свойствами отображения φ' это показывает, что φ' диффеоморфно отображает M_p на M_q . В окрестности $B_r(p)$

$$\varphi = \text{Exp}_q \circ \varphi' \circ \text{Exp}_p^{-1}, \quad (1)$$

откуда следует теорема.

Лемма 11.2. Пусть M — риманово многообразие, φ и ψ — две изометрии многообразия M на себя. Предположим, что существует точка $p \in M$, для которой $\varphi(p) = \psi(p)$ и $d\varphi_p = d\psi_p$. Тогда $\varphi = \psi$.

Доказательство. Рассматривая отображение $\varphi \circ \psi^{-1}$, мы можем, очевидно, предположить, что $\varphi(p) = p$ и что $d\varphi_p$ — тождественное отображение. Тогда очевидно, что все точки в произвольной нормальной окрестности точки p остаются неподвижными при отображении φ . Поскольку M связно, каждая точка $q \in M$ может быть соединена с p цепочкой перекрывающихся нормальных окрестностей. Отсюда следует, что $\varphi(q) = q$.

Пусть M и N — римановы многообразия, U_i — область в M ($i = 1, 2$) и φ_i — изометрия многообразия U_i на область в N ($i = 1, 2$). Из леммы 11.2 следует, что если $(d\varphi_1)_p = (d\varphi_2)_p$ и $\varphi_1(p) = \varphi_2(p)$ для некоторой точки $p \in U_1 \cap U_2$, то φ_1 и φ_2 совпадают на компоненте точки p в множестве $U_1 \cap U_2$. Изометрии φ_1 и φ_2 называются *непосредственными продолжениями* друг друга, если $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ и $\varphi_1 = \varphi_2$ на $U_1 \cap U_2$.

Пусть φ — изометрия области $U \subset M$ на некоторую область в N . Пусть $\gamma(t)$, $(0 \leq t \leq 1)$ — такая непрерывная кривая в M , что $\gamma(0) \in U$. Изометрия φ называется *продолжаемой вдоль γ* , если для каждого t ($0 \leq t \leq 1$) существует такая изометрия φ_t области U_t , содержащей $\gamma(t)$, на некоторое открытое подмножество в N , что $\varphi_0 = \varphi$ и $U_0 = U$ и что φ_t и $\varphi_{t'}$ являются непосредственными продолжениями друг друга, если $|t - t'|$ достаточно мало. Семейство φ_t ($0 \leq t \leq 1$) называется *продолжением изометрии φ вдоль γ* . Доказывается, что дифференциал $(d\varphi_t)_{\gamma(t)}$, а также $\varphi_t(\gamma(t))$, непрерывно зависит от t . Пусть теперь ψ_t ($0 \leq t \leq 1$) — другое продолжение изометрии φ вдоль кривой γ и V_t — область определения отображения ψ_t . Из предыдущих замечаний следует, что множество таких t , для которых $\varphi_t(\gamma(t)) = \psi_t(\gamma(t))$ и $(d\varphi_t)_{\gamma(t)} = (d\psi_t)_{\gamma(t)}$, является открытым и замкнутым подмножеством единичного отрезка и содержит $t = 0$. Значит, для каждого t отображения φ_t и ψ_t совпадают в компоненте точки $\gamma(t)$ в $U_t \cap V_t$. Грубо говоря, мы можем сказать по аналогии с аналитическим продолжением голоморфных функций: продолжение изометрии вдоль кривой является единственным, если оно возможно.

Предложение 11.3. Пусть M и N — аналитические и полные римановы многообразия, φ — изометрия области $U \subset M$ на некоторую область в N . Пусть $\gamma(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) — такая непрерывная кривая в M , что $\gamma(0) \in U$. Тогда изометрия φ продолжаема вдоль γ .

Доказательство. Пусть $p \in M$, $q \in N$, и пусть $B_r(p)$ и $B_\rho(q)$ — сферические нормальные окрестности точек p и q соответственно. Предположим, что $r < \rho$, и пусть ψ — такая изометрия области $B_r(p)$ в N , что $\psi(p) = q$. Тогда ψ можно единственным образом продолжить до изометрии ψ' области $B_\rho(p)$ на $B_\rho(q)$. Чтобы доказать это, заметим сначала, что выражение изометрии ψ в нормальных координатах в точках p и $\psi(p)$ является линейным отображением, которое можно использовать для определения изометрии ψ' . Если g и h — метрические тензоры на многообразиях M и N соответственно и если X и Y — аналитические векторные поля на $B_\rho(p)$, то $h(X\psi', Y\psi') \circ \psi' = g(X, Y)$ на $B_r(p)$, по предположению. Это соотношение имеет место также на $B_\rho(p)$, в силу аналитичности отображения ψ' (см. лемму 4.3 гл. VI). Значит, ψ' — изометрия.

Без ограничения общности можно предположить, что кривая $\gamma(t)$ дифференцируема. Пусть s^* — верхняя грань таких значений параметра s , что вдоль кривой $\gamma(t)$ ($0 \leq t \leq s$) существует продолжение φ_t изометрии φ . Положим $p_t = \gamma(t)$ для $0 \leq t \leq 1$ и $q_t = \varphi_t(p_t)$ для $0 \leq t < s^*$. Из предположения полноты следует, что существует предел $q^* = \lim_{t \rightarrow s^*} \varphi_t(p_t)$. Выберем такое $\rho > 0$, чтобы $B_{3\rho}(p_{s^*})$ и $B_{3\rho}(q^*)$ были выпуклыми нормальными шарами. Выберем такое $s' < s^*$, чтобы

$$p_t \in B_\rho(p_{s^*}), \quad q_t \in B_\rho(q^*) \quad \text{для } s' \leq t < s^*.$$

Тогда $B_{2\rho}(p_{s'})$ и $B_{2\rho}(q_{s'})$ — нормальные окрестности точек $p_{s'}$ и $q_{s'}$ соответственно. Как показано выше, $\varphi_{s'}$ можно продолжить до изометрии области $B_{2\rho}(p_{s'})$ на $B_{2\rho}(q_{s'})$. Поскольку $p^* \in B_{2\rho}(p_{s'})$, отсюда видно, что $s^* = 1$ и что φ обладает продолжением вдоль кривой γ .

Предложение 11.4. *Допустим, что выполняются предположения предложения 11.3, и рассмотрим в M непрерывную кривую $\delta(t)$ ($0 \leq t \leq 1$), гомотопную кривой γ . Пусть φ_t и ψ_t ($0 \leq t \leq 1$) — продолжения изометрии φ вдоль кривых γ и δ соответственно. Тогда φ_1 и ψ_1 совпадают в некоторой окрестности точки $\gamma(1) = \delta(1)$.*

Доказательство. Поскольку γ и δ гомотопны, существует такое непрерывное отображение α замкнутого единичного квадрата в M , что

$$\alpha(0, t) = \gamma(t) \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$\alpha(1, t) = \delta(t) \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$\alpha(s, 0) = \gamma(0), \quad \alpha(s, 1) = \gamma(1) \quad \text{для всех } 0 \leq s \leq 1.$$

Для фиксированного s обозначим через α^s непрерывную кривую $t \rightarrow \alpha(s, t)$ ($0 \leq t \leq 1$) и через φ_t^s ($0 \leq t \leq 1$) — продолжение изометрии φ вдоль α^s . Пусть σ — верхняя грань таких значений s^* , что для каждого s , удовлетворяющего условию $0 \leq s \leq s^*$, φ_1^s совпадает с φ_1 в некоторой окрестности точки $\gamma(1)$. Рассмотрим теперь непрерывную кривую α^σ . Отображение $t \rightarrow \varphi_t^\sigma(\alpha^\sigma(t))$ также является непрерывной кривой. Значит, существует такое $r > 0$, что для каждого t ($0 \leq t \leq 1$) шары $B_{2r}(\alpha^\sigma(t))$ и $B_{2r}(\varphi_t^\sigma(\alpha^\sigma(t)))$ являются нормальными окрестностями своих центров. Далее, существует такое $\varepsilon > 0$, что $d(\alpha^\sigma(t), \alpha^s(t)) < r$ для $0 \leq t \leq 1$ и $|\sigma - s| < \varepsilon$. Для таких s семейство φ_t^σ дает продолжение изометрии φ вдоль α^s . Но, как было замечено раньше, продолжение изометрии вдоль данной кривой является единственным. Отсюда следует, что при $|\sigma - s| < \varepsilon$ изометрии φ_1^σ и φ_1^s совпадают в не-

которой окрестности точки $\gamma(1)$. Это показывает, во-первых, что $\sigma = 1$, и во-вторых, что φ_1^1 и φ_1^s совпадают в некоторой окрестности точки $\gamma(1)$ при $0 \leq s \leq 1$. Тем самым предложение доказано.

§ 12. Кривизна в двумерном направлении

В этом параграфе мы изложим классическую геометрическую интерпретацию тензора кривизны для риманова многообразия.

Пусть F — риманово многообразие размерности 2, и пусть p — точка в F . Пусть $V_r(0)$ — открытый шар с центром 0 и радиусом r в касательной плоскости F_p . Предположим, что r так мало, что Exp_p диффеоморфно отображает $V_r(0)$ на открытый шар $B_r(p)$. Обозначим через $A_0(r)$ и $A(r)$ (двумерные) площади областей $V_r(0)$ и $B_r(p)$ соответственно.

Определение. Кривизной¹⁾ многообразия F в точке p называется предел

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} 12 \frac{A_0(r) - A(r)}{r^2 A_0(r)}.$$

Существование этого предела вытекает из следующей леммы, которая в то же время облегчает вычисление кривизны K .

Лемма 12.1. Обозначим через f «производную Радона — Никодима» отображения Exp_p в $V_r(0)$. Тогда

$$K = -\frac{3}{2} [\Delta f](0),$$

где Δ — оператор Лапласа в евклидовом пространстве F_p , т. е. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, причем x_1 и x_2 — координаты относительно некоторого ортонормированного базиса.

Доказательство. Производная $f(X)$ определяется формулой $\text{Exp}_p^*(dq) = f dX$, где dq и dX — элементы площади (гл. VIII, § 2) в $B_r(p)$ и $V_r(0)$ соответственно. Отсюда

$$A(r) = \int_{V_r(0)} f(X) dX.$$

Дифференцируемую функцию $f(X)$ можно разложить в конечный ряд Тейлора в окрестности точки $X = 0$. Если проинтегрировать

¹⁾ Из дифференциальной геометрии поверхностей известно, что если F — поверхность, то K равна гауссовой кривизне поверхности F в точке p . Однако этот факт нам не понадобится.

этот ряд по кругу $V_r(0)$, то получим

$$A(r) = A_0(r) \left\{ f(0) + \frac{1}{8} r^2 [\Delta f](0) + O(r^3) \right\}.$$

Отсюда непосредственно следует лемма, так как $f(0) = 1$.

Пусть M — риманово многообразие и p — точка в M . Пусть N_0 — нормальная окрестность точки 0 в M_p , и пусть $N_p = \text{Exp } N_0$. Пусть S — некоторое двумерное векторное подпространство пространства M_p . Тогда $\text{Exp}(N_0 \cap S)$ является связным двумерным подмногообразием многообразия M и обладает римановой структурой, индуцированной римановой структурой на M . Кривизна многообразия $\text{Exp}(N_0 \cap S)$ в точке p называется *кривизной* многообразия M в точке p в двумерном направлении (в направлении плоского сечения S).

Теорема 12.2. Пусть M — риманово многообразие с тензорным полем кривизны R и римановой структурой g . Пусть p — точка в M и S — двумерное векторное подпространство касательного пространства M_p . Тогда кривизна многообразия M в точке p в направлении сечения S равна

$$K(S) = - \frac{g_p(R_p(Y, Z)Y, Z)}{|Y \vee Z|^2}.$$

Здесь Y и Z — некоторые линейно независимые векторы в подпространстве S . Через $Y \vee Z$ обозначен параллелограмм, натянутый на эти векторы, а через $|Y \vee Z|$ — его площадь.

Доказательство. Чтобы можно было применить теорему 6,5, мы предположим сначала, что M и g аналитичны. Допустим также временно, что Y и Z — ортонормальные векторы в S . Пусть $X_1, \dots, X_m$ — такой ортонормированный базис пространства M_p , что $X_1 = Y$ и $X_2 = Z$. Тогда каждый вектор $X \in S$ записывается в виде $X = x_1 X_1 + x_2 X_2$, где $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$. Оператор Лапласа Δ в плоскости S равен

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Пусть N_0 — нормальная окрестность точки 0 в M_p , и пусть $N_p = \text{Exp } N_0$. Длина кривой в многообразии $M_S = \text{Exp}(S \cap N_0)$ не зависит от того, измеряется она при помощи римановой структуры на M или при помощи индуцированной структуры на M_S . Если $q \in M_S$, то геодезическая в N_p , соединяющая p с q , является кратчайшей кривой в M_S , соединяющей p и q . Отсюда следует, что экспоненциальные отображения в точке p для многообразий M и M_S совпадают на $S \cap N_0$. Обозначим через $X_1^*, \dots, X_m^*, X^*$ векторные поля на N_p , адаптированные к касатель-

ным векторам $X_1, \dots, X_m, X$. Если $X \in S \cap N_0$, то положим

$$v_1 = d \operatorname{Exp}_X(X_1), \quad v_2 = d \operatorname{Exp}_X(X_2)$$

и определим функции c_{ij}^k формулами

$$[X_i^*, X_j^*] = \sum_k c_{ij}^k X_k^*.$$

Отображение $\operatorname{Exp}(x_1 X_1 + x_2 X_2) \rightarrow (x_1, x_2)$ определяет на многообразии $M_S = \operatorname{Exp}(S \cap N_0)$ систему координат, а v_1 и v_2 являются касательными векторами к M_S . Если a и b — два вектора в евклидовом векторном пространстве, то обозначим через $a \vee b$ параллелограмм, натянутый на a и b , и через $|a \vee b|$ — его площадь. Обозначим через f отношение элементов площади в M_S и S (в точках $\operatorname{Exp} X$ и X). Другими словами,

$$f(X) = \frac{|v_1 \vee v_2|}{|X_1 \vee X_2|} = |v_1 \vee v_2|.$$

Векторы v_1 и v_2 можно представить в виде

$$v_1 = \sum_{i=1}^m f_i X_i^*, \quad v_2 = \sum_{j=1}^m g_j X_j^*,$$

где f_i и g_j — аналитические функции от (x_1, x_2) . Эти функции для малых (x_1, x_2) определяются теоремой 6.5. Мы имеем

$$v_1 = X_1^* - \frac{1}{2} [X^*, X_1^*] + \frac{1}{6} [X^*, [X^*, X_1^*]] - \dots, \quad (2)$$

$$v_2 = X_2^* - \frac{1}{2} [X^*, X_2^*] + \frac{1}{6} [X^*, [X^*, X_2^*]] - \dots \quad (2')$$

Векторы $(X_i^*)_{\operatorname{Exp} X}$ ($1 \leq i \leq m$) составляют ортонормированный базис пространства $M_{\operatorname{Exp} X}$ (теорема 9.1 (ii)). Проекция параллелограмма $v_1 \vee v_2$ на плоскость, натянутую на векторы $(X_i^*)_{\operatorname{Exp} X}$ и $(X_j^*)_{\operatorname{Exp} X}$, имеет площадь $|f_i g_j - g_i f_j|$. Отсюда следует, что

$$|v_1 \vee v_2|^2 = \sum_{i < j} (f_i g_j - f_j g_i)^2. \quad (3)$$

Обозначим эту величину через F . Из соотношения $f = F^{1/2}$ следует, что

$$2f \Delta f = \Delta F - \frac{1}{2f^2} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 \right\}.$$

Нам нужно вычислить это выражение в точке $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Поскольку кручение $T = 0$, то

$$[X_i^*, X_j^*] = \nabla_{X_i^*} (X_j^*) - \nabla_{X_j^*} (X_i^*)$$

и, следовательно, функции c_{ij}^k обращаются в 0 в точке p . Другими словами, ограничения функций c_{ij}^k на M_S обращаются в 0 в точке $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Из формул (2) и (2') получаем разложения для функций f_i, g_j :

$$f_i = \delta_{1i} - \frac{x_2}{2} c_{21}^i + \frac{x_1 x_2}{6} (X_1^* \cdot c_{21}^i) + \frac{x_2^2}{6} (X_2^* \cdot c_{21}^i) + \dots,$$

$$g_j = \delta_{2j} - \frac{x_1}{2} c_{12}^j + \frac{x_1 x_2}{6} (X_2^* \cdot c_{12}^j) + \frac{x_1^2}{6} (X_1^* \cdot c_{12}^j) + \dots,$$

где невыписанные члены имеют в точке $(x_1, x_2) = (0, 0)$ нуль выше чем второго порядка. Отсюда легко следует, что $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ обращаются в 0 при $(x_1, x_2) = (0, 0)$ и что

$$2[\Delta f](0) = [\Delta F](0) = [\Delta (f_1 g_2)^2](0).$$

Опуская опять члены порядка выше чем 2, мы получаем, что

$$(f_1 g_2)^2 = 1 - x_1 c_{12}^2 - x_2 c_{21}^1 + \\ + \frac{x_1^2}{3} (X_1^* \cdot c_{12}^2) + \frac{x_2^2}{3} (X_2^* \cdot c_{21}^1) + \frac{x_1 x_2}{3} (X_1^* \cdot c_{21}^1 + X_2^* \cdot c_{12}^2).$$

Поскольку

$$X_1 c_{12}^2 = [X_1^* c_{12}^2](0) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} c_{12}^2 \right](0) \quad \text{и т. д.,}$$

получаем равенство

$$2[\Delta f](0) = -\frac{4}{3} (X_1 c_{12}^2 + X_2 c_{21}^1).$$

В силу леммы 12.1,

$$K(S) = X_1 \cdot g([X_1^*, X_2^*], X_2^*) + X_2 \cdot g([X_2^*, X_1^*], X_1^*). \quad (4)$$

С другой стороны, из равенства $[X_i^*, X_j^*]_p = 0$ и из формул теоремы 9.1 вытекает, что

$$-g_p(R_p(Y, Z)Y, Z) = g_p(\nabla_{X_2^*} \nabla_{X_1^*} \cdot X_1^*, X_2^*) - g_p(\nabla_{X_1^*} \nabla_{X_2^*} \cdot X_1^*, X_2^*) = \\ = X_2 \cdot g(\nabla_{X_1^*} \cdot X_1^*, X_2^*) - X_1 \cdot g(\nabla_{X_2^*} \cdot X_1^*, X_2^*) - g_p(\nabla_{X_1^*} \cdot X_1^*, \nabla_{X_2^*} \cdot X_2^*) + \\ + g_p(\nabla_{X_2^*} \cdot X_1^*, \nabla_{X_1^*} \cdot X_2^*).$$

Последние два члена равны 0, так как вообще $(\nabla_{X_i^*} \cdot X_j^*)_p = 0$.

Для вычисления двух остальных членов мы используем формулу (2) из § 9. Поскольку $g(X_j^*, X_k^*)$ есть константа, то

$$-g_p(R_p(Y, Z)Y, Z) = X_2 \cdot g([X_2^*, X_1^*], X_1^*) + X_1 \cdot g([X_1^*, X_2^*], X_2^*).$$

В силу соотношения (4), это равенство доказывает теорему 12.2 в аналитическом случае для ортонормальных Y, Z . Если Y, Z линейно независимы, но не обязательно ортонормальны, то можно написать $A = y_1 Y + z_1 Z$, $B = y_2 Y + z_2 Z$, где A, B — ортонормальные векторы в S . Сопоставляя первое и третье соотношение из леммы 12.5, получаем

$$\begin{aligned} K(S) &= -g_p(R_p(A, B)A, B) = \\ &= -g_p(R_p(y_1 Y + z_1 Z, y_2 Y + z_2 Z) \cdot (y_1 Y + z_1 Z), y_2 Y + z_2 Z) = \\ &= -(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 g_p(R_p(Y, Z)Y, Z) = \\ &= -\frac{g_p(R_p(Y, Z)Y, Z)}{|Y \wedge Z|^2}. \end{aligned}$$

Освободимся, наконец, от предположения аналитичности. Пусть $\{x_1, \dots, x_m\}$ — система координат в открытой окрестности U точки p , такая, что $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p = Y$, $\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p = Z$. Рассмотрим функции g_{ij} , определенные формулами

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Тогда для каждой точки $q \in U$ матрица $(g_{ij})_q$ является симметричной и положительно определенной. Существуют аналитические функции $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ в некотором открытом множестве V ($p \in V \subset U$), производные которых порядков $0 \leq k \leq 3$ сколь угодно хорошо приближают производные функций g_{ij} . При достаточно хорошем приближении матрица $(\gamma_{ij})_q$ будет симметрической и положительно определенной для каждой точки $q \in V$. Полагая

$$\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \gamma_{ij} \quad [(1 \leq i, j \leq m)],$$

мы получим на V аналитическую риманову структуру γ . Кривизна в двумерном направлении и тензорное поле кривизны для структуры γ приближают соответствующую кривизну в двумерном направлении и тензорное поле кривизны для структуры g . Так как теорема 12.2 справедлива для риманова многообразия, определенного римановой структурой γ на V , то эта теорема верна и для структуры g .

Следующее предложение показывает, что кривизна в двумерном направлении определяет, в некотором смысле, тензор кривизны.

Предложение 12.3. Пусть M — риманово многообразие, p — точка в M . Пусть g и g' — римановы структуры на M , R и R' — соответствующие тензоры кривизны и $K(S)$ и $K'(S)$ — соответствующие кривизны в точке p в направлении плоского сечения $S \subset M_p$.

Предположим, что $g_p = g'_p$. Если $K(S) = K'(S)$ для всех плоских сечений $S \subset M_p$, то $R_p = R'_p$.

Докажем сначала две простые леммы.

Лемма 12.4. Пусть A — кольцо с единицей e , такое, что $6a \neq 0$ для $a \neq 0$ из A . Пусть E — модуль над A . Пусть $B: E \times E \times E \times E \rightarrow A$ — полилинейное отображение, удовлетворяющее тождествам

$$(a) \quad B(X, Y, Z, T) = -B(Y, X, Z, T),$$

$$(б) \quad B(X, Y, Z, T) = -B(X, Y, T, Z),$$

$$(в) \quad B(X, Y, Z, T) + B(Y, Z, X, T) + B(Z, X, Y, T) = 0.$$

Тогда

$$(г) \quad B(X, Y, Z, T) = B(Z, T, X, Y).$$

Если, в дополнение к (а), (б) и (в), отображение B удовлетворяет тождеству

$$(д) \quad B(X, Y, X, Y) = 0 \text{ для всех } X, Y \in E,$$

то $B = 0$.

Доказательство. Заменяем сначала T в тождестве (в) на X, Y, Z соответственно и сложим четыре полученные соотношения. Используя (а) и (б), получаем

$$(е) \quad B(T, X, Y, Z) + B(T, Y, Z, X) + B(T, Z, X, Y) = 0.$$

Из (в) и (а) следует, что

$$B(Z, X, T, Y) = +B(T, X, Z, Y) - B(T, Z, X, Y).$$

Подставляя это в (е), получаем соотношение (г). В частности, выражение $B(X, Y, X, T)$ симметрично по Y и T . Поэтому из (д) следует, что $B(X, Y, X, T) \equiv 0$. Ввиду (а) и (б), отсюда вытекает, что отображение B кососимметрично. Тогда из (в) сразу видно, что $B \equiv 0$.

Лемма 12.5. Пусть M — многообразие с аффинной связностью ∇ . Обозначим через R и T тензор кривизны и тензор кручения соответственно. Тогда R удовлетворяет следующему тождеству:

$$R(X, Y) = -R(Y, X).$$

Если $T = 0$, то

$$R(X, Y) \cdot Z + R(Y, Z) \cdot X + R(Z, X) \cdot Y = 0 \quad (\text{тождество Бьянки}).$$

Если g — псевдориманова структура на M и ∇ — соответствующая

щая псевдориманова связность, то

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, V) &= -g(R(X, Y)V, Z), \\ g(R(X, Y)Z, V) &= g(R(Z, V)X, Y). \end{aligned}$$

Доказательство. Первое тождество $R(X, Y) = -R(Y, X)$ очевидно. Для доказательства второго мы, используя то, что $T=0$, получаем равенство

$$\begin{aligned} &(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X)Z + (\nabla_Y \nabla_Z - \nabla_Z \nabla_Y)X + (\nabla_Z \nabla_X - \nabla_X \nabla_Z)Y - \\ &\quad - \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_{[Y, Z]}X - \nabla_{[Z, X]}Y = \\ &= \nabla_X[Y, Z] - \nabla_{[Y, Z]}X + \nabla_Y[Z, X] - \nabla_{[Z, X]}Y + \nabla_Z[X, Y] - \\ &\quad - \nabla_{[X, Y]}Z = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \end{aligned}$$

в силу тождества Якоби для векторных полей (§ 2, п. 1). Для доказательства третьего тождества можно предположить, что векторные поля X, Y, Z, V адаптированы к своим значениям в некоторой точке p . В этом случае из формулы (2) § 9 получаем

$$g(\nabla_X Z, Z) = 0.$$

Для произвольного векторного поля W

$$W \cdot g(X, Y) = g(\nabla_W X, Y) + g(X, \nabla_W Y),$$

согласно § 9. Далее, $(\nabla_W Z)_p = 0$, поскольку Z адаптировано к Z_p . Отсюда

$$\begin{aligned} g_p(R_p(X, Y)Z, Z) &= g_p(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) - g_p(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) = \\ &= X_p \cdot g(\nabla_Y Z, Z) - Y_p \cdot g(\nabla_X Z, Z) = 0. \end{aligned}$$

Тем самым третье тождество доказано. Последнее тождество вытекает из леммы 12.4.

Возвратимся теперь к предложению 12.3. Применим лемму 12.4 к полилинейной функции на $M_p \times M_p \times M_p \times M_p$, определенной формулой

$$B(X, Y, Z, T) = g_p(R_p(X, Y)Z, T) - g'_p(R'_p(X, Y)Z, T).$$

Поскольку $g_p = g'_p$, параллелограмм $X \vee Y$ имеет одну и ту же площадь независимо от того, измерять ее при помощи структуры g или g' . Поэтому из равенства $K(S) = K'(S)$ следует, что $B(X, Y, X, Y) = 0$ для всех $X, Y \in M_p$. В силу леммы 12.4, $B \equiv 0$. Но g_p — невырожденная форма, так что $R_p = R'_p$.

§ 13. Римановы многообразия отрицательной кривизны

Локальная риманова геометрия, развитая в § 9, основана главным образом на свойствах форм $(\text{Exp})^* \omega^i$, которые являются 1-формами в нормальной окрестности в касательном пространстве к многообразию в некоторой фиксированной точке. Формы ω^i определены только локально, и поэтому так же обстоит дело с формами $(\text{Exp})^* \omega^i$. Однако мы сейчас увидим, что эти последние (в противоположность формам ω^i) можно продолжить на все касательное пространство или во всяком случае на часть касательного пространства, где отображение Exp определено и регулярно. При этом мы пока не будем делать никаких предположений о кривизне.

Пусть M — риманово многообразие, p — точка в M , M_p — касательное пространство в точке p . Будем обозначать через Exp отображение Exp_p . Пусть N_0 — открытое подмножество в M_p , звездное по отношению к точке 0 и такое, что Exp есть регулярное отображение множества N_0 в M . Заметим, что N_0 не предполагается нормальной окрестностью точки 0. Пусть $Y_1, \dots, Y_m$ — ортонормированный базис пространства M_p . Если $X \in N_0$, то существует открытая окрестность N_X точки X в N_0 , которую Exp диффеоморфно отображает на некоторую открытую окрестность B точки $\text{Exp } X$ в M . Для каждого $Y \in N_X$ обозначим через $(Y_i^*)_{\text{Exp}}$ касательный вектор в точке $\text{Exp } Y$, полученный параллельным переносом вектора Y_i вдоль геодезической $\text{Exp } tY$ ($0 \leq t \leq 1$). Тогда $Y_1^*, \dots, Y_m^*$ — базис для векторных полей в окрестности B . Пусть Γ_{ij}^k, R_{lij}^k — соответствующие функции на B , определенные в § 8, и пусть ω^i, ω_l^i ($1 \leq i, l \leq m$) — 1-формы на B , определенные формулами $\omega^i(Y_j^*) = \delta_j^i, \omega_l^i = \sum_k \Gamma_{kl}^i \omega^k$. Пусть V_X — множество точек $(t, a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$, для которых $ta_1 Y_1 + \dots + ta_m Y_m \in N_X$. Рассмотрим отображение $\Phi: V_X \rightarrow B$, определенное формулой $\Phi: (t, a_1, \dots, a_m) \rightarrow \text{Exp}(ta_1 Y_1 + \dots + ta_m Y_m)$. Так же, как в § 8, доказывается, что 1-формы $\Phi^* \omega^i$ и $\Phi^* \omega_l^i$ имеют вид

$$\Phi^* \omega^i = a_i dt + \bar{\omega}^i, \quad \Phi^* \omega_l^i = \bar{\omega}_l^i,$$

где $\bar{\omega}^i$ и $\bar{\omega}_l^i$ — 1-формы на V_X , не содержащие dt . Если X' — другая точка в N_0 , то можно таким же способом построить 1-формы $\bar{\omega}^i$ и $\bar{\omega}_l^i$ на $V_{X'}$. Из определения ясно, что эти формы совпадают на $V_X \cap V_{X'}$ с ранее построенными формами. Итак, если обозначить через V множество таких точек $(t, a_1, \dots, a_m)$ в $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$, что $ta_1 Y_1 + \dots + ta_m Y_m \in N_0$, то формы $\bar{\omega}^i$ и $\bar{\omega}_l^i$ можно определить на всем множестве V . Они удовлетворяют дифференциаль-

ным уравнениям

$$\frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial t} = da_i + \sum_k a_k \bar{\omega}_k^i, \quad \bar{\omega}^i(t, a_j; da_k)_{t=0} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}_l^i}{\partial t} = \sum_{j, k} R_{ljk}^i a_j \bar{\omega}_k^i, \quad \bar{\omega}_l^i(t, a_j; da_k)_{t=0} = 0 \quad (2)$$

в каждой окрестности V_X , где R_{ljk}^i стоит вместо $R_{ljk}^i \circ \Phi$. Значит, (1) и (2) имеют место во всем множестве V . Комбинируя уравнения (1) и (2), получаем систему

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}^i}{\partial t^2} = \sum_{j, k, l} R_{ljk}^i a_l a_j \bar{\omega}_k^i, \quad \bar{\omega}^i(t, a_j; da_k)_{t=0} = 0 \quad (3)$$

на V . Эта система является обобщением так называемого уравнения Якоби для поверхностей.

Пусть S — единичная сфера $\|X\| = 1$ в M_p , и пусть U — множество всех таких пар $(t, X) \in \mathbf{R} \times S$, что $tX \in N_0$. Рассмотрим отображение $\Psi: (t, X) \rightarrow \text{Exp } tX$ множества U в M . Если отождествить пространства M_p и $\mathbf{R}^m$ при помощи базиса $Y_1, \dots, Y_m$, то сфера S отождествится с подмногообразием $a_1^2 + \dots + a_m^2 = 1$ пространства $\mathbf{R}^m$. При этом формы $\bar{\omega}^i$ и $\bar{\omega}_l^i$ будут индуцировать на U некоторые 1-формы, которые мы обозначим теми же символами. Используя звездность окрестности N_0 , можно показать, что лемма 9.2, согласно которой

$$\Psi^*g = (dt)^2 + \sum_{i=1}^m (\bar{\omega}^i)^2 \text{ на } U, \quad (4)$$

остаётся справедливой. Если обозначить через ξ отображение $(t, X) \rightarrow tX$ множества U в N_0 , то $\Psi = \text{Exp} \circ \xi$. Мы можем применить формулу (4) к частному случаю, когда $M = M_p$. В этом случае $R = 0$, $\bar{\omega}^i = t da_i$ и $\Psi = \xi$.

Отсюда

$$\xi^*(g_p) = (dt)^2 + t^2 \sum_{i=1}^m (da_i)^2. \quad (5)$$

Пусть A — фиксированное векторное поле на сфере $a_1^2 + \dots + a_m^2 = 1$ в $\mathbf{R}^m$. Положим

$$\alpha_i = \bar{\omega}^i(A), \quad \gamma_i = da_i(A) \quad (1 \leq i \leq m).$$

Функции $\alpha_i = \alpha_i(t, a_1, \dots, a_m)$ определены на множестве U и удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial t^2} = \sum_{i, j, k, l} R_{ljk}^i a_l a_j \alpha_i \alpha_k, \quad \alpha_i(0, a_1, \dots, a_m) = 0. \quad (6)$$

Предположим теперь, что кривизна многообразия M в направлении любого плоского сечения в каждой точке многообразия M неположительна. Для простоты мы будем выражать это условие словами: *многообразие M имеет отрицательную кривизну*.

Рассмотрим теперь фиксированную точку $(t, a_1, \dots, a_m) \in U$ и соответствующие числа $a_1, \dots, a_m$. Точка $X = t(a_1 Y_1 + \dots + a_m Y_m)$ лежит в N_0 и окрестность N_X , определенная выше, диффеоморфна окрестности B . Пусть $q = \text{Exp } X$, $Y = \sum_{i=1}^m a_i Y_i^*$, $Z = \sum_{i=1}^m \alpha_i Y_i^*$. Тогда $g \in B$, а Y и Z — векторные поля на B . Ясно, что

$$g_q(R_q(Y_q, Z_q)Y_q, Z_q) = \sum_{i, j, k, l} R_{ljik}^i a_l a_j \alpha_i \alpha_k.$$

Поэтому из (6) следует неравенство

$$\sum_i \alpha_i \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial t^2} \geq 0 \text{ на } U, \quad (7)$$

использующее предположение о кривизне.

Фиксируем опять точку $(a_1, \dots, a_m) \in S$. Положим $h(t) = (\sum_i \alpha_i^2)^{1/2}$ для всех $t \geq 0$, для которых $(t, a_1, \dots, a_m) \in U$. Мы допустим временно, что A не равно нулю в точке $(a_1, \dots, a_m)$. Тогда $h(0) = 0$ и $h(t) > 0$ для $t > 0$. Поскольку

$$\left(\frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial t}\right)_{t=0} = da_i, \quad \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial t}\right)_{t=0} = \gamma_i,$$

отсюда следует, что $h'(0) = (\sum_i \gamma_i^2)^{1/2}$. Из формулы (7) и из тождества

$$h(t)^3 h''(t) = h(t)^2 \sum_i \alpha_i \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial t^2} + \left(\sum_i \alpha_i^2 \sum_i \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial t}\right)^2 - \left(\sum_i \alpha_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \right)^2 \right)$$

вытекает, что

$$h''(t) \geq 0, \quad h'(t) \geq h'(0) \quad \text{для } t > 0.$$

Следовательно, $h(t) \geq th'(0)$, откуда

$$\sum_{i=1}^m (\bar{\omega}^i(A))^2 \geq t^2 \sum_{i=1}^m (da_i(A))^2 \quad (8)$$

в точке $(a_1, \dots, a_m)$. Если A обращается в 0 в точке $(a_1, \dots, a_m) \in S$, то неравенство (8) справедливо тривиальным образом. Значит, (8) имеет место для произвольного векторного поля A

на S и для всех точек в U с $t \geq 0$. Используя теперь формулы (4), (5) и тот факт, что $\Psi = \text{Exp} \circ \xi$, $\Psi^* = \xi^* \circ \text{Exp}^*$, получаем неравенство

$$\|d \text{Exp}_X(Y)\| \geq \|Y\|,$$

где X — любая точка в N_0 и Y — касательный вектор к N_0 в точке X . Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 13.1. Пусть M — риманово многообразие отрицательной кривизны и p — любая точка в M . Пусть N_0 — открытое подмножество пространства M_p , звездное по отношению к точке 0 и такое, что Exp (экспоненциальное отображение в точке p) есть регулярное отображение множества N_0 в M . Тогда

$$\|d \text{Exp}_X(Y)\| \geq \|Y\|,$$

где X — любая точка в N_0 , а Y — любой касательный вектор к N_0 в точке X . В частности,

$$L(\text{Exp} \circ \Gamma) \geq L(\Gamma)$$

для любого отрезка кривой Γ в N_0 , где через L обозначена длина дуги.

Следствие 13.2. Пусть M — риманово многообразие отрицательной кривизны, и пусть V — минимизирующий выпуклый нормальный шар в M . Пусть ABC — треугольник в V , углы которого равны A , B , C , а стороны суть геодезические длин a , b и c . Тогда

$$(i) \quad a^2 + b^2 - 2ab \cos C \leq c^2;$$

$$(ii) \quad A + B + C \leq \pi.$$

Действительно, применим теорему 13.1 к отображению Exp_C . Пусть Γ_a , Γ_b и Γ_c — геодезические, образующие стороны треугольника, и пусть γ_a , γ_b , γ_c — соответствующие отрезки кривых в касательном пространстве M_C ($\text{Exp}_C(\gamma_a) = \Gamma_a$ и т. д.). Пусть γ_0 — отрезок прямой в M_C , соединяющий концы отрезка γ_c . Положим $\Gamma_0 = \text{Exp}_C(\gamma_0)$.

Тогда

$$a = L(\gamma_a) = L(\Gamma_a),$$

$$b = L(\gamma_b) = L(\Gamma_b),$$

$$L(\gamma_0) \leq L(\gamma_c), \quad L(\gamma_0)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

так как угол между γ_a и γ_b есть C .

Предположим теперь, что кривизна в двумерном направлении всюду неположительна. Тогда $L(\gamma_c) \leq L(\Gamma_c)$, откуда следует (i).

Для доказательства неравенства (ii) заметим сначала, что $c = d(A, B)$ и т. д. и, следовательно, каждая длина a , b или c не превосходит суммы двух остальных. Поэтому можно найти обычный плоский треугольник со сторонами a , b , c . Если обозначить его углы через A' , B' , C' , то в силу свойства (i), $A \leq A'$, $B \leq B'$, $C \leq C'$. Так как $A' + B' + C' = \pi$, то получаем соотношение (ii).

Теорема 13.3.

(i) Пусть M — полное риманово многообразие отрицательной кривизны и p — любая точка в M . Тогда M не содержит точек, сопряженных точке p .

(ii) Пусть M — полное риманово многообразие, и пусть существует такая точка $p \in M$, что M не содержит точек, сопряженных точке p . Тогда пара (M_p, Exp_p) есть накрывающее многообразие для M . Если, в частности, M односвязно, то Exp_p является диффеоморфизмом пространства M_p на M .

Доказательство. (i) Как и раньше, будем писать Exp вместо Exp_p и обозначать через $C(p)$ (замкнутое) множество точек в M_p , сопряженных точке p . Если $C(p)$ непусто, то пусть X — точка множества $C(p)$, находящаяся на минимальном расстоянии от начала координат. Тогда существует такой вектор $Y \neq 0$ в M_p , что $d \text{Exp}_X(Y) = 0$. С другой стороны, из теоремы 13.1 следует, что $\|d \text{Exp}_{tX}(Y)\| \geq \|Y\|$ для $0 \leq t < 1$. Но непрерывности $\|d \text{Exp}_X(Y)\| \geq \|Y\|$, что приводит к противоречию. Итак, $C(p) = \emptyset$.

Для доказательства второго утверждения теоремы мы, следуя указанию Сингера, рассмотрим на M_p тензорное поле $g^* = \text{Exp}^* g$, где через g обозначена риманова структура на M . В силу регулярности отображения Exp , g^* есть риманова структура на M_p . Пространство M_p с римановой структурой g^* полно. Действительно, геодезические, проходящие через начало координат в M_p , суть прямые линии. Значит, M_p полно в точке p (в смысле замечания, следующего за теоремой 10.4) и тем самым полно. Теперь теорема 13.3 вытекает из следующей леммы.

Лемма 13.4¹⁾. Пусть V и W — римановы многообразия, причем V полно, и φ — дифференцируемое отображение многообразия V на W . Предположим, что $d\varphi_v$ является изометрией для каждой точки $v \in V$. Тогда (V, φ) — накрывающее пространство для W .

Доказательство (упрощение принадлежит Хиксу [1]). Пусть $w \in W$, N_0 — нормальная окрестность точки 0 в W_w вида $\|X\| < r$ и $N_w = \text{Exp}_w N_0$. Пусть v — любая точка из $\varphi^{-1}(w)$. Обоз-

¹⁾ Амброуз [1], стр. 360.

начим через ψ отображение, обратное к $\text{Exp}_w: N_0 \rightarrow N_w$. Поскольку V полно, отображение $f = \text{Exp}_v \circ (d\varphi_v)^{-1} \circ \psi$ есть всюду определенное отображение множества N_w на некоторое подмножество $N_v \subset V$. Очевидно, что $\varphi \circ f$ есть тождественное отображение множества N_w на себя. Аналогично, $f \circ \varphi$ есть тождественное отображение множества N_v на себя. Так как $(d\varphi_v)^{-1}(N_0)$ является шаром $\|X\| < r$ в V_v , то ясно, что N_v содержится в открытом шаре $B_r(v)$. С другой стороны, $B_r(v) \subset N_v$ в силу теоремы 10.4. Итак, $N_v = B_r(v)$ и φ есть диффеоморфизм множества N_v на N_w . Предположим теперь, что $v_1, v_2 \in \varphi^{-1}(w), v_1 \neq v_2$. Тогда шары $B_r(v_1)$ и $B_r(v_2)$ не пересекаются. Действительно, в противном случае существовала бы точка $v^* \in B_r(v_2) \cap B_r(v_1)$, такая, что w и $\varphi(v^*)$ соединены геодезическими различных длин, лежащими внутри N_w . Далее,

$$\bigcup_{v \in \varphi^{-1}(w)} B_r(v) = \varphi^{-1}(N_w),$$

так как каждая точка из $\varphi^{-1}(N_w)$ может быть соединена с некоторой точкой из $\varphi^{-1}(w)$ при помощи геодезической длины меньше r . Тем самым доказано, что (V, φ) — накрывающее многообразие для многообразия W .

Следующая теорема, принадлежащая Э. Картану, имеет важное приложение к теории групп Ли (см. гл. VI). Она приводит к единственному известному доказательству сопряженности максимальных компактных подгрупп полупростой группы Ли.

Теорема 13.5. Пусть M — полное односвязное риманово многообразие отрицательной кривизны. Пусть K — компактная группа Ли преобразований¹⁾ многообразия M , элементы которой являются изометриями многообразия M . Тогда преобразования из группы K имеют общую неподвижную точку.

Доказательство. Пусть d — расстояние на многообразии M , и пусть dk — мера Хаара²⁾ на группе K , нормированная условием $\int_K dk = 1$. Выберем точку $p \in M$ и рассмотрим вещественную функцию J на M , определенную формулой

$$J(q) = \int_K d^2(q, k \cdot p) dk.$$

Тогда J — неотрицательная непрерывная функция на M . Поскольку орбита точки p компактна, существует такой шар $B_r(p)$, что

¹⁾ Определение см. в гл. II, § 3.

²⁾ То есть левоинвариантная положительная мера на K . Существование ее доказано в гл. X, § 1, п. 1. — Прим. перев.

$J(q) > J(p)$ для $q \notin B_r(p)$. Замыкание множества $B_r(p)$ компактно и поэтому содержит точку минимума q_0 для функции J . Тогда q_0 является также точкой минимума для функции J на M . Ясно, что $J(k \cdot q_0) = J(q_0)$ для $k \in K$. Поэтому для доказательства существования неподвижной точки достаточно показать, что

$$J(q) > J(q_0), \quad \text{если } q \neq q_0. \quad (9)$$

В силу теоремы 13.3, любые две точки многообразия M можно соединить единственной геодезической, причем ее длина равна расстоянию между точками. Поэтому, в силу следствия 13.2, неравенство косинусов

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos C \leq c^2$$

справедливо для произвольного геодезического треугольника в M . Предположим теперь, что $q \neq q_0$, и обозначим через $t \rightarrow q_t$ ($0 \leq t \leq d(q_0, q)$) геодезическую, соединяющую q_0 с q . Если $k \cdot p \neq q_t$, то пусть $\alpha_t(k)$ — угол между геодезическими (q_t, q) и $(k \cdot p, q_t)$. В силу леммы 13.6,

$$\frac{d}{dt} d^2(q_t, k \cdot p) = \begin{cases} 2d(q_t, k \cdot p) \cos \alpha_t(k), & \text{если } k \cdot p \neq q_t \\ 0, & \text{если } k \cdot p = q_t. \end{cases} \quad (10)$$

Докажем теперь, что функция

$$F(t, k) = \frac{d}{dt} d^2(q_t, k \cdot p) \quad (0 \leq t \leq d(q_0, q), \quad k \in K)$$

непрерывна в каждой точке $(0, k)$ ($k \in K$). Тогда F , очевидно, будет непрерывной всюду. Пусть K_1 — (замкнутое) множество таких элементов $k \in K$, что $k \cdot p = q_0$; пусть K_2 — дополнение $K \setminus K_1$. Отображение $k \rightarrow k \cdot p$ группы K в M дифференцируемо. Применяя несколько раз лемму 10.1, легко получить, что функция $(t, k) \rightarrow \cos \alpha_t(k)$ непрерывна в точке $(0, k_0)$, если $k_0 \in K_2$. Пусть теперь $k_0 \in K_1$ и пусть последовательность (t_n, k_n) сходится к $(0, k_0)$. В силу формулы (10), мы имеем

$$|F(t, k)| \leq 2d(q_t, k \cdot p).$$

Поскольку $d(q_{t_n}, k_n \cdot p) \rightarrow d(q_0, k_0 \cdot p) = 0$, отсюда следует, что $F(t_n, k_n) \rightarrow F(0, k_0)$. Тем самым доказана непрерывность функции F . Отсюда следует, что функция $t \rightarrow J(q_t)$ дифференцируема и что ее производную можно получить путем дифференцирования под знаком интеграла. Поскольку минимум достигается в точке $t = 0$, мы получаем из формулы (10)

$$\int_{K_2} d(q_0, k \cdot p) \cos \alpha_0(k) dk = 0.$$

Приведенное выше неравенство косинусов показывает, что

$$d^2(q, k \cdot p) \geq d^2(q_0, k \cdot p) + d^2(q_0, q) - \\ - 2d(q_0, q)d(q_0, k \cdot p) \cos(\pi - \alpha_0(k))$$

для $k \in K_2$. После интегрирования получаем

$$\int_{K_2} d^2(q, k \cdot p) dk \geq \int_{K_2} d^2(q_0, k \cdot p) dk + d^2(q_0, q) \int_{K_2} dk.$$

Аналогичное неравенство для множества K_1 тривиально. Складывая эти неравенства, приходим к соотношению

$$J(q) \geq J(q_0) + d^2(q_0, q).$$

Тем самым теорема доказана.

Лемма 13.6. Пусть M — многообразие, удовлетворяющее условиям теоремы 13.5, и пусть $p \in M$. Пусть $\gamma: t \rightarrow q_t$ ($0 \leq t \leq L$) — отрезок кривой, не содержащий точки p , причем t — длина дуги. Тогда

$$\left[\frac{d}{dt} d(q_t, p) \right]_{t=0} = \cos \alpha,$$

где через α обозначен угол между кривой γ и геодезической (pq_0) в точке q_0 (см. рис. 1).

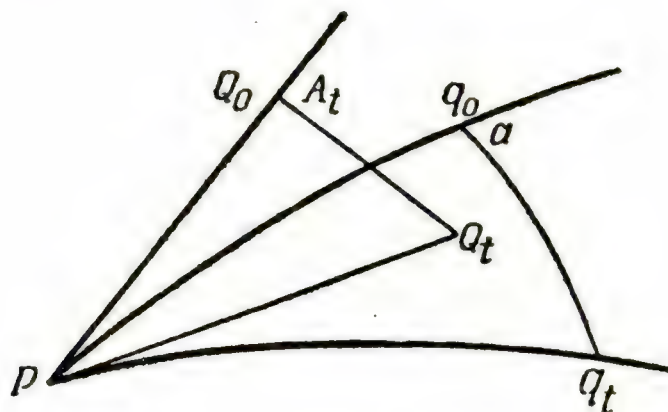


Рис. 1.

Доказательство. Будем писать Ехр вместо Ехр_p и определим $Q_t \in M_p$ так, чтобы $\text{Ехр } Q_t = q_t$. Будем обозначать расстояние в пространстве M_p также через d . Тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (d(q_t, p) - d(q_0, p)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2d(q_0, p)t} (d^2(q_t, p) - d^2(q_0, p)) = \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2d(Q_0, p)t} (d^2(Q_t, p) - d^2(Q_0, p)).$$

Но

$$d^2(Q_t, p) - d^2(Q_0, p) = d^2(Q_0, Q_t) + 2d(Q_0, p)d(Q_0, Q_t) \cos A_t,$$

где A_t — угол между прямыми (p, Q_0) и (Q_0, Q_t) . Поскольку Exp — диффеоморфизм, отображение $t \rightarrow Q_t$ ($0 \leq t \leq L$) есть отрезок кривой. Обозначим через Y касательный к нему вектор в точке Q_0 , через L_t — длину его дуги, измеряемую от Q_0 к Q_t , и через A — угол между Y и (p, Q_0) . Тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(Q_0, Q_t)}{L_t} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L_t}{t \|Y\|} = 1. \quad (11)$$

Отсюда сразу следует, что $\frac{1}{t} d^2(Q_0, Q_t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Значит,

$$\left[\frac{d}{dt} d(q_t, p) \right]_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} d(Q_0, Q_t) \cos A_t = \|Y\| \cos A.$$

Имеем $Y = Y_0 + Y_1$, где Y_0 направлен по прямой (p, Q_0) , а Y_1 перпендикулярен к этой прямой. В силу леммы 9.7, вектор $d\text{Exp}_{Q_0}(Y_1)$ перпендикулярен к геодезической (p, q_0) . Поскольку $\|d\text{Exp}_{Q_0} Y_0\| = \|Y_0\|$, то

$$\|Y\| \cos A = \|d\text{Exp}_{Q_0}(Y)\| \cos \alpha = \cos \alpha,$$

и лемма доказана.

§ 14. Вполне геодезические подмногообразия

Пусть M — дифференцируемое многообразие, S — подмногообразие. Пусть $m = \dim M$, $s = \dim S$. Кривая в S , разумеется, является кривой в M , но кривая в M , содержащаяся в S , не обязана быть кривой в S , так как она может даже не быть непрерывной. Однако справедливо следующее утверждение.

Лемма 14.1. Пусть φ — такое дифференцируемое отображение некоторого многообразия V в многообразие M , что $\varphi(V)$ содержится в подмногообразии S . Если отображение $\varphi: V \rightarrow S$ непрерывно, то оно также и дифференцируемо.

Пусть $p \in V$. В силу предложения 3.2, существует система координат $\{x_1, \dots, x_m\}$, действующая в открытой окрестности N точки $\varphi(p)$ в M , такая, что множество

$$N_S = \{r \in N \mid x_j(r) = 0 \text{ при } s < j \leq m\}$$

вместе с ограничениями функций $(x_1, \dots, x_s)$ на N_S образует локальную карту на S , содержащую точку $\varphi(p)$. В силу непрерывности отображения φ , существует такая локальная карта (W, ψ) , содержащая p , что $\varphi(W) \subset N_S$. Координаты $x_j(\varphi(q))$ ($1 \leq j \leq m$) дифференцируемым образом зависят от координат точки $q \in W$. В частности, это относится к координатам $x_j(\varphi(q))$ ($1 \leq j \leq s$), так что отображение $\varphi: V \rightarrow S$ дифференцируемо.

В качестве непосредственного следствия из этой леммы получаем следующее утверждение. Предположим, что V и S — подмногообразия многообразия M и что $V \subset S$. Если топология в S является относительной топологией¹⁾ многообразия M , то V есть подмногообразие в S .

В остальной части этого параграфа мы будем предполагать, что M — риманово многообразие и S — связное подмногообразие. Риманова структура на M индуцирует риманову структуру на S . Пусть d_M и d_S — расстояния в многообразиях M и S соответственно. Очевидно, что

$$d_M(p, q) \leq d_S(p, q)$$

для $p, q \in S$. Чтобы различать геодезические в многообразиях M и S , мы будем называть их M -геодезическими и S -геодезическими соответственно.

Лемма 14.2. Пусть γ — кривая в S ; предположим, что γ является M -геодезической. Тогда γ есть S -геодезическая.

Доказательство. Пусть o и p — произвольные точки на γ , например $o = \gamma(r_0)$ и $p = \gamma(r)$. Пусть N_o — сферическая нормальная окрестность точки o в M . Если r достаточно близко к r_0 , то отрезок геодезической

$$\gamma_{op}: t \rightarrow \gamma(t), \quad |t - r_0| \leq |r - r_0|,$$

содержится в N_o . В силу леммы 9.3, длина кривой γ_{op} удовлетворяет неравенству

$$L(\gamma_{op}) = d_M(o, p) \leq d_S(o, p) \leq L(\gamma_{op}).$$

Следовательно, $L(\gamma_{op}) = d_S(o, p)$. Итак, γ_{op} есть кривая кратчайшей длины в S , соединяющая o и p , и, следовательно, S -геодезическая.

Определение. Пусть M — риманово многообразие и S — связное подмногообразие в M . Пусть $p \in S$. Подмногообразие S называется *геодезическим в точке p* , если каждая M -геодезическая, касательная к S в точке p , является кривой в S . Подмногообразие S называется *вполне геодезическим*, если оно является геодезическим в каждой из своих точек.

Лемма 14.3. Предположим, что S — подмногообразие в M , геодезическое в точке $p \in S$. Если γ — S -геодезическая, проходящая через p , то она также является M -геодезической. Если M полно, то и S полно.

¹⁾ То есть топологией, индуцированной на подмножестве S топологией пространства M . — Прим. ред.

Доказательство. Пусть Γ — максимальная M -геодезическая, касательная к γ в точке p . Тогда $\Gamma \subset S$, так что по лемме 14.2 Γ является S -геодезической. Значит, $\gamma \subset \Gamma$. Предположим теперь, что M полно, и обозначим через Exp_M и Exp_S экспоненциальные отображения в точке p для многообразий M и S соответственно. По предположению, Exp_M определено во всем пространстве M_p . Поскольку S является геодезическим в точке p , отображение Exp_S есть ограничение отображения Exp_M на S_p . В частности, S полно в точке p в смысле замечания, следующего за теоремой 10.4. Согласно этому замечанию, S полно.

Предложение 14.4. *Предположим, что S — вполне геодезическое подмногообразие многообразия M , и пусть I — тождественное отображение многообразия S в M . Для каждой точки $p \in S$ существует открытая окрестность U_p точки p в S , на которой I сохраняет расстояние, т. е.*

$$d_S(q_1, q_2) = d_M(q_1, q_2) \text{ для } q_1, q_2 \in U_p. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $B_p(p)$ — минимизирующий выпуклый нормальный шар с центром p в M . Поскольку отображение I непрерывно, пересечение $B_p(p) \cap S$ есть открытое подмножество в S . Пусть U_p — такой минимизирующий выпуклый нормальный шар с центром p в S , что $U_p \subset B_p(p)$. Пусть q, r — произвольные точки в U_p и γ_{qr} — S -геодезическая внутри U_p , соединяющая q и r . Тогда $d_S(q, r) = L(\gamma_{qr})$. Рассмотрим такую максимальную M -геодезическую Γ , чтобы Γ и γ_{qr} имели один и тот же касательный вектор в точке q . Поскольку S — вполне геодезическое подмногообразие, $\Gamma \subset S$. Из леммы 14.2 следует, что $\gamma_{qr} \subset \Gamma$, так что γ_{qr} есть M -геодезическая. Поскольку $\gamma_{qr} \subset B_p(p)$, отсюда следует, что $d_M(q, r) = L(\gamma_{qr})$. Тем самым предложение доказано.

Замечание. Легко построить примеры (например, геодезические на конусе), показывающие, что соотношение (1), вообще говоря, не имеет места для всех $q_1, q_2 \in S$.

Теорема 14.5. *Пусть M — риманово многообразие и S — связное полное подмногообразие в M . Тогда S является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда M -параллельный перенос вдоль кривых в S всегда переводит векторы, касательные к S , в касательные к S .*

Доказательство. Пусть $s = \dim S$, $m = \dim M$, и пусть o — произвольная точка в S . В силу предложения 3.2, существует открытая окрестность N точки o в M , в которой действует такая система координат $\{x_1, \dots, x_m\}$, что множество

$$U = \{q \in N \mid x_j(q) = 0 \text{ для } s+1 \leq j \leq m\}$$

является нормальной окрестностью точки o в S и что ограничения координат $(x_1, \dots, x_s)$ на U образуют систему координат в U .

Пусть $p \in U$, и пусть $\gamma: t \rightarrow \gamma(t)$ — такая кривая в U , что $p = \gamma(0)$. Пусть $Y(t)$ — семейство касательных к M векторов, M -параллельное вдоль кривой γ и такое, что $Y(0) \in S_p$. Если написать $Y(t) = \sum_{a=1}^m Y^a(t) \frac{\partial}{\partial x_a}$, то коэффициенты $Y^a(t)$ будут удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{Y}^a(t) + \sum_{b,c=1}^m \Gamma_{bc}^a \dot{x}_b(t) Y^c(t) &= 0 \quad (1 \leq a \leq m), \\ Y^a(0) = 0, \quad x_a(t) &\equiv 0 \quad (s < a \leq m). \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть $\pi: t \rightarrow \pi(t)$ — M -геодезическая, касательная к S в точке p , причем t — длина дуги, измеряемая от точки p . Если t достаточно мало и если писать $x_a(t)$ вместо $x_a(\pi(t))$, то

$$\begin{aligned} \ddot{x}_a(t) + \sum_{b,c=1}^m \Gamma_{bc}^a \dot{x}_b(t) \dot{x}_c(t) &= 0 \quad (1 \leq a \leq m), \\ \dot{x}_a(0) &= 0 \quad (s < a \leq m). \end{aligned} \quad (3)$$

В последующих вычислениях мы предполагаем, что индексы изменяются в следующих границах:

$$\begin{aligned} 1 \leq i, j, k &\leq s, \\ s+1 \leq \alpha, \beta, \gamma &\leq m. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что S является вполне геодезическим. Тогда рассмотренная выше M -геодезическая π есть кривая в S и, значит, S -геодезическая. При малых t точка $\pi(t)$ лежит в U , так что $x_\alpha(t) \equiv 0$. Но так как каждая S -геодезическая является M -геодезической, то из системы (3) следует, что

$$\Gamma_{jk}^\alpha(p) = 0 \quad (p \in U). \quad (4)$$

Для рассмотренной выше кривой γ имеем $\dot{x}_\alpha(t) \equiv 0$. В силу (4), получаем

$$\dot{Y}^\alpha(t) + \sum_{j,\beta} \Gamma_{j\beta}^\alpha \dot{x}_j(t) Y^\beta(t) = 0 \quad \text{на } \gamma. \quad (5)$$

Но $Y(0) \in S_p$, так что $Y^\beta(0) = 0$. В силу теоремы единственности для системы (5) линейных дифференциальных уравнений, $Y^\beta(t) \equiv 0$. Следовательно, семейство $Y(t)$ является касательным к S . Наконец, пусть $\beta: t \rightarrow \beta(t)$ ($t \in J$) — произвольная кривая в S , и пусть $Z(t)$ — M -параллельное семейство вдоль β , такое, что $Z(t_0) \in S_{\beta(t_0)}$ для некоторого $t_0 \in J$. Множество таких $t \in J$, что $Z(t) \in$

$\in S_{\beta(t)}$, очевидно, замкнуто в J . Приведенное выше рассуждение показывает, что это множество открыто в J . Итак, $Z(t) \in S_{\beta(t)}$ для всех $t \in J$, и первая половина теоремы доказана.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что для каждой кривой указанного выше вида из соотношения $Y(0) \in S_p$ вытекает, что $Y(t) \in S_{\gamma(t)}$ для всех t . Поэтому в уравнениях (2)

$$Y^{\alpha}(t) \equiv 0, \quad \dot{x}_{\alpha}(t) \equiv 0,$$

откуда следует (4). Подставим теперь (4) в (3). Поскольку $\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a$ (кручение равно 0), мы получаем

$$\ddot{x}_{\alpha}(t) + 2 \sum_{j, \beta} \Gamma_{j\beta}^{\alpha} \dot{x}_j(t) \dot{x}_{\beta}(t) + \sum_{\beta, \gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \dot{x}_{\beta}(t) \dot{x}_{\gamma}(t) = 0. \quad (6)$$

Так как $\dot{x}_{\alpha}(0) = 0$, то из теоремы единственности для нелинейной системы (6) мы заключаем, что $x_{\alpha}(t)$ постоянны, т. е. $x_{\alpha}(t) = 0$ для всех t в некоторой окрестности точки 0. Функции $x_j(t)$ дифференцируемы. Следовательно, кусок π' кривой π , содержащий p , является кривой в U и, значит, кривой в S . Пусть π^* — максимальная S -геодезическая, касательная к π в точке p , параметризованная длиной дуги t^* , которая измеряется от точки p . Поскольку S полно, t^* изменяется от $-\infty$ до ∞ . Имеем $\pi^*(t) = \pi(t)$, если t достаточно мало. Далее, множество таких t , что $\pi(t) = \pi^*(t)$, открыто и замкнуто. Итак, $\pi \subset \pi^*$, π есть кривая в S и теорема доказана.

Теорема 14.6. Пусть M — односвязное полное риманово многообразие отрицательной кривизны. Пусть S — замкнутое вполне геодезическое подмногообразие в M . Для каждой точки $p \in S$ геодезические в M , перпендикулярные к S в точке p , образуют подмногообразие $S^{\perp}(p)$ в M , и M является объединением непесекающихся подмногообразий

$$M = \bigcup_{p \in S} S^{\perp}(p).$$

Доказательство. Пусть Exp_p — экспоненциальное отображение пространства M_p на M , и пусть T_p — ортогональное дополнение к касательному пространству S_p в M_p . Так как S полно и так как S -геодезические являются M -геодезическими, то

$$S = \text{Exp}_p(S_p).$$

Далее, по определению,

$$S^{\perp}(p) = \text{Exp}_p(T_p).$$

Поскольку Exp_p является диффеоморфизмом (теорема 13.3), $S^{\perp}(p)$ есть подмногообразие в M .

Пусть теперь q — произвольная точка в M , лежащая вне S . Так как S замкнуто, то существует точка $p_0 \in S$, находящаяся на кратчайшем расстоянии от q . Единственная геодезическая Γ , соединяющая q с p_0 , перпендикулярна к S . Действительно, если $\sigma: t \rightarrow s_t$ — некоторая кривая в S , то производная $\frac{d}{dt} d(s_t, q)$ равна $\cos \alpha_t$, где α_t — угол между σ и геодезической, соединяющей q с s_t (лемма 13.6). С другой стороны, если геодезическая, соединяющая q с S , перпендикулярна к S , то эта геодезическая должна совпадать с Γ , так как сумма углов геодезического треугольника в M не превосходит π . Отсюда видно, что каждая точка $q \in M$ лежит в точности на одном из многообразий $S^\perp(p)$, и теорема доказана.

УПРАЖНЕНИЯ

А. Многообразия

1. Пусть M — паракомпактное многообразие, A и B — непересекающиеся замкнутые подмножества в M . Тогда существует такая функция $f \in C^\infty(M)$, что $f \equiv 1$ на A , $f \equiv 0$ на B .

2. Пусть M — связное многообразие и p, q — две точки в M . Тогда существует такой диффеоморфизм Φ многообразия M на себя, что $\Phi(p) = q$.

3. Пусть M — хаусдорфово пространство, и пусть δ и δ' — две дифференцируемые структуры на M . Обозначим через $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ соответствующие множества функций класса C^∞ . Тогда $\delta = \delta'$ в том и только том случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$.

Вывести отсюда, что вещественная прямая $\mathbf{R}$ с ее обычной топологией обладает бесконечно многими различными дифференцируемыми структурами.

4. Пусть Φ — дифференцируемое отображение многообразия M на многообразие N . Векторное поле X на M называется *проектируемым* (Козюль [1]), если существует такое векторное поле Y на N , что $d\Phi \cdot X = Y$.

(1) Показать, что X проектируемо тогда и только тогда, когда $X\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_0$, где $\mathfrak{F}_0 = \{f \circ \Phi \mid f \in C^\infty(N)\}$.

(2) Необходимое условие для проектируемости поля X состоит в том, чтобы

$$d\Phi_p(X_p) = d\Phi_q(X_q), \quad (1)$$

лишь только $\Phi(p) = \Phi(q)$. Если, кроме того, $d\Phi_p(M_p) = N_{\Phi(p)}$ для каждой точки $p \in M$, то это условие является и достаточным.

(3) Пусть многообразие $M = \mathbf{R}$ с обычной дифференцируемой структурой, и пусть N — топологическое пространство $\mathbf{R}$ с диф-

ференцируемой структурой, которая получается, если потребовать, чтобы гомеоморфизм $\psi: x \rightarrow x^{1/3}$ многообразия M на N был диффеоморфизмом. В этом случае тождественное отображение $\Phi: x \rightarrow x$ есть дифференцируемое отображение многообразия M на N . Векторное поле $X = \frac{\partial}{\partial x}$ на M не является проектируемым, хотя условие (1) и выполняется.

В. Производная Ли

1. Пусть M — многообразие, а X — векторное поле на M . Производную Ли $\theta(X): \mathfrak{D}^1(M) \rightarrow [\mathfrak{D}^1(M)]$, которая отображает $\mathfrak{D}^1(M)$ в себя, можно однозначно продолжить до отображения алгебры $\mathfrak{D}(M)$ в себя, так что

- (1) $\theta(X)f = Xf$ для $f \in C^\infty(M)$;
- (2) $\theta(X)$ есть дифференцирование алгебры $\mathfrak{D}(M)$, сохраняющее тип тензоров;
- (3) $\theta(X)$ перестановочно со свертываниями.

2. Пусть Φ — диффеоморфизм многообразия M на себя. Тогда Φ индуцирует единственный сохраняющий тип автоморфизм $T \rightarrow \Phi \cdot T$ тензорной алгебры $\mathfrak{D}(M)$, такой, что

- (1) этот автоморфизм перестановочен со свертываниями;
- (2) $\Phi \cdot X = X^\Phi$ ($X \in \mathfrak{D}^1(M)$), $\Phi \cdot f = f^\Phi$ ($f \in C^\infty(M)$).

Доказать, что $\Phi \cdot \omega = (\Phi^{-1})^* \omega$ для $\omega \in \mathfrak{D}_*(M)$.

3. Пусть g_t — однопараметрическая группа Ли преобразований многообразия M . Обозначим через X векторное поле на M , индуцированное группой g_t (гл. II, § 3). Тогда

$$\theta(X) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T - g_t \cdot T)$$

для любого тензорного поля T на M ($g_t \cdot T$ определено в упр. 2).

4. Производная Ли $\theta(X)$ на многообразии M обладает следующими свойствами:

- (1) $\theta([X, Y]) = \theta(X)\theta(Y) - \theta(Y)\theta(X)$ ($X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)$);
- (2) $\theta(X)$ перестановочно с альтернированием $A: \mathfrak{D}_*(M) \rightarrow \mathfrak{A}_*(M)$ и поэтому индуцирует дифференцирование алгебры Грассмана многообразия M ;
- (3) $\theta(X)d = d\theta(X)$, т. е. $\theta(X)$ перестановочно с внешним дифференцированием.

С. Аффинные связности

1. Пусть M — связное многообразие со счетной базой. Используя разбиение единицы, показать, что на M существует риманова структура. С другой стороны, риманово многообразие всегда имеет счетную базу (предложение 9.6).

2. Пусть ∇ — аффинная связность на R^n , определенная формулой $\nabla_X(Y) = 0$, где $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$ ($1 \leq i, j \leq n$). Найти соответствующие аффинные преобразования.

3. Пусть M — многообразие с аффинной связностью ∇ без кручения. Предположим, что $X_1, \dots, X_m$ — базис для векторных полей на открытом подмножестве U в M . Определим формы $\omega^1, \dots, \omega^m$ на U формулами $\omega^i(X_j) = \delta_j^i$. Доказать формулу

$$d\theta = \sum_{i=1}^m \omega_i \wedge \nabla_{X_i}(\theta)$$

для любой дифференциальной формы θ на U .

4. В предложении 10.7 было доказано, что полное некомпактное риманово многообразие всегда содержит луч. Всегда ли M содержит прямую, т. е. геодезическую $\gamma(t)$ ($-\infty < t < \infty$), которая реализует кратчайшее расстояние между любыми двумя своими точками?

5. Пусть M и N — аналитические полные односвязные римановы многообразия. Предположим, что некоторое открытое подмножество многообразия M изометрично открытому подмножеству многообразия N . Используя результаты § 11, показать, что M и N изометричны (Майерс — Ринов).

Д. Подмногообразия

1. Пусть M и N — дифференцируемые многообразия и Φ — дифференцируемое отображение многообразия M в N . Рассмотрим отображение $\varphi: m \rightarrow (m, \Phi(m))$ ($m \in M$) и график

$$G_\Phi = \{(m, \Phi(m)) \mid m \in M\}$$

отображения Φ с топологией, индуцированной прямым произведением $M \times N$. Тогда φ есть гомеоморфизм многообразия M на G_Φ . Если перенести на G_Φ при помощи φ дифференцируемую структуру многообразия M , то график G_Φ станет замкнутым подмногообразием в $M \times N$.

2. Пусть N — многообразие и M — топологическое пространство, причем $M \subseteq N$ (как множества). Показать, что на топологическом пространстве M существует самое большее одна такая дифференцируемая структура, что M есть подмногообразие в N .

3. Используя фигуру 8 как подмножество пространства R^2 , показать, что

(1) замкнутое связное подмногообразие связного многообразия не обязано быть снабженным относительной топологией;

(2) подмножество M связного многообразия N может обладать двумя различными топологиями и дифференцируемыми структурами, такими, что в обоих случаях M является подмногообразием в N .

4. Пусть M — риманово многообразие и S — связное полное подмногообразие в M . Показать, что S является вполне геодезическим в том и только том случае, когда M -параллельный перенос касательных векторов к S вдоль кривых в S всегда совпадает с S -параллельным переносом (см. (2) гл. V, § 6).

Е. Поверхности

1. Пусть M — риманово многообразие размерности 2, p — точка в M , $r(q)$ — расстояние $d(p, q)$. Показать, что кривизна K многообразия M в точке p равна

$$K = -3 \lim_{r \rightarrow 0} \Delta(\log r),$$

где Δ — оператор Лапласа — Бельтрами на M (гл. X, § 2).

2 (Миндинг). Пусть S — ориентируемая поверхность в R^3 , ориентированная при помощи непрерывного семейства единичных нормальных векторов $\xi_s (s \in S)$. Пусть $t \rightarrow \gamma_s(t)$ — кривая в S , причем t — длина дуги. Смешанное произведение $(\xi \times \dot{\gamma}_s \cdot \ddot{\gamma}_s)(s)$ называется *геодезической кривизной* кривой γ_s в точке s . Показать, что геодезическую кривизну можно выразить через $\dot{\gamma}_s$, $\ddot{\gamma}_s$, риманову структуру на S и ее производные по локальным координатам. Вывести, что геодезическая кривизна инвариантна относительно изометрий, сохраняющих ориентацию.

3 (Леви — Чивита). Предположим, что поверхность S в R^3 катится без скольжения по плоскости π . Пусть точка касания пробегает кривую γ_s на S и кривую γ_π на π . Используя результат упражнения Е. 2, показать, что параллельный перенос вдоль кривой γ_π в евклидовом смысле совпадает с параллельным переносом вдоль γ_s в смысле римановой связности на S .

ЗАМЕЧАНИЯ

§ 1—3. Изложение теории дифференцируемых многообразий, данное здесь, весьма близко к изложению Шевалле [2].

§ 4—5. За классической литературой по аффинным связностям мы отсылаем к Стрёйку [1] и Скоутену [1]¹⁾. Определение аффинной связности, принятое здесь, принадлежит Козюлю, см. Номидзу [2]. Оно равносильно обычному определению в терминах расслоенного пространства реперов над многообразием, см. Номидзу [4], глава III, § 4 (где используется выражение «линей-

¹⁾ На русском языке теория аффинных связностей изложена в книге Рашевского [2]. — Прим. перев.

ная связность»). Хотя определение с пространством реперов полезно в глобальной дифференциальной геометрии, мы все же предпочли определение с векторными полями, потому что пространства, с которыми мы имеем дело, — это главным образом факторпространства G/K , естественным расслоением над которыми является сама группа G , так что расслоенное пространство реперов было бы только лишним багажом.

§ 6. Теорема 6.2 принадлежит Уайтхеду [2]. Доказательство в тексте является небольшим упрощением доказательства Уайтхеда, использующим более сильные предположения дифференцируемости. Теорема 6.5 была доказана автором [4].

§ 9—10. Изложение локальной римановой геометрии, данное здесь, частично основано на книге Картана [22], глава X. Эквивалентность условий полноты (теорема 10.3) для двумерного риманова многообразия была доказана Хопфом и Риновом [1]. Упрощенное доказательство было дано де Рамом [1]. См. также Майерс [1] и Уайтхед [3].

§ 11. Теорема 11.1 принадлежит Майерсу и Стинроду [1]. Их доказательство было упрощено Палэйсом [1]. Остальные результаты § 11, которые относятся к продолжению локальных изометрий и будут полезны в главе IV, основаны на работе де Рама [1]. См. также Ринов [1].

§ 12. Определение кривизны в двумерном направлении восходит к первоначальной лекции Римана [1], и формулу теоремы 12.2 можно найти в большинстве книг по римановой геометрии. Лемма 12.1 и получающееся из нее доказательство теоремы 12.2 взяты из работы автора [4].

§ 13—14. Изложение теории римановых многообразий отрицательной кривизны основано на книге Картана [22], замечание III. В двумерном случае теорема 13.3 принадлежит Адамару [1]. Понятие вполне геодезического подмногообразия было введено Адамаром [2]. Теорема 14.5 доказана в книге Картана [22], стр. 115. Картан доказал также ([22], стр. 232), что если каждое подмногообразие размерности $s \leq 2$, геодезическое в некоторой точке, является также вполне геодезическим, то многообразие имеет постоянную кривизну в двумерном направлении. Теорему 14.6 можно рассматривать как обобщение теоремы разложения для полупросток группы Ли (теорема 1.4, гл. VI), принадлежащей Мостову.

Глава II

ГРУППЫ ЛИ И АЛГЕБРЫ ЛИ

Группа Ли есть, грубо говоря, аналитическое многообразие со структурой группы, причем групповые операции аналитичны. Группы Ли возникают естественным путем как группы преобразований геометрических объектов. Например, известно, что группа всех аффинных преобразований связного многообразия с аффинной связностью и группа всех изометрий псевдориманова многообразия являются группами Ли в компактно открытой топологии. Однако группа всех диффеоморфизмов многообразия чересчур велика для того, чтобы образовывать группу Ли в какой-либо разумной топологии.

Касательное пространство $\mathfrak{g}$ группы Ли G в единичном элементе обладает законом композиции $(X, Y) \rightarrow [X, Y]$, который получается из операции коммутирования левоинвариантных векторных полей на G . Векторное пространство $\mathfrak{g}$ с этим законом композиции называется алгеброй Ли группы G . Структуры алгебры $\mathfrak{g}$ и группы G связаны при помощи экспоненциального отображения $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$, которое переводит прямые, проходящие через начало координат в $\mathfrak{g}$, в однопараметрические подгруппы группы G . Многие свойства этого отображения излагаются уже в § 1, потому что их можно получить как частные случаи свойств экспоненциального отображения для подходящей аффинной связности на группе G . Хотя структура алгебры $\mathfrak{g}$ определяется произвольной окрестностью единицы в G , экспоненциальное отображение дает далеко идущую связь между алгеброй $\mathfrak{g}$ и группой G в целом. Например, мы увидим в гл. VII, что центр компактной односвязной группы Ли G можно явно определить при помощи алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В § 2 рассматривается соответствие (индуцированное отображением $\exp$) между подалгебрами и подгруппами. Это соответствие является чрезвычайно важным для теории, несмотря на то его слабое место, что по подалгебре нельзя, вообще говоря, решить, является соответствующая подгруппа замкнутой или нет. Последнее различие существенно при рассмотрении факторпространств.

В § 4 мы исследуем связь между однородными пространствами и факторпространствами. Показывается, что если на многообразии M действует сепарабельная транзитивная группа Ли преобразований G , то M может быть отождествлено с факторпространством G/H (подгруппа H замкнута) и тем самым попадает в сферу теории групп Ли. Так, например, можно заключить, что если H компактна, то M обладает G -инвариантной римановой структурой.

Пусть G — связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Если $\sigma \in G$, то внутренний автоморфизм $g \rightarrow \sigma g \sigma^{-1}$ индуцирует некоторый автоморфизм $\text{Ad}(\sigma)$ алгебры $\mathfrak{g}$, и отображение $\sigma \rightarrow \text{Ad}(\sigma)$ есть аналитический гомоморфизм группы G на аналитическую подгруппу $\text{Ad}(G)$ группы $GL(\mathfrak{g})$ (на присоединенную группу). Группу $\text{Ad}(G)$ можно определить при помощи одной алгебры $\mathfrak{g}$, и, поскольку ее алгебра Ли изоморфна $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ ($\mathfrak{z}$ — центр алгебры $\mathfrak{g}$), можно, например, заключить, что всякая полупростая алгебра Ли над $\mathbf{R}$ изоморфна алгебре Ли некоторой группы Ли. Этот факт имеет место для произвольных алгебр Ли над $\mathbf{R}$, но в этой книге в такой общности он не понадобится.

В § 6 содержатся некоторые предварительные результаты о полупростых группах Ли. Основным результатом является теорема Вейля, утверждающая, что универсальная накрывающая группа компактной полупростой группы Ли компактна.

§ 1. Экспоненциальное отображение

1. Алгебра Ли группы Ли

Определение. *Группа Ли* есть группа G , являющаяся также аналитическим многообразием, таким, что отображение $(\sigma, \tau) \rightarrow \sigma\tau^{-1}$ прямого произведения $G \times G$ в G аналитично.

Примеры 1. Пусть G — группа всех изометрий евклидовой плоскости $\mathbf{R}^2$, сохраняющих ориентацию. Если $\sigma \in G$, то обозначим через $(x(\sigma), y(\sigma))$ координаты точки $\sigma \cdot 0$ (0 — начало координат в $\mathbf{R}^2$) и через $\theta(\sigma)$ — угол между осью x и прямой, соединяющей 0 с точкой $\sigma \cdot 0$. Тогда соответствие $\varphi: \sigma \rightarrow (x(\sigma), y(\sigma), \theta(\sigma))$ взаимно однозначно отображает G на прямое произведение $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1$ ($\mathbf{S}^1 = \mathbf{R} \bmod 2\pi$). Мы можем превратить G в аналитическое многообразие, потребовав, чтобы φ было аналитическим диффеоморфизмом. Элементарное вычисление показывает, что для $\sigma, \tau \in G$ имеем:

$$\begin{aligned} x(\sigma\tau^{-1}) &= x(\sigma) - x(\tau) \cos(\theta(\sigma) - \theta(\tau)) + y(\tau) \sin(\theta(\sigma) - \theta(\tau)); \\ y(\sigma\tau^{-1}) &= y(\sigma) - x(\tau) \sin(\theta(\sigma) - \theta(\tau)) - y(\tau) \cos(\theta(\sigma) - \theta(\tau)); \\ \theta(\sigma\tau^{-1}) &= \theta(\sigma) - \theta(\tau) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Так как функции $\sin$ и $\cos$ аналитичны, то отсюда следует, что G — группа Ли.

2. Пусть $\tilde{G}$ — группа всех изометрий пространства $\mathbf{R}^2$. Если s — симметрия плоскости $\mathbf{R}^2$ относительно прямой, то $\tilde{G} = G \cup sG$ (объединение непересекающихся множеств). Мы можем превратить sG в аналитическое многообразие, потребовав, чтобы отображение $\sigma \rightarrow s\sigma$ ($\sigma \in G$) было аналитическим диффеоморфизмом многообразия G на sG . При этом $\tilde{G}$ становится группой Ли.

С другой стороны, если G_1 и G_2 — две компоненты группы Ли G и $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$, то отображение $g \rightarrow x_2 x_1^{-1} g$ есть аналитический диффеоморфизм многообразия G_1 на G_2 .

Замечание. Группа Ли всегда паракомпактна. Действительно, пусть G — топологическая группа¹⁾, которая локально евклидова, т. е. имеет окрестность единицы e , гомеоморфную

¹⁾ Свойства топологических групп, которые используются в дальнейшем, можно найти в книге Понтрягина [1], гл. III и IX, а также в книге Шевалле [2], гл. II. — Прим. перев.

евклидову пространству. Пусть G_0 — компонента единицы группы G (т. е. компонента группы G , содержащая e). Тогда G_0 — связная топологическая группа и поэтому порождается любой окрестностью единицы. Отсюда следует, что G_0 имеет счетную базу, в частности G_0 паракомпактна. То же утверждение для группы G следует из определения паракомпактности.

Пусть G — связная топологическая группа. *Накрывающая группа* группы G — это пара $(\tilde{G}, \pi)$, где $\tilde{G}$ — топологическая группа и π — гомоморфизм группы $\tilde{G}$ в G , такой, что $(\tilde{G}, \pi)$ — накрывающее многообразие для G .

Определение. Гомоморфизм одной группы Ли в другую, являющийся также аналитическим отображением, называется *аналитическим гомоморфизмом*. Изоморфизм одной группы Ли на другую, являющийся также аналитическим диффеоморфизмом, называется *аналитическим изоморфизмом*.

Пусть G — группа Ли. Если $q \in G$, то левый сдвиг $L_q: g \rightarrow qg$ группы G на себя является аналитическим диффеоморфизмом. Векторное поле Z на G называется *левоинвариантным*, если $dL_q Z = Z$ для всех $q \in G$. Если задан касательный вектор $X \in G_e$, то существует в точности одно левоинвариантное векторное поле $\tilde{X}$ на G , такое, что $\tilde{X}_e = X$, и это поле $\tilde{X}$ аналитично. Действительно, $\tilde{X}$ можно определить формулой

$$[Xf](q) = Xf^{L_q^{-1}} = \left\{ \frac{d}{dt} f(q\gamma(t)) \right\}_{t=0},$$

где $f \in C^\infty(G)$, $q \in G$ и $\gamma(t)$ — любая кривая в G с касательным вектором X в точке $t=0$. Если $X, Y \in G_e$, то, в силу предложения 3.3 из гл. I, векторное поле $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ левоинвариантно.

Обозначим через $[X, Y]$ касательный вектор $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_e$. Векторное пространство G_e с законом композиции $(X, Y) \rightarrow [X, Y]$ обозначим через $\mathfrak{g}$ (или $\mathfrak{L}(G)$) и назовем *алгеброй Ли группы G* .

Более общо, пусть $\mathfrak{a}$ — векторное пространство над полем K (характеристики 0). Множество $\mathfrak{a}$ называется *алгеброй Ли над K* , если в нем задан закон композиции $(X, Y) \rightarrow [X, Y]$, который билинеен и удовлетворяет условиям: (а) $[X, X] = 0$ для всех $X \in \mathfrak{a}$; (б) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{a}$. Тожество (б) называется *тождеством Якоби*.

Алгебра Ли группы G , определенная выше, очевидно, является алгеброй Ли над $\mathbf{R}$.

Если $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли над K и $X \in \mathfrak{a}$, то линейное преобразование $Y \rightarrow [X, Y]$ алгебры $\mathfrak{a}$ обозначается через $\text{ad } X$ (или $\text{ad}_{\mathfrak{a}} X$, если возникает возможность путаницы). Пусть b и c — два век-

торных подпространства алгебры $\mathfrak{a}$. Тогда через $[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]$ обозначается векторное подпространство алгебры $\mathfrak{a}$, порожденное множеством элементов $[X, Y]$, где $X \in \mathfrak{b}$, $Y \in \mathfrak{c}$. Векторное подпространство $\mathfrak{b}$ алгебры $\mathfrak{a}$ называется *подалгеброй* в $\mathfrak{a}$, если $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{b}$, и *идеалом* в $\mathfrak{a}$, если $[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{b}$. Если $\mathfrak{b}$ — идеал в $\mathfrak{a}$, то факторпространство $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ является алгеброй Ли с операцией коммутирования, которая индуцирована операцией в алгебре $\mathfrak{a}$. Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — две алгебры Ли над одним и тем же полем K и σ — линейное отображение алгебры $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{b}$. Отображение σ называется *гомоморфизмом*, если $\sigma([X, Y]) = [\sigma X, \sigma Y]$ для всех $X, Y \in \mathfrak{a}$. Если σ — гомоморфизм, то $\sigma(\mathfrak{a})$ есть подалгебра в $\mathfrak{b}$, а ядро $\sigma^{-1}\{0\}$ — идеал в $\mathfrak{a}$. Если $\sigma^{-1}\{0\} = \{0\}$, то σ называется *изоморфизмом* алгебры $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{b}$. Изоморфизм алгебры Ли на себя называется *автоморфизмом*.

Пусть V — векторное пространство над полем K , и пусть $\mathfrak{gl}(V)$ — векторное пространство всех эндоморфизмов пространства V с операцией коммутирования $[A, B] = AB - BA$. Тогда $\mathfrak{gl}(V)$ есть алгебра Ли над K . Пусть $\mathfrak{a}$ — некоторая алгебра Ли над K . Гомоморфизм алгебры $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{gl}(V)$ называется *представлением* алгебры $\mathfrak{a}$ в пространстве V . В частности, поскольку $\text{ad}([X, Y]) = \text{ad } X \text{ ad } Y - \text{ad } Y \text{ ad } X$, линейное отображение $X \rightarrow \text{ad } X$ ($X \in \mathfrak{a}$) является представлением алгебры $\mathfrak{a}$ в пространстве $\mathfrak{a}$. Оно называется *присоединенным представлением* алгебры $\mathfrak{a}$ и обозначается ad (или $\text{ad}_{\mathfrak{a}}$, если возникает возможность путаницы). Ядро гомоморфизма $\text{ad}_{\mathfrak{a}}$ называется *центром* алгебры $\mathfrak{a}$. Если центр алгебры $\mathfrak{a}$ совпадает с $\mathfrak{a}$, то говорят, что $\mathfrak{a}$ *абелева*. Таким образом, $\mathfrak{a}$ абелева тогда и только тогда, когда $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \{0\}$.

Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — две алгебры Ли над одним и тем же полем K . Векторное пространство $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ становится алгеброй Ли над K , если положить

$$[(X, Y), (X', Y')] = ([X, X'], [Y, Y']).$$

Эта алгебра Ли называется *прямым произведением* алгебр $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Множества $\{(X, 0) | X \in \mathfrak{a}\}$, $\{(0, Y) | Y \in \mathfrak{b}\}$ являются идеалами в $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, и $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ есть прямая сумма этих идеалов.

В дальнейшем под алгеброй Ли будет всегда подразумеваться конечномерная алгебра Ли, если не оговорено противное.

2. Универсальная обертывающая алгебра

Пусть $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли над полем K . Закон композиции $(X, Y) \rightarrow [X, Y]$ лишь в редких случаях является ассоциативным. Мы свяжем сейчас с алгеброй $\mathfrak{a}$ ассоциативную алгебру с единицей, *универсальную обертывающую алгебру* алгебры $\mathfrak{a}$, которая будет обозначаться через $U(\mathfrak{a})$. Эта алгебра определяется как фактор-

алгебра $T(\mathfrak{a})/J$, где $T(\mathfrak{a})$ — тензорная алгебра над алгеброй $\mathfrak{a}$ (рассматриваемой как векторное пространство), а J — двусторонний идеал в $T(\mathfrak{a})$, порожденный множеством всех элементов вида $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$, где $X, Y \in \mathfrak{a}$. Если $X \in \mathfrak{a}$, то обозначим через X^* образ элемента X при каноническом отображении π алгебры $T(\mathfrak{a})$ на $U(\mathfrak{a})$. Единица алгебры $U(\mathfrak{a})$ будет обозначаться 1. Имеем $1 \neq 0$, если $\mathfrak{a} \neq \{0\}$.

Предложение 1.1. Пусть V — векторное пространство над K . Тогда имеется естественное взаимно однозначное соответствие между множеством всех представлений алгебры $\mathfrak{a}$ в пространстве V и множеством всех представлений алгебры $U(\mathfrak{a})$ в V . Если ϱ — представление алгебры $\mathfrak{a}$ в пространстве V и ϱ^* — соответствующее представление алгебры $U(\mathfrak{a})$ в V , то

$$\varrho(X) = \varrho^*(X^*) \text{ для } X \in \mathfrak{a}. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть ϱ — представление алгебры $\mathfrak{a}$ в пространстве V . Тогда существует единственное представление $\tilde{\varrho}$ алгебры $T(\mathfrak{a})$ в V , удовлетворяющее условию $\tilde{\varrho}(X) = \varrho(X)$ для всех $X \in \mathfrak{a}$. Представление $\tilde{\varrho}$ равно 0 на идеале J , так как

$$\tilde{\varrho}(X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]) = \varrho(X)\varrho(Y) - \varrho(Y)\varrho(X) - \varrho([X, Y]) = 0.$$

Таким образом, мы можем определить представление ϱ^* алгебры $U(\mathfrak{a})$ в пространстве V условием $\varrho^* \circ \pi = \tilde{\varrho}$. Тогда условие (1) удовлетворяется и полностью определяет представление ϱ^* . С другой стороны, пусть ϱ — некоторое представление алгебры $U(\mathfrak{a})$ в V . Если $X \in \mathfrak{a}$, то положим $\varrho(X) = \sigma(X^*)$. Тогда отображение $X \rightarrow \varrho(X)$ линейно и является представлением алгебры $\mathfrak{a}$ в пространстве V , так как

$$\begin{aligned} \varrho([X, Y]) &= \sigma([X, Y]^*) = \sigma(\pi(X \otimes Y - Y \otimes X)) = \\ &= \sigma(X^*Y^* - Y^*X^*) = \varrho(X)\varrho(Y) - \varrho(Y)\varrho(X) \end{aligned}$$

для $X, Y \in \mathfrak{a}$. Тем самым предложение доказано.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — базис алгебры $\mathfrak{a}$. Положим $X^*(t) = \sum_{i=1}^n t_i X_i^*$ ($t_i \in K$). Пусть $M = (m_1, \dots, m_n)$ — упорядоченное множество целых чисел $m_i \geq 0$. Мы будем называть M положительным целочисленным n -набором. Положим $|M| = m_1 + \dots + m_n$, $t^M = t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}$. Если рассматривать $t_1, \dots, t_n$ как неизвестные, то различные t^M являются линейно независимыми над K и для $|M| > 0$ мы можем определить $X^*(M) \in U(\mathfrak{a})$ как коэффициент при t^M в разложении элемента $\frac{1}{|M|!} (X^*(t))^{|M|}$. Положим $X^*(M) = 1$, если $|M| = 0$.

Предложение 1.2. *Наименьшее векторное подпространство в $U(\mathfrak{a})$, содержащее все элементы вида $X^*(M)$ (где M — положительный целочисленный n -набор), есть сама алгебра $U(\mathfrak{a})$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что каждый элемент $X_{i_1}^* X_{i_2}^* \dots X_{i_p}^*$ ($1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n$) можно выразить в виде конечной суммы $\sum_{|M| \leq p} a_M X^*(M)$, где $a_M \in K$. Рассмотрим элемент

$$u_p = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} X_{i_{\sigma(1)}}^* \dots X_{i_{\sigma(p)}}^*,$$

где σ пробегает все подстановки множества $\{1, 2, \dots, p\}$. Ясно, что $u_p = c X^*(M)$, где $c \in K$ и M — подходящий положительный целочисленный n -набор. Используя соотношение $X_j^* X_k^* - X_k^* X_j^* = [X_j, X_k]^*$, мы видим, что

$$X_{i_1}^* \dots X_{i_p}^* - X_{i_{\sigma(1)}}^* \dots X_{i_{\sigma(p)}}^*$$

есть линейная комбинация (с коэффициентами из K) элементов вида $X_{j_1}^* \dots X_{j_{p-1}}^*$ ($1 \leq j_1 \dots j_{p-1} \leq n$), где каждый X_{j_q} ($1 \leq q \leq p-1$) принадлежит к подалгебре алгебры $\mathfrak{a}$, порожденной элементами $X_{i_1}, \dots, X_{i_p}$. Формула

$$X_{i_1}^* X_{i_2}^* \dots X_{i_p}^* = \sum_{|M| \leq p} a_M X^*(M)$$

доказывается теперь индукцией по p .

Следствие 1.3. *Пусть $\mathfrak{b}$ — подалгебра в $\mathfrak{a}$. Предположим, что $\mathfrak{b}$ имеет размерность $n-r$, и пусть базис $X_1, \dots, X_n$ алгебры $\mathfrak{a}$ выбран так, что последние $n-r$ его элементов лежат в $\mathfrak{b}$. Обозначим через $\mathfrak{B}$ векторное подпространство в $U(\mathfrak{a})$, натянутое на все элементы $X^*(M)$, где M пробегает все положительные целочисленные n -наборы вида $(0, \dots, 0, m_{r+1}, \dots, m_n)$. Тогда $\mathfrak{B}$ является подалгеброй в $U(\mathfrak{a})$.*

Действительно, данное выше доказательство показывает, что произведение $X_{i_1}^* \dots X_{i_p}^*$ ($r < i_1, \dots, i_p \leq n$) можно записать в виде линейной комбинации элементов $X^*(M)$, для которых $m_1 = \dots = m_r = 0$.

3. Левоинвариантные аффинные связности

Пусть G — группа Ли и ∇ — аффинная связность на G . Связность ∇ называется *левоинвариантной*, если каждый L_σ ($\sigma \in G$) является аффинным преобразованием многообразия G . Пусть $X_1, \dots, X_n$ — базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G , и пусть $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ — соответствующие левоинвариантные векторные поля на G . Тогда,

если связность ∇ левоинвариантна, то векторные поля $\nabla_{\tilde{X}_i}(\tilde{X}_j)$ ($1 \leq i, j \leq n$), очевидно, левоинвариантны. С другой стороны, предположим, что ∇ — такая аффинная связность на G , что векторные поля $\nabla_{\tilde{X}_i}(\tilde{X}_j)$ ($1 \leq i, j \leq n$) являются левоинвариантными. Пусть Z, Z' — произвольные векторные поля из $\mathfrak{D}^1$. Тогда $Z = \sum_i f_i \tilde{X}_i, Z' = \sum_j g_j \tilde{X}_j$, где $f_i, g_j \in C^\infty(G)$. Используя аксиомы ∇_1 и ∇_2 и предложение 3.3 гл. I, легко получить, что $\nabla_{dL_\sigma Z}(dL_\sigma Z') = dL_\sigma \nabla_Z(Z')$ для каждого $\sigma \in G$, так что связность ∇ левоинвариантна.

Предложение 1.4. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством левоинвариантных аффинных связностей ∇ на G и множеством билинейных функций α на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ со значениями в $\mathfrak{g}$, задаваемое формулой*

$$\alpha(X, Y) = (\nabla_{\tilde{X}}(\tilde{Y}))_e.$$

Пусть $X \in \mathfrak{g}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\alpha(X, X) = 0$;
- (ii) геодезическая $t \rightarrow \gamma_X(t)$ является аналитическим гомоморфизмом группы R в G .

Доказательство. Если задано билинейное отображение $\alpha: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, то определим аффинную связность ∇ требованием

$$\nabla_{\tilde{X}_i}(\tilde{X}_j) = \alpha(X_i, X_j)^\sim \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

В силу сделанного выше замечания, ∇ левоинвариантна, и отсюда получается соответствие. Кроме того, связность ∇ аналитична.

Пусть теперь $X \in \mathfrak{g}$, и пусть $\tilde{X}$ — соответствующее левоинвариантное векторное поле на G . Локально существуют интегральные кривые для векторного поля $\tilde{X}$ (гл. I, § 7). Другими словами, существуют такое число $\varepsilon > 0$ и отрезок кривой $\Gamma: t \rightarrow \Gamma(t)$ ($0 \leq t \leq \varepsilon$) в G , что

$$\Gamma(0) = e, \quad \dot{\Gamma}(s) = \tilde{X}_{\Gamma(s)} \quad (2)$$

для $0 \leq s \leq \varepsilon$. Используя индукцию, определим $\Gamma(t)$ для всех $t \geq 0$ требованием

$$\Gamma(t) = \Gamma(n\varepsilon) \Gamma(t - n\varepsilon), \text{ если } n\varepsilon \leq t \leq (n+1)\varepsilon,$$

где n — неотрицательное целое число. На отрезке $n\varepsilon \leq t \leq (n+1)\varepsilon$ имеем $\Gamma \circ L_{-n\varepsilon} = L_{\Gamma(n\varepsilon)}^{-1} \circ \Gamma$. Применим обе части этого равенства к касательному вектору $\left(\frac{d}{dt}\right)_t$ ($n\varepsilon \leq t \leq (n+1)\varepsilon$). Из формулы (2)

получаем, что

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}(t) &= d\Gamma \left(\frac{d}{dt} \right)_t = dL_{\Gamma(n\varepsilon)} \circ d\Gamma \circ dL_{-n\varepsilon} \left(\frac{d}{dt} \right)_t = \\ &= dL_{\Gamma(n\varepsilon)} \cdot \tilde{X}_{\Gamma(t-n\varepsilon)} = \tilde{X}_{\Gamma(t)}.\end{aligned}$$

Таким образом, (2) имеет место для всех $s \geq 0$ (включая точки $n\varepsilon$).

Предположим теперь, что $\alpha(X, X) = 0$. Тогда, в силу левой инвариантности соответствующей аффинной связности ∇ , $\nabla_{\tilde{X}}(\tilde{X}) = 0$. Значит, отрезок кривой $\Gamma(t)$ ($t \geq 0$) является отрезком геодезической, и, в силу единственности последнего, $\Gamma(t) = \gamma_X(t)$ для всех $t \geq 0$. Для любой аффинной связности $\gamma_{-X}(t) = \gamma_X(-t)$. Поскольку $\alpha(-X, -X) = 0$, отсюда следует, что $\gamma_X(t)$ определена для всех $t \in \mathbf{R}$. Пусть теперь $s \geq 0$. Тогда кривые $t \rightarrow \gamma_X(s+t)$ и $t \rightarrow \gamma_X(s) \gamma_X(t)$ обе являются геодезическими в G (поскольку ∇ левоинвариантна), проходящими через точку $\gamma_X(s)$. Эти геодезические имеют в точке $\gamma_X(s)$ касательные векторы $\dot{\gamma}_X(s)$ и $dL_{\gamma_X(s)} \cdot X$ соответственно. Последние векторы равны между собой, так как формула (2) имеет место для всех $s \geq 0$. Отсюда мы заключаем, что

$$\gamma_X(s+t) = \gamma_X(s) \gamma_X(t) \quad (3)$$

для $s \geq 0$ и всех t . Используя опять соотношение $\gamma_{-X}(t) = \gamma_X(-t)$, мы видим, что равенство (3) имеет место для всех s и t . Тем самым доказано, что (i) $\Rightarrow$ (ii).

Предположим теперь, что θ — аналитический гомоморфизм группы $\mathbf{R}$ в G , такой, что $\dot{\theta}(0) = X$. Тогда из тождества $\theta(s+t) = \theta(s)\theta(t)$ ($t, s \in \mathbf{R}$) следует, что

$$\theta(0) = e, \quad \dot{\theta}(s) = \tilde{X}_{\theta(s)} \quad \text{для всех } s \in \mathbf{R}. \quad (4)$$

В частности, если γ_X — аналитический гомоморфизм, то на кривой γ_X имеем $\nabla_{\tilde{X}}(\tilde{X}) = 0$. Отсюда $\alpha(X, X) = (\nabla_{\tilde{X}}(\tilde{X}))_e = 0$.

Следствие 1.5. Пусть $X \in \mathfrak{g}$. Тогда существует единственный аналитический гомоморфизм θ группы $\mathbf{R}$ в G , такой, что $\dot{\theta}(0) = X$.

Доказательство. Пусть ∇ — любая левоинвариантная аффинная связность на G , для которой $\alpha(X, X) = 0$. Тогда $\theta = \gamma_X$ есть гомоморфизм, обладающий нужными свойствами. Докажем единственность. Для этого заметим, что (4) в соединении с равенством $\alpha(X, X) = 0$ показывает, что любой гомоморфизм θ с требуемыми свойствами должен быть геодезической. В силу единственности геодезических (предложение 5.3, гл. 1), $\theta = \gamma_X$.

Определение. Для каждого $X \in \mathfrak{g}$ положим $\exp X = \theta(1)$, где θ — гомоморфизм из следствия 1.5. Отображение $X \rightarrow \exp X$ алгебры $\mathfrak{g}$ в G называется *экспоненциальным отображением*.

Мы имеем формулу

$$\exp(t+s)X = \exp tX \cdot \exp sX$$

для всех $s, t \in \mathbb{R}$ и всех $X \in \mathfrak{g}$. Она немедленно следует из того факта, что если $\alpha(X, X) = 0$, то $\theta(t) = \gamma_X(t) = \gamma_{tX}(1) = \exp tX$.

Определение. Однопараметрической подгруппой группы Ли G называется аналитический гомоморфизм группы $\mathbb{R}$ в G .

Мы видели выше, что однопараметрические подгруппы суть отображения $t \rightarrow \exp tX$, где X — элемент алгебры Ли.

Из предложения 1.4 и следствия видно, что экспоненциальное отображение совпадает с отображением Exp_e (из гл. I) для всех левоинвариантных аффинных связностей на G , удовлетворяющих условию $\alpha(X, X) = 0$ ($X \in \mathfrak{g}$). Классические примеры (Картан и Скоутен [1]) таких связностей задаются формулами: $\alpha \equiv 0$ ((—)-связность), $\alpha(X, Y) = \frac{1}{2}[X, Y]$ ((0)-связность) и $\alpha(X, Y) = [X, Y]$ ((+)-связность).

Из теоремы 6.1 гл. I вытекает следующее утверждение.

Предложение 1.6. Существуют такая открытая окрестность N_0 точки 0 в $\mathfrak{g}$ и такая открытая окрестность N_e точки e в G , что $\exp$ является аналитическим диффеоморфизмом окрестности N_0 на N_e .

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — базис алгебры $\mathfrak{g}$. Отображение

$$\exp(x_1X_1 + \dots + x_nX_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$$

окрестности N_e на N_0 есть система координат на N_e , которая называется системой *канонических координат*, связанной с базисом $X_1, \dots, X_n$. Множество N_e называется *канонической координатной окрестностью*. Заметим, что мы не требуем, чтобы окрестность N_0 была звездной.

4. Формула Тэйлора и ее применения

Пусть G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $X \in \mathfrak{g}$, $g \in G$ и $f \in C^\infty(G)$. Так как гомоморфизм $\theta(t) = \exp tX$ удовлетворяет условию $\dot{\theta}(0) = X$, то

$$\tilde{X}_g f = X(f \circ L_g) = \left\{ \frac{d}{dt} f(g \exp tX) \right\}_{t=0}. \quad (5)$$

Отсюда следует, что значение функции $\tilde{X}f$ в точке $g \exp uX$ равно

$$[\tilde{X}f](g \exp uX) = \left\{ \frac{d}{dt} f(g \exp uX \exp tX) \right\}_{t=0} = \frac{d}{du} f(g \exp uX).$$

По индукции получаем

$$[\tilde{X}^n f](g \exp uX) = \frac{d^n}{du^n} f(g \exp uX).$$

Предположим теперь, что f аналитична в точке g . Тогда существует такая звездная окрестность N_0 точки 0 в $\mathfrak{g}$, что

$$f(g \exp X) = P(x_1, \dots, x_n) \quad (X \in N_0),$$

где P — абсолютно сходящийся степенной ряд и $(x_1, \dots, x_n)$ — координаты вектора X относительно фиксированного базиса в $\mathfrak{g}$. Тогда для фиксированного $X \in N_0$

$$f(g \exp tX) = P(tx_1, \dots, tx_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} a_m t^m \quad (a_m \in \mathbf{R})$$

для $0 \leq t \leq 1$. При этом каждый коэффициент a_m равен m -ой производной функции $f(g \exp tX)$ при $t=0$. Следовательно,

$$a_m = [\tilde{X}^m f](g).$$

Тем самым доказана «формула Тэйлора»:

$$f(g \exp X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\tilde{X}^n f](g) \quad (6)$$

для $X \in N_0$.

Теорема 1.7. Пусть G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Дифференциал экспоненциального отображения многообразия $\mathfrak{g}$ в G равен

$$d \exp_X = d(L_{\exp X})_e \circ \frac{1 - e^{-\text{ad } X}}{\text{ad } X} \quad (X \in \mathfrak{g}).$$

Здесь, как обычно, $\mathfrak{g}$ отождествляется с касательным пространством $\mathfrak{g}_X$.

Доказательство. Рассмотрим левоинвариантную аффинную связность на G , заданную формулой $\alpha(X, Y) = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{g}$ (предложение 1.4). Тогда левоинвариантное векторное поле $\nabla_{\tilde{X}}(\tilde{Y})$ тождественно равно 0 на G . Отсюда следует, что векторное поле X^* , адаптированное к X (гл. I, § 6), совпадает с $\tilde{X}$ в некоторой окрестности точки e в G . Из теоремы 6.5 гл. I

мы видим, что имеет место равенство

$$d(L_{\exp(-tX)}) \circ d \exp_{tX}(Y) = \frac{1 - e^{-\operatorname{ad} tX}}{\operatorname{ad} tX}(Y)$$

для всех t из некоторого интервала $|t| < \delta$. Обе части этого равенства являются аналитическими функциями на $\mathbf{R}$ со значениями в $\mathfrak{g}$. Так как они совпадают при $|t| < \delta$, то они должны совпадать при всех $t \in \mathbf{R}$. Теорема доказана.

Следующий результат потребуется нам позже.

Лемма 1.8. Пусть G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $\exp$ — экспоненциальное отображение алгебры $\mathfrak{g}$ в G . Тогда, если $X, Y \in \mathfrak{g}$, то

$$(i) \exp tX \exp tY = \exp \left\{ t(X + Y) + \frac{t^2}{2} [X, Y] + O(t^3) \right\},$$

$$(ii) \exp(-tX) \exp(-tY) \exp tX \exp tY = \exp \{ t^2 [X, Y] + O(t^3) \},$$

$$(iii) \exp tX \exp tY \exp(-tX) = \exp \{ tY + t^2 [X, Y] + O(t^3) \}.$$

В каждом случае через $O(t^3)$ обозначен вектор из $\mathfrak{g}$, обладающий следующим свойством: существует такое $\varepsilon > 0$, что функция $\frac{1}{t^3} O(t^3)$ ограничена и аналитична при $|t| < \varepsilon$.

Докажем сначала (i). Пусть f — функция, аналитическая в точке e . Применяя два раза формулу

$$[\tilde{X}^n f](g \exp tX) = \frac{d^n}{dt^n} f(g \exp tX),$$

получим

$$[\tilde{X}^n \tilde{Y}^m f](e) = \left[\frac{d^n}{dt^n} \frac{d^m}{ds^m} f(\exp tX \exp sY) \right]_{s=0, t=0}.$$

Поэтому ряд Тэйлора для функции $f(\exp tX \exp sY)$ имеет вид

$$f(\exp tX \exp sY) = \sum_{m, n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \frac{s^m}{m!} [\tilde{X}^n \tilde{Y}^m f](e) \quad (7)$$

для достаточно малых t и s . С другой стороны,

$$\exp tX \exp tY = \exp Z(t)$$

для достаточно малых t , где $Z(t)$ — функция со значениями в $\mathfrak{g}$, аналитическая в точке $t=0$. Мы имеем $Z(t) = tZ_1 + t^2Z_2 + O(t^3)$, где Z_1 и Z_2 — фиксированные векторы в $\mathfrak{g}$. Если f — одна из канонических координатных функций $\exp(x_1X_1 + \dots + x_nX_n) \rightarrow x_i$, то

$$\begin{aligned} f(\exp Z(t)) &= f(\exp(tZ_1 + t^2Z_2)) + O(t^3) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(t\tilde{Z}_1 + t^2\tilde{Z}_2)^n f](e) + O(t^3). \end{aligned} \quad (8)$$

Если сравнить (7) для $t = s$ и (8), то получим $Z_1 = X + Y$, $\frac{1}{2} \tilde{Z}_1^2 + \tilde{Z}_2 = \frac{1}{2} \tilde{X}^2 + \tilde{X}\tilde{Y} + \frac{1}{2} \tilde{Y}^2$. Следовательно,

$$Z_1 = X + Y, \quad Z_2 = \frac{1}{2} [X, Y],$$

откуда получается (i). Соотношение (ii) выводится путем применения равенства (i) два раза. Для доказательства формулы (iii) возьмем опять функцию f , аналитическую в точке e . Тогда для малых t имеем

$$f(\exp tX \exp tY \exp(-tX)) = \sum_{m, n, p \geq 0} \frac{t^m}{m!} \frac{t^n}{n!} \frac{t^p}{p!} [\tilde{X}^m \tilde{Y}^n (-\tilde{X})^p f](e) \quad (9)$$

и

$$\exp tX \exp tY \exp(-tX) = \exp S(t),$$

где $S(t) = tS_1 + t^2S_2 + O(t^3)$ и $S_1, S_2 \in \mathfrak{g}$. Если f — какая-нибудь каноническая координатная функция, то

$$\begin{aligned} f(\exp S(t)) &= f(\exp(tS_1 + t^2S_2)) + O(t^3) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(tS_1 + t^2S_2)^n f](e) + O(t^3) \end{aligned} \quad (10)$$

и, сравнивая коэффициенты в формулах (9) и (10), получаем $S_1 = Y$, $S_2 = [X, Y]$. Тем самым (iii) доказано.

З а м е ч а н и е. Соотношение (ii) дает геометрическую интерпретацию коммутатора $[X, Y]$. Действительно, оно показывает, что $[X, Y]$ есть касательный вектор в точке e к отрезку кривой

$$s \rightarrow \exp(-\sqrt{s}X) \exp(-\sqrt{s}Y) \exp \sqrt{s}X \exp \sqrt{s}Y \quad (s \geq 0).$$

Обозначим через $D(G)$ алгебру операторов на $C^\infty(G)$, порожденную всеми левоинвариантными векторными полями¹⁾ на группе G и тождественным оператором I . Если $X \in \mathfrak{g}$, то будем обозначать также через X соответствующее левоинвариантное векторное поле на G . Аналогично, оператор $\tilde{X}_1 \cdot \tilde{X}_2 \dots \tilde{X}_k$ ($X_i \in \mathfrak{g}$) будет для простоты обозначаться через $X_1 \cdot X_2 \dots X_k$. Пусть $X_1, \dots, X_n$ некоторый базис алгебры $\mathfrak{g}$. Положим $X(t) = \sum_{i=1}^n t_i X_i$. Пусть $M = (m_1, \dots, m_n)$ — положительный целочисленный n -набор,

¹⁾ В гл. X будет показано, что $D(G)$ есть алгебра всех левоинвариантных дифференциальных операторов на G .

и пусть $t^M = t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}$. Обозначим через $X(M)$ коэффициент при t^M в разложении функции $\frac{1}{|M|!} (X(t))^{|M|}$. Если $|M| = 0$, то положим $X(M) = I$. Ясно, что $X(M) \in D(G)$.

Предложение 1.9.

(а) Элементы $X(M)$, где M пробегает все положительные целочисленные n -наборы, составляют базис алгебры $D(G)$ (рассматриваемой как векторное пространство над R).

(б) Универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ изоморфна алгебре $D(G)$.

Доказательство. Пусть f — функция, аналитическая в точке $g \in G$. В силу формулы (6),

$$f(g \exp X(t)) = \sum_M t^M [X(M) f](g), \quad (11)$$

если t_i достаточно малы. Сравнивая эту формулу с обычной формулой Тэйлора для функции F , определенной равенством $F(t_1, \dots, t_n) = f(g \exp X(t))$, получаем

$$[X(M) f](g) = \frac{1}{m_1! \dots m_n!} \left\{ \frac{\partial^{|M|}}{\partial t_1^{m_1} \dots \partial t_n^{m_n}} f(g \exp X(t)) \right\}_{t_1=\dots=t_n=0}. \quad (12)$$

Отсюда непосредственно следует, что различные элементы $X(M)$ линейно независимы. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ обладает представлением ρ в пространстве $C^\infty(G)$, которое получается, если связать с каждым $X \in \mathfrak{g}$ соответствующее левоинвариантное векторное поле. Представление ρ^* из предложения 1.1 дает такой гомоморфизм алгебры $U(\mathfrak{g})$ в $D(G)$, что $\rho^*(X^*) = \rho(X)$ для $X \in \mathfrak{g}$. Отображение ρ^* переводит элемент $X_{i_1}^* \dots X_{i_p}^* \in U(\mathfrak{g})$ в $X_{i_1} \dots X_{i_p} \in D(G)$. Значит, $\rho^*(U(\mathfrak{g})) = D(G)$. Далее, ρ^* переводит элемент $X^*(M) \in U(\mathfrak{g})$ в $X(M) \in D(G)$. Поскольку элементы $X(M)$ линейно независимы, наше предложение следует из предложения 1.2.

Следствие 1.10. При введенных выше обозначениях элементы $X_1^{e_1} \dots X_n^{e_n}$ ($e_i \geq 0$) составляют базис алгебры $D(G)$.

Поскольку $X_i X_j - X_j X_i = [X_i, X_j]$, ясно, что каждый элемент $X(M)$ можно записать в виде линейной комбинации элементов $X_1^{e_1} \dots X_n^{e_n}$, где $e_1 + \dots + e_n \leq |M|$. С другой стороны, как замечено в доказательстве предложения 1.2, каждый элемент $X_1^{e_1} \dots X_n^{e_n}$ можно записать в виде линейной комбинации элементов $X(M)$, для которых $|M| \leq e_1 + \dots + e_n$. Так как число элементов $X(M)$, где $|M| \leq e_1 + \dots + e_n$, равно числу элементов $X_1^{f_1} \dots X_n^{f_n}$ ($f_1 + \dots + f_n \leq e_1 + \dots + e_n$), то следствие вытекает из предложения 1.9.

Пользуясь этим следствием, легко показать, что алгебра $D(G)$ не имеет делителей нуля.

Определение. Пусть G и G' — две группы Ли с единицами e и e' . Эти группы называются *изоморфными*, если существует аналитический изоморфизм группы G на G' . Группы G и G' называются *локально изоморфными*, если существуют открытые окрестности U и U' элементов e и e' соответственно и аналитический диффеоморфизм f окрестности U на U' , удовлетворяющие условиям:

(а) если $x, y, xy \in U$, то $f(xy) = f(x)f(y)$;

(б) если $x', y', x'y' \in U'$, то $f^{-1}(x'y') = f^{-1}(x')f^{-1}(y')$.

Теорема 1.11. *Две группы Ли локально изоморфны тогда и только тогда, когда их алгебры Ли изоморфны.*

Доказательство. Пусть G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — базис алгебры $\mathfrak{g}$. В силу предложения 1.9, мы можем писать $X(M)$ вместо $X^*(M)$. Существуют такие однозначно определенные константы $C_{MN}^P \in \mathbb{R}$, что

$$X(M)X(N) = \sum_P C_{MN}^P X(P),$$

где M, N и P — положительные целочисленные n -наборы. В силу предложения 1.9, константы C_{MN}^P зависят только от алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если N_e — каноническая координатная окрестность точки $e \in G$ и $g \in N_e$, то обозначим через $g_1, \dots, g_n$ канонические координаты точки g . Если $x, y, xy \in N_e$, то

$$\begin{aligned} x &= \exp(x_1 X_1 + \dots + x_n X_n), & y &= \exp(y_1 X_1 + \dots + y_n X_n), \\ xy &= \exp((xy)_1 X_1 + \dots + (xy)_n X_n). \end{aligned}$$

Положим также

$$x^M = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}, \quad y^M = y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}.$$

Применяя формулу (7) к функции $f: x \rightarrow x_k$, получаем для достаточно малых x_i, y_j :

$$(xy)_k = \sum_{M, N} x^M y^N [X(M)X(N)x_k](e). \quad (13)$$

Из формулы (12) следует, что

$$[X(P)x_k](e) = \begin{cases} 1, & \text{если } P = (\delta_{k1}, \delta_{k2}, \dots, \delta_{kn}), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если положить $[k] = (\delta_{1k}, \dots, \delta_{nk})$ то соотношение (13) примет вид

$$(xy)_k = \sum_{M, N} C_{MN}^{[k]} x^M y^N, \quad (14)$$

где x_i, y_j ($1 \leq i, j \leq n$) достаточно малы. Эта последняя формула показывает, что групповая операция в окрестности точки e определяется алгеброй Ли. В частности, группы Ли с изоморфными алгебрами Ли локально изоморфны. Прежде чем доказать обратное утверждение теоремы 1.11, мы докажем общую лемму о гомоморфизмах.

Лемма 1.12. Пусть H и K — группы Ли с алгебрами Ли $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{k}$ соответственно. Пусть φ — аналитический гомоморфизм группы H в K . Тогда $d\varphi_e$ является гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{k}$ и

$$\varphi(\exp X) = \exp d\varphi_e(X) \quad (X \in \mathfrak{h}). \quad (15)$$

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{h}$. Отображение $t \rightarrow \varphi(\exp tX)$ есть аналитический гомоморфизм группы $\mathbf{R}$ в K . Если положить $X' = d\varphi_e(X)$, то из следствия 1.5 видно, что $\varphi(\exp tX) = \exp tX'$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Поскольку φ — гомоморфизм, то $\varphi \circ L_\sigma = L_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi$ для $\sigma \in H$. Отсюда следует, что

$$(d\varphi_\sigma) \circ dL_\sigma \cdot X = dL_{\varphi(\sigma)} \cdot X'.$$

Это значит, что левоинвариантные векторные поля $\tilde{X}$ и $\tilde{X}'$ являются φ -связанными. Поэтому, в силу предложения 3.3 гл. I, $d\varphi_e$ есть гомоморфизм, и лемма доказана.

Чтобы закончить доказательство теоремы 1.11, предположим теперь, что группы Ли G и G' локально изоморфны. Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ соответственно их алгебры Ли. Не ограничивая общности, можно предположить, что G и G' связны. Пусть $(\tilde{G}, \pi)$ и $(\tilde{G}', \pi')$ — универсальные накрывающие группы групп G и G' соответственно. Из леммы 1.12 следует, что $d\pi_e$ и $d\pi'_e$ суть изоморфизмы алгебр Ли. Из первой части доказательства вытекает, что π и π' — локальные изоморфизмы. Поэтому заданный локальный изоморфизм между группами G и G' индуцирует локальный изоморфизм θ между группами $\tilde{G}$ и $\tilde{G}'$. Но группа $\tilde{G}$ односвязна. В силу хорошо известной теоремы о топологических группах (см., например, Шевалле [2], стр. 74), существует непрерывный гомоморфизм $\tilde{\theta}$ группы $\tilde{G}$ в $\tilde{G}'$, совпадающий с θ в некоторой окрестности единицы. В частности, гомоморфизм $\tilde{\theta}$ аналитичен. Меняя местами $\tilde{G}$ и $\tilde{G}'$, мы видим, что $\tilde{\theta}$ есть изоморфизм группы $\tilde{G}$ на $\tilde{G}'$. Из леммы 1.12 следует, что $d\tilde{\theta}_e$ — изоморфизм соответствующих алгебр Ли. Отсюда в свою очередь получается нужный изоморфизм между алгебрами $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$.

Пример. Обозначим через $GL(n, R)$ группу всех вещественных невырожденных квадратных матриц порядка n и через $gl(n, R)$ —алгебру Ли всех вещественных квадратных матриц порядка n , операция коммутирования в которой определена формулой $[A, B] = AB - BA$ ($A, B \in gl(n, R)$). Если рассматривать матрицу $\sigma = (x_{ij}(\sigma)) \in GL(n, R)$ как множество координат некоторой точки из R^{n^2} , то на $GL(n, R)$ можно смотреть как на открытое подмногообразие пространства R^{n^2} . С этой аналитической структурой группа $GL(n, R)$ является группой Ли. Это сразу видно, если рассмотреть выражение чисел $x_{ij}(\sigma\tau^{-1})$ ($\tau, \sigma \in GL(n, R)$) через $x_{kl}(\sigma)$, $x_{pq}(\tau)$, определяемое умножением матриц.

Пусть X —элемент алгебры $\mathfrak{L}(GL(n, R))$, и пусть $\tilde{X}$ —такое левоинвариантное векторное поле на $GL(n, R)$, что $\tilde{X}_e = X$. Обозначим через $(a_{ij}(X))$ матрицу $(\tilde{X}_e x_{ij})$. Мы докажем, что отображение $\varphi: X \rightarrow (a_{ij}(X))$ является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{L}(GL(n, R))$ на $gl(n, R)$. Отображение φ линейно и взаимно однозначно. Действительно, из равенства $(a_{ij}(X)) = 0$ вытекает $\tilde{X}f = 0$ для всех дифференцируемых функций f , откуда $\tilde{X} = 0$. Из рассмотрения размерностей наших алгебр Ли видно, что образ φ равен $gl(n, R)$. Рассмотрим теперь выражение $[\tilde{X}x_{ij}](\sigma) = (dL_\sigma X) x_{ij} = X(x_{ij} \circ L_\sigma)$. Если $\tau \in GL(n, R)$, то

$$(x_{ij} \circ L_\sigma)(\tau) = x_{ij}(\sigma\tau) = \sum_{k=1}^n x_{ik}(\sigma) x_{kj}(\tau). \quad (16)$$

Следовательно,

$$[\tilde{X}x_{ij}](\sigma) = \sum_{k=1}^n x_{ik}(\sigma) a_{kj}(X). \quad (17)$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} [(\tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X})x_{ij}](e) &= \sum_{k=1}^n (a_{ik}(X)a_{kj}(Y) - a_{ik}(Y)a_{kj}(X)) = \\ &= [\varphi(X), \varphi(Y)]_{ij}. \end{aligned}$$

Значит, алгебру Ли группы $GL(n, R)$ можно отождествить с $gl(n, R)$, так что мы будем теперь писать X_{ij} вместо введенного выше обозначения $a_{ij}(X)$. Пользуясь общей формулой

$$[\tilde{X}f](\exp tX) = \frac{d}{dt} f(\exp tX)$$

для дифференцируемой функции f , получаем из (16) и (17)

$$\frac{d}{dt} x_{ij}(\exp tX) = \sum_{k=1}^n x_{ik}(\exp tX) X_{kj}.$$

Таким образом, матричная функция $Y(t) = \exp tX$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dY(t)}{dt} = Y(t) X, \quad Y(0) = I.$$

Так как этому уравнению удовлетворяет также показательная функция от матрицы

$$Y(t) = e^{tX} = I + tX + \frac{t^2 X^2}{2!} + \dots,$$

то мы видим, что $\exp X = e^X$ для всех $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$.

Пусть V — n -мерное векторное пространство над $\mathbf{R}$. Пусть $\mathfrak{gl}(V)$ — алгебра Ли всех эндоморфизмов пространства V и $GL(V)$ — группа всех обратимых эндоморфизмов пространства V . Фиксируем в пространстве V базис $e_1, \dots, e_n$. Каждому $\sigma \in \mathfrak{gl}(V)$ сопоставим матрицу $(x_{ij}(\sigma))$, определенную равенствами

$$\sigma e_j = \sum_{i=1}^n x_{ij}(\sigma) e_i.$$

Отображение $J_e: \sigma \rightarrow (x_{ij}(\sigma))$ есть изоморфизм алгебры $\mathfrak{gl}(V)$ на $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$, ограничение которого на $GL(V)$ является изоморфизмом группы $GL(V)$ на $GL(n, \mathbf{R})$. Этот изоморфизм превращает $GL(V)$ в группу Ли с алгеброй Ли, изоморфной $\mathfrak{gl}(V)$. Если $f_1, \dots, f_n$ — другой базис пространства V , то получается другой изоморфизм $J_f: \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$. Если $A \in GL(V)$ определяется условиями $Ae_i = f_i$ ($1 \leq i \leq n$), то изоморфизмы J_f и J_e связаны равенством $J_e(\sigma) = J_f(A) J_f(\sigma) J_f(A^{-1})$. Так как отображение $g \rightarrow J_f(A) g J_f(A^{-1})$ есть аналитический изоморфизм группы $GL(n, \mathbf{R})$ на себя, то мы получаем: (1) аналитическая структура на группе $GL(V)$ не зависит от выбора базиса; (2) существует изоморфизм алгебры $\mathfrak{L}(GL(V))$ на $\mathfrak{gl}(V)$ (а именно, $J_e^{-1} \circ dJ_e$), который не зависит от выбора базиса в пространстве V .

§ 2. Подгруппы Ли и подалгебры

Определение. Пусть G — группа Ли. Подмногообразие H в G называется *подгруппой Ли*, если

- (i) H является подгруппой (абстрактной) группы G ;
- (ii) H является топологической группой.

Подгруппа Ли сама есть группа Ли. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим аналитическое отображение $\alpha: (x, y) \rightarrow xy^{-1}$ многообразия $G \times G$ в G . Обозначим через α_H ограничение отображения α на $H \times H$. Тогда отображение $\alpha_H: H \times H \rightarrow G$ аналитично и, в силу условия (ii), отображение $\alpha_H: H \times H \rightarrow H$ непрерывно. Согласно лемме 14.1 гл. I, α_H есть аналитическое отображение многообразия $H \times H$ в H , так что H — группа Ли.

Связные подгруппы Ли часто называются *аналитическими подгруппами*.

Теорема 2.1. Пусть G — группа Ли, H — подгруппа Ли в G . Алгебра Ли $\mathfrak{h}$ группы H является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Каждая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли в точности одной связной подгруппы Ли в G .

Доказательство. Если обозначить через I тождественное отображение группы H в G , то, в силу леммы 1.12, dI_e есть гомоморфизм алгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Поскольку H — подмногообразие в G , отображение dI_e взаимно однозначно. Значит, $\mathfrak{h}$ можно рассматривать как подалгебру алгебры $\mathfrak{g}$.

Обозначим через $\exp_{\mathfrak{h}}$ и $\exp_{\mathfrak{g}}$ экспоненциальные отображения алгебры $\mathfrak{h}$ в H и алгебры $\mathfrak{g}$ в G соответственно. Из следствия 1.5 непосредственно вытекает, что

$$\exp_{\mathfrak{h}}(X) = \exp_{\mathfrak{g}}(X) \quad (X \in \mathfrak{h}). \quad (1)$$

Поэтому мы можем отбросить нижние индексы и писать просто $\exp$ вместо $\exp_{\mathfrak{h}}$ и $\exp_{\mathfrak{g}}$. Если $X \in \mathfrak{h}$, то отображение $t \rightarrow \exp tX$ ($t \in \mathbf{R}$) является кривой в H . С другой стороны, допустим, что $X \in \mathfrak{g}$ обладает тем свойством, что отображение $t \rightarrow \exp tX$ есть путь в H , т. е. непрерывная кривая в H . В силу леммы 14.1 гл. I, отображение $t \rightarrow \exp tX$ является тогда аналитическим отображением группы $\mathbf{R}$ в H . Итак, $X \in \mathfrak{h}$, так что

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{отображение } t \rightarrow \exp tX \text{ есть путь в } H\}. \quad (2)$$

Для доказательства второго утверждения теоремы 2.1 предположим, что $\mathfrak{h}$ — некоторая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть H — наименьшая подгруппа группы G , содержащая $\exp \mathfrak{h}$. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — такой базис алгебры $\mathfrak{g}$, что (X_i) ($r < i \leq n$) составляют базис подалгебры $\mathfrak{h}$. Из следствия 1.3 (и предложения 1.9) мы знаем, что все вещественные линейные комбинации элементов $X(M)$, где n -набор M имеет вид $(0, \dots, 0, m_{r+1}, \dots, m_n)$, составляют подалгебру алгебры $U(\mathfrak{g})$. Положим $|X| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$, если $X = x_1 X_1 + \dots + x_n X_n$ ($x_i \in \mathbf{R}$). Выберем такое $\delta > 0$, что $\exp$ является диффеоморфизмом открытого шара $B_\delta = \{X \mid |X| < \delta\}$ на открытую окрестность N_e точки e в G и что имеет место формула (14) из § 1 для $x, y, xy \in N_e$. Обозначим через V подмножество $\exp(\mathfrak{h} \cap B_\delta)$ в N_e . Отображение

$$\exp(x_{r+1}X_{r+1} + \dots + x_n X_n) \rightarrow (x_{r+1}, \dots, x_n)$$

есть система координат на V , относительно которой V является связным многообразием. Поскольку $\mathfrak{h} \cap B_\delta$ есть подмногообразие в B_δ , V является подмногообразием в N_e . Значит, V есть под-

многообразие группы G . Предположим теперь, что $x, y \in V$, $xy \in N_e$, и рассмотрим канонические координаты точки xy , выражение для которых дается формулой (14) из § 1. Поскольку $x_k = y_k = 0$, для $1 \leq k \leq r$, мы получаем (используя сделанное выше замечание об элементах $X(M)$), что $(xy)_k = 0$ для $1 \leq k \leq r$. Таким образом,

$$VV \cap N_e \subset V. \quad (3)$$

Обозначим через $\mathcal{V}$ семейство подмножеств подгруппы H , содержащих некоторую окрестность точки e в V . Проверим, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет следующим шести аксиомам топологической группы (Шевалле [2], гл. II, § II):

- I. Пересечение любых двух подмножеств из $\mathcal{V}$ лежит в $\mathcal{V}$.
- II. Пересечение всех подмножеств из семейства $\mathcal{V}$ есть $\{e\}$.
- III. Любое подмножество группы H , содержащее подмножество из $\mathcal{V}$, лежит в $\mathcal{V}$.
- IV. Если $U \in \mathcal{V}$, то существует такое множество $U_1 \in \mathcal{V}$, что $U_1 U_1 \subset U$.
- V. Если $U \in \mathcal{V}$, то $U^{-1} \in \mathcal{V}$.
- VI. Если $U \in \mathcal{V}$ и $h \in H$, то $hU h^{-1} \in \mathcal{V}$.

Из этих аксиом I, II, III и V очевидны, а IV следует из формулы (3). Для проверки аксиомы VI возьмем $U \in \mathcal{V}$ и $h \in H$. Обозначим через $\log$ отображение, обратное к $\exp: B_\delta \rightarrow N_e$. Тогда $\log$ отображает V на $\mathfrak{h} \cap B_\delta$. Если $X \in \mathfrak{g}$, то существует единственный вектор $X' \in \mathfrak{g}$, такой, что $h \exp tX h^{-1} = \exp tX'$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Отображение $X \rightarrow X'$ является автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$ (лемма 1.12). Оно отображает алгебру $\mathfrak{h}$ в себя, как легко вывести из соотношения (3), используя разложение $h = \exp Z_1 \dots \exp Z_r$, где каждый Z_i принадлежит к $B_\delta \cap \mathfrak{h}$. Следовательно, можно выбрать такое δ_1 ($0 < \delta_1 < \delta$), что открытый шар B_{δ_1} удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} h \exp (B_{\delta_1} \cap \mathfrak{h}) h^{-1} &\subset V, \\ h (\exp B_{\delta_1}) h^{-1} &\subset N_e. \end{aligned}$$

Отображение $X \rightarrow \log (h \exp X h^{-1})$ множества $B_{\delta_1} \cap \mathfrak{h}$ в $B_\delta \cap \mathfrak{h}$ регулярно, так что образ множества $B_{\delta_1} \cap \mathfrak{h}$ является окрестностью точки 0 в $\mathfrak{h}$. Применяя отображение $\exp$, видим, что $h \exp (B_{\delta_1} \cap \mathfrak{h}) h^{-1}$ есть окрестность точки e в V . Это значит, что $hU h^{-1} \in \mathcal{V}$. Таким образом, аксиомы I—VI удовлетворяются. Значит, в H существует такая топология, что H — топологическая группа и что $\mathcal{V}$ — семейство окрестностей точки e в H . В частности, V является окрестностью точки e в H .

Для каждого $z \in G$ рассмотрим отображение

$$\Phi_z: z \exp (x_1 X_1 + \dots + x_n X_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n),$$

которое отображает zN_e на B_δ . Пусть φ_z — ограничение отображения Φ_z на zV . Если $z \in H$, то φ_z отображает окрестность zV

(точки z в H) на открытое подмножество $B_\delta \cap \mathfrak{h}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^{n-r}$. Далее, если $z_1, z_2 \in H$, то отображение $\varphi_{z_1} \circ \varphi_{z_2}^{-1}$ является ограничением отображения $\Phi_{z_1} \circ \Phi_{z_2}^{-1}$ на открытое подмножество из $\mathfrak{h}$ и, значит, аналитично. Поэтому пространство H с набором отображений φ_z ($z \in H$) есть аналитическое многообразие.

Множество V является подмногообразием в G . Так как левые сдвиги суть диффеоморфизмы многообразия H , отсюда следует, что H — подмногообразие в G . Значит, H — подгруппа Ли в G .

Мы знаем, что $\dim H = \dim \mathfrak{h}$. При $i > r$ отображение $t \rightarrow \exp tX_i$ является кривой в H , так что, в силу формулы (2), $X_i \in \mathfrak{h}$. Тем самым доказано, что алгеброй Ли подгруппы H является $\mathfrak{h}$. Далее, подгруппа H связна, так как она порождена множеством $\exp \mathfrak{h}$, которое является связной окрестностью точки e в H .

Наконец, для доказательства единственности предположим, что H_1 — произвольная связная подгруппа Ли группы G , для которой $(H_1)_e = \mathfrak{h}$. Из соотношения (1) видно, что $H = H_1$ (как множества). Так как $\exp$ есть аналитический диффеоморфизм окрестности точки 0 в $\mathfrak{h}$ на окрестность точки e в H и H_1 , то ясно, что группы Ли H и H_1 совпадают.

Следствие 2.2. Пусть H_1 и H_2 — две подгруппы Ли группы Ли G , такие, что $H_1 = H_2$ (как топологические группы). Тогда $H_1 = H_2$ (как группы Ли).

Действительно, соотношение (2) показывает, что H_1 и H_2 имеют одну и ту же алгебру Ли. В силу теоремы 2.1, их компоненты единицы совпадают как группы Ли. Так как левые сдвиги на H_1 и H_2 аналитичны, отсюда сразу следует, что группы Ли H_1 и H_2 совпадают.

Теорема 2.3. Пусть G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и H (абстрактная) подгруппа группы G . Предположим, что H — замкнутое подмножество в G . Тогда на H существует единственная аналитическая структура, такая, что H есть топологическая¹⁾ подгруппа Ли в G .

Сначала докажем простую лемму.

Лемма 2.4. Предположим, что $\mathfrak{g}$ есть прямая сумма $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, где $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ — два векторных подпространства в $\mathfrak{g}$. Тогда существуют такие ограниченные открытые связные окрестности $U_{\mathfrak{m}}$ и $U_{\mathfrak{n}}$ точки 0 в $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ соответственно, что отображение $\Phi: (A, B) \rightarrow \exp A \exp B$ есть диффеоморфизм множества $U_{\mathfrak{m}} \times U_{\mathfrak{n}}$ на открытую окрестность e в G .

¹⁾ Это значит, что топология на H индуцирована топологией группы G . — Прим. перев.

Доказательство. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — такой базис в $\mathfrak{g}$, что $X_i \in \mathfrak{m}$ для $1 \leq i \leq r$, $X_j \in \mathfrak{n}$ для $r < j \leq n$. Обозначим через $\{t_1, \dots, t_n\}$ канонические координаты элемента $\exp(x_1 X_1 + \dots + x_r X_r) \exp(x_{r+1} X_{r+1} + \dots + x_n X_n)$ по отношению к этому базису. Тогда $t_j = \varphi_j(x_1, \dots, x_n)$ ($1 \leq j \leq n$), где функции φ_j аналитичны в точке $(0, \dots, 0)$. Если $x_i = \delta_{ij}s$, то $t_i = \delta_{ij}s$, и якобиан $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ равен 1 при $x_1 = \dots = x_n = 0$. Отсюда следует лемма (предложение 3.1 гл. I).

Замечание. Лемма непосредственно обобщается на произвольные разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_1 + \dots + \mathfrak{m}_s$ алгебры $\mathfrak{g}$ в прямую сумму подпространств.

Возвратимся теперь к доказательству теоремы 2.3. Обозначим через $\mathfrak{h}$ подмножество алгебры $\mathfrak{g}$, заданное условием

$$\mathfrak{h} = \{X \mid \exp tX \in H \text{ для всех } t \in \mathbf{R}\}.$$

Мы докажем, что $\mathfrak{h}$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Сначала заметим, что из $X \in \mathfrak{h}$, $s \in \mathbf{R}$ следует, что $sX \in \mathfrak{h}$. Далее, пусть $X, Y \in \mathfrak{h}$. По лемме 1.8 для заданного $t \in \mathbf{R}$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\exp \frac{t}{n} X \exp \frac{t}{n} Y \right)^n &= \exp \left\{ t(X + Y) + \frac{t^2}{2n} [X, Y] + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\}, \\ \left(\exp \left(-\frac{t}{n} X \right) \exp \left(-\frac{t}{n} Y \right) \exp \frac{t}{n} X \exp \frac{t}{n} Y \right)^{n^2} &= \\ &= \exp \left\{ t^2 [X, Y] + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Левые части этих равенств принадлежат H . Так как H замкнута, то предел при $n \rightarrow \infty$ также принадлежит к H . Значит, $t(X + Y) \in \mathfrak{h}$ и $t^2[X, Y] \in \mathfrak{h}$, что нам и требуется.

Обозначим через H^* связную подгруппу Ли группы G с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$. Тогда $H^* \subseteq H$. Мы докажем теперь, что если H снабжена относительной топологией группы G и H_0 — компонента единицы группы H , то $H^* = H_0$ (как топологические группы). Достаточно доказать, что если N — окрестность точки e в H^* , то N является окрестностью точки e в H . Если бы множество N не было окрестностью точки e в H , то существовала бы такая последовательность $(c_k) \subset H \setminus N$, что $c_k \rightarrow e$ (в топологии группы G). Применим лемму 2.4, взяв $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$ и приняв за $\mathfrak{m}$ любое дополнительное подпространство. Мы можем считать, что $c_k = \exp A_k \exp B_k$, где $A_k \in U_{\mathfrak{m}}$, $B_k \in U_{\mathfrak{n}}$ и $\exp B_k \in N$. Тогда

$$A_k \neq 0, \quad \lim A_k = 0.$$

Поскольку $A_k \neq 0$, существует такое целое $r_k > 0$, что

$$r_k A_k \in U_{\mathfrak{m}}, \quad (r_k + 1) A_k \notin U_{\mathfrak{m}}.$$

Множество U_m ограничено, так что можно предположить, перейдя в случае необходимости к последовательности, что последовательность $(r_k A_k)$ сходится к пределу $A \in m$. Поскольку $(r_k + 1) A_k \notin U_m$ и $A_k \rightarrow 0$, мы видим, что A лежит на границе множества U_m . В частности, $A \neq 0$.

Пусть p, q — любые целые числа ($q > 0$). Тогда можно написать $pr_k = qs_k + t_k$, где s_k, t_k — целые числа и $0 \leq t_k < q$. Имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_k}{q} A_k = 0$, так что

$$\exp \frac{p}{q} A = \lim_k \exp \frac{pr_k}{q} A_k = \lim_k (\exp A_k)^{s_k},$$

что принадлежит к H . По непрерывности $\exp t A \in H$ для каждого $t \in \mathbb{R}$, откуда $A \in \mathfrak{h}$. Это противоречит тому, что $A \neq 0$ и $A \in m$.

Таким образом, мы доказали следующее: (1) подгруппа H_0 открыта в H (нужно взять $N = H^*$); (2) H_0 (и, значит, H) обладает аналитической структурой, совместимой с относительной топологией группы G , с которой она является подмногообразием в G и, значит, подгруппой Ли группы G . Содержащееся в теореме 2.3 утверждение о единственности непосредственно вытекает из следствия 2.2.

З а м е ч а н и е. Рассмотренная выше подгруппа H дискретна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h} = \{0\}$.

Лемма 2.5. Пусть G — группа Ли и H — подгруппа Ли. Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответствующие алгебры Ли. Предположим, что H — топологическая подгруппа группы G . Тогда существует такая открытая окрестность V точки 0 в $\mathfrak{g}$, что

(i) $\exp$ диффеоморфно отображает V на открытую окрестность точки e в G .

(ii) $\exp(V \cap \mathfrak{h}) = (\exp V) \cap H$.

Доказательство. Выберем сначала такую окрестность W_0 точки 0 в $\mathfrak{g}$, чтобы $\exp$ было взаимно однозначным на W_0 . Затем выберем такую открытую окрестность N_0 точки 0 в $\mathfrak{h}$, что $N_0 \subset W_0$ и что $\exp$ диффеоморфно отображает N_0 на открытую окрестность N_e точки e в H . Так как H — топологическое подпространство в G , то существует такая окрестность U_e точки e в G , что $U_e \cap H = N_e$. В заключение выберем такую открытую окрестность V точки 0 в $\mathfrak{g}$, что $V \subset W_0$, $V \cap \mathfrak{h} \subset N_0$ и что $\exp$ диффеоморфно отображает V на открытое подмножество группы G , содержащееся в U_e . Тогда V удовлетворяет условию (i). Условие (ii) также удовлетворяется. Действительно, пусть $X \in V$ — такой элемент, что $\exp X \in H$. Поскольку $\exp X \in U_e \cap H = N_e$, существует такой вектор $X_{\mathfrak{h}} \in N_0$, что $\exp X_{\mathfrak{h}} = \exp X$. Поскольку $X, X_{\mathfrak{h}} \in W_0$, мы имеем $X = X_{\mathfrak{h}}$, так что $\exp X \in \exp(V \cap \mathfrak{h})$. Тем самым дока-

зано, что $(\exp V) \cap H \subset \exp(V \cap \mathfrak{h})$. Так как обратное включение очевидно, то лемма доказана.

Теорема 2.6. Пусть G и H — группы Ли и φ — непрерывный гомоморфизм группы G в H . Тогда φ аналитичен.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ алгебры Ли групп G и H соответственно. Прямое произведение $G \times H$ есть группа Ли, алгеброй Ли которой является прямое произведение $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$, определенное в § 1, п. 1. График гомоморфизма φ — это подмножество в $G \times H$, заданное формулой $K = \{(g, \varphi(g)) \mid g \in G\}$. Очевидно, что K — замкнутая подгруппа в $G \times H$. В силу теоремы 2.3, K обладает единственной аналитической структурой, относительно которой она является топологической подгруппой Ли в $G \times H$. Алгебра Ли этой подгруппы задается условием

$$\mathfrak{k} = \{(X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \mid (\exp tX, \exp tY) \in K \text{ для } t \in \mathbf{R}\}. \quad (4)$$

Пусть N_0 — такая открытая окрестность точки 0 в $\mathfrak{h}$, что $\exp$ диффеоморфно отображает N_0 на открытую окрестность N_e точки e в H . Пусть M_0 и M_e — окрестности, выбранные аналогичным образом для группы G . Мы можем считать, что $\varphi(M_e) \subset N_e$. В силу леммы 2.5, можно также предположить, что $\exp$ диффеоморфно отображает $(M_0 \times N_0) \cap \mathfrak{k}$ на $(M_e \times N_e) \cap K$. Покажем теперь, что для заданного $X \in \mathfrak{g}$ существует единственный такой элемент $Y \in \mathfrak{h}$, что $(X, Y) \in \mathfrak{k}$. Единственность очевидно следует из формулы (4). Действительно, если (X, Y_1) и (X, Y_2) принадлежат к $\mathfrak{k}$, то $(0, Y_1 - Y_2) \in \mathfrak{k}$, так что, в силу формулы (4), $(e, \exp t(Y_1 - Y_2)) \in K$ для всех $t \in \mathbf{R}$. По определению подгруппы K , имеем $\exp t(Y_1 - Y_2) = \varphi(e) = e$ для $t \in \mathbf{R}$, откуда $Y_1 - Y_2 = 0$. Чтобы доказать существование вектора Y , выберем такое целое число $r > 0$, чтобы вектор $X_r = \frac{1}{r}X$ лежал в M_0 .

Так как $\varphi(\exp X_r) \in N_e$, то существует единственный такой вектор $Y_r \in N_0$, что $\exp Y_r = \varphi(\exp X_r)$, и единственный такой вектор $Z_r \in (M_0 \times N_0) \cap \mathfrak{k}$, что

$$\exp Z_r = (\exp X_r, \exp Y_r).$$

Но отображение $\exp$ взаимно однозначно на $M_0 \times N_0$, поэтому $Z_r = (X_r, Y_r)$, и мы можем положить $Y = rY_r$. Полученное таким образом отображение $\psi: X \rightarrow Y$, очевидно, является гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{h}$. Соотношение (4) показывает, что

$$\varphi(\exp tX) = \exp t\psi(X) \quad (X \in \mathfrak{g}). \quad (5)$$

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — базис алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда, в силу формулы (5),

$$\begin{aligned} & \varphi((\exp t_1 X_1)(\exp t_2 X_2) \dots (\exp t_n X_n)) = \\ & = (\exp t_1 \psi(X_1))(\exp t_2 \psi(X_2)) \dots (\exp t_n \psi(X_n)). \end{aligned} \quad (6)$$

Замечание, следующее за леммой 2.4, показывает, что отображение $(\exp t_1 X_1) \dots (\exp t_n X_n) \rightarrow (t_1, \dots, t_n)$ является системой координат в некоторой окрестности точки e в G . Но тогда, в силу формулы (6), отображение φ аналитично в точке e и, значит, всюду на G .

Мы увидим сейчас, что простое предположение о счетности позволяет существенно усилить соотношение (2) и следствие 2.2.

Предложение 2.7. Пусть G — группа Ли и H — подгруппа Ли. Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответствующие алгебры Ли. Предположим, что группа Ли H имеет не более чем счетное множество компонент. Тогда

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp tX \in H \text{ для всех } t \in \mathbf{R}\}.$$

Доказательство. Применим лемму 2.4, положив $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}$ и взяв в качестве $\mathfrak{m}$ любое дополнительное к $\mathfrak{h}$ подпространство в $\mathfrak{g}$. Обозначим через V множество $\exp U_{\mathfrak{m}} \exp U_{\mathfrak{h}}$ (в обозначениях леммы 2.4) с относительной топологией группы G и положим

$$\mathfrak{a} = \{A \in U_{\mathfrak{m}} \mid \exp A \in H\}.$$

Тогда

$$H \cap V = \bigcup_{A \in \mathfrak{a}} \exp A \exp U_{\mathfrak{h}},$$

причем, в силу леммы 2.4, слагаемые попарно не пересекаются. Каждый член этой суммы является окрестностью в H . Поскольку H имеет счетную базу, множество $\mathfrak{a}$ должно быть счетным. Рассмотрим теперь отображение π множества V на $U_{\mathfrak{m}}$, заданное формулой $\pi(\exp X \exp Y) = X$ ($X \in U_{\mathfrak{m}}$, $Y \in U_{\mathfrak{h}}$). Это отображение непрерывно и отображает $H \cap V$ на $\mathfrak{a}$. Компонента точки e в $H \cap V$ (в топологии множества V) отображается при помощи π на связное счетное подмножество в $U_{\mathfrak{m}}$, т. е. на одну точку 0 . Так как $\pi^{-1}(0) = \exp U_{\mathfrak{h}}$, то мы видим, что $\exp U_{\mathfrak{h}}$ есть компонента точки e в $H \cap V$ (в топологии множества V).

Пусть теперь $X \in \mathfrak{g}$ — такой элемент, что $\exp tX \in H$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Отображение $\varphi: t \rightarrow \exp tX$ группы $\mathbf{R}$ в G непрерывно. Значит, существует такая связная окрестность U точки 0 в $\mathbf{R}$, что $\varphi(U) \subset V$. Тогда $\varphi(U) \subset H \cap U$ и, поскольку $\varphi(U)$ связно, $\varphi(U) \subset \exp U_{\mathfrak{h}}$. Но $\exp U_{\mathfrak{h}}$ есть произвольно малая окрестность точки e в H , так что φ есть непрерывное отображение группы $\mathbf{R}$ в H . В силу формулы (2), $X \in \mathfrak{h}$, и предложение доказано.

Замечание. Предположение счетности в предложении 2.7 является существенным, что сразу видно из рассмотрения подгруппы Ли с дискретной топологией.

Следствие 2.8. Пусть G — группа Ли, и пусть H_1 и H_2 — две подгруппы Ли, каждая из которых имеет счетное множество компонент. Предположим, что $H_1 = H_2$ (как множества). Тогда $H_1 = H_2$ (как группы Ли).

Действительно, из предложения 2.7 видно, что H_1 и H_2 имеют одну и ту же алгебру Ли.

Следствие 2.9. Пусть G — группа Ли, и пусть K и H — две аналитические подгруппы группы G . Допустим, что $K \subset H$. Тогда группа Ли K является аналитической подгруппой группы Ли H .

Пусть $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{h}$ — алгебры Ли групп K и H . Тогда $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$, в силу предложения 2.7. Обозначим через K^* аналитическую подгруппу группы H с алгеброй Ли $\mathfrak{k}$. Тогда аналитические подгруппы K и K^* группы G имеют одну и ту же алгебру Ли. В силу теоремы 2.1, группы Ли K и K^* совпадают.

Обозначим через S^1 окружность радиуса 1 и через T — группу $S^1 \times S^1$. Пусть $t \rightarrow \gamma(t)$ ($t \in \mathbf{R}$) непрерывный взаимно однозначный гомоморфизм группы $\mathbf{R}$ в T . Если перенести аналитическую структуру группы $\mathbf{R}$ при помощи этого гомоморфизма, то получится подгруппа Ли $\Gamma = \gamma(\mathbf{R})$ в T . Эта подгруппа Ли не является топологической подгруппой. Мы увидим сейчас, что эти аномалии встречаются одновременно.

Теорема 2.10. Пусть G — группа Ли и H — подгруппа Ли в G .

1. Если H — топологическая подгруппа в G , то H замкнута в G ,
2. Если подгруппа H имеет не более чем счетное множество компонент и замкнута в G , то она является топологической подгруппой группы G .

Доказательство. 1. Хотя мы не наложили никаких условий счетности, достаточно доказать, что если последовательность $(h_n) \subset H$ сходится (в G) к некоторому элементу $g \in G$, то $g \in H$. Обозначим через $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}$ алгебры Ли групп H и G соответственно. Пусть V — окрестность точки 0 в $\mathfrak{g}$, обладающая свойствами из леммы 2.5. Мы можем взять V ограниченной. Пусть U — открытая окрестность точки 0 в $\mathfrak{g}$, содержащаяся в V , и такая, что $\exp(-U)\exp U \subset \exp V$. Тогда существует такое целое число N , что $h_n \in g \exp U$ для $n \geq N$. Отсюда следует, что $h_n^{-1}h_n \in (\exp V) \cap H$ для $n \leq N$. В силу леммы 2.5, существует такой элемент $X_n \in V \cap \mathfrak{h}$, что

$$h_n^{-1}h_n = \exp X_n \quad (n \geq N).$$

Так как V ограничена, то можно, перейдя в случае надобности к подпоследовательности, предполагать, что последовательность (X_n) сходится к некоторому элементу $Z \in \mathfrak{g}$. Тогда $Z \in \mathfrak{h}$ и (h_n) сходится к $h_N \exp Z$, так что $g \in H$.

2. Так как подгруппа H замкнута в G , то по теореме 2.3 она обладает аналитической структурой, относительно которой является топологической подгруппой Ли группы G . Обозначим через H' эту подгруппу Ли. Тогда тождественное отображение $I: H \rightarrow H'$ непрерывно. Каждая компонента группы H лежит в некоторой компоненте группы H' . Поскольку H имеет счетное множество компонент, тем же свойством обладает подгруппа H' . Теперь свойство 2 вытекает из следствия 2.8.

§ 3. Группы Ли преобразований

Пусть M — хаусдорфово пространство и G — топологическая группа, причем с каждым элементом $g \in G$ связан гомеоморфизм $p \rightarrow g \cdot p$ пространства M на себя, такой, что

$$(1) \quad g_1 g_2 \cdot p = g_1 \cdot (g_2 \cdot p) \quad \text{для } p \in M, g_1, g_2 \in G;$$

(2) отображение $(g, p) \rightarrow g \cdot p$ прямого произведения $G \times M$ на M непрерывно.

Тогда группа G называется *топологической группой преобразований* пространства M . Из свойства (1) следует, что $e \cdot p = p$ для всех $p \in M$. Если e — единственный элемент группы G , оставляющий неподвижной каждую точку $p \in M$, то группу G называют *эффективной* и говорят, что она эффективно действует на M .

Пример. Пусть A — топологическая группа и F — замкнутая подгруппа группы A . Множество левых смежных классов aF ($a \in A$) обозначается через A/F . Обозначим через π естественное отображение группы A на A/F . Множество A/F можно снабдить топологией, *естественной топологией*, которая определяется тем, что π — непрерывное и открытое отображение. Эта топология превращает A/F в хаусдорфово пространство. Нетрудно видеть, что если сопоставить каждому $a \in A$ отображение $\tau(a): bF \rightarrow abF$, то A будет топологической группой преобразований пространства A/F . Группа A эффективна тогда и только тогда, когда F не содержит нормальных делителей группы A . Факторпространство A/F является *однородным пространством*, т. е. обладает транзитивной группой гомеоморфизмов, а именно, группой $\tau(A)$. Теорема 3.2, которая будет доказана ниже, решает обратный вопрос, а именно, вопрос о представлении произвольного однородного пространства в виде факторпространства.

Лемма 3.1 (теорема о категории). Если локально компактное пространство M является счетной суммой

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n,$$

где каждое M_n есть замкнутое множество, то по крайней мере одно из множеств M_n содержит подмножество, открытое в M .

Доказательство. Предположим, что ни одно из множеств M_n не содержит открытого в M подмножества. Пусть U_1 — открытое подмножество в M , замыкание которого $\bar{U}_1$ компактно. Выберем последовательно

$a_1 \in U_1 \setminus M_1$ и окрестность U_2 точки a_1 , такие, что $\bar{U}_2 \subset U_1$ и $\bar{U}_2 \cap M_1 = \emptyset$;

$a_2 \in U_2 \setminus M_2$ и окрестность U_3 точки a_2 , такие, что $\bar{U}_3 \subset U_2$ и $\bar{U}_3 \cap M_2 = \emptyset$ и т. д.

Тогда $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots$ есть убывающая последовательность непустых компактных подмножеств. Значит, существует точка $b \in M$, содержащаяся во всех $\bar{U}_n$. Но тогда $b \notin M_n$ для всех n , что приводит к противоречию.

Теорема 3.2. Пусть G — локально компактная группа со счетной базой. Предположим, что G является транзитивной топологической группой преобразований локально компактного хаусдорфова пространства M . Пусть p — некоторая точка в M и H — подгруппа группы G , оставляющая точку p неподвижной. Тогда H замкнута, и отображение

$$gH \rightarrow g \cdot p$$

является гомеоморфизмом пространства G/H на M .

Доказательство. Так как отображение $\varphi: g \rightarrow g \cdot p$ группы G на M непрерывно, то $H = \varphi^{-1}(p)$ замкнуто в G . Естественное отображение $\pi: G \rightarrow G/H$ открыто и непрерывно. Поэтому для доказательства теоремы 3.2 достаточно показать, что φ открыто. Пусть V — открытое подмножество группы G и g — точка в V . Выберем такую компактную окрестность U точки e в G , что $U = U^{-1}$, $gU^2 \subset V$. Существует такая последовательность $(g_n) \subset G$, что $G = \bigcup_n g_n U$. Так как группа G транзитивна, то отсюда следует, что $M = \bigcup_n g_n U \cdot p$. Каждое слагаемое является компактным и, значит, замкнутым подмножеством в M . По доказанной выше лемме одно из слагаемых, и значит $U \cdot p$, содержит внутреннюю точку $u \cdot p$. Тогда p является внутренней точкой множества $u^{-1}U \cdot p \subset U^2 \cdot p$ и, следовательно, $g \cdot p$ есть внутренняя точка множества $V \cdot p$. Отсюда видно, что отображение φ открыто.

Определение. Группа H называется *группой изотропии* в точке p (или *подгруппой изотропии* группы G в точке p)¹⁾.

Следствие 3.3. Пусть G и X — две локально компактные группы. Предположим, что G имеет счетную базу. Тогда каждый непрерывный гомоморфизм ψ группы G на X является открытым.

Действительно, если связать с каждым $g \in G$ гомеоморфизм $x \rightarrow \psi(g)x$ группы X на себя, то G станет транзитивной топологической группой преобразований пространства X . Если f — единица группы X , то из приведенного выше доказательства видно, что отображение $g \rightarrow \psi(g)f$ группы G на X открыто.

Пусть G — группа Ли и M — дифференцируемое многообразие. Предположим, что G является топологической группой преобразований многообразия M . Говорят, что G есть *группа Ли преобразований* многообразия M , если отображение $(g, p) \rightarrow g \cdot p$ является дифференцируемым отображением многообразия $G \times M$ на M . Отсюда следует, что для каждого $g \in G$ отображение $p \rightarrow g \cdot p$ является диффеоморфизмом многообразия M на себя.

Пусть G — группа Ли преобразований многообразия M . Каждому элементу X алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G можно сопоставить векторное поле X^+ на M , определенное формулой

$$[X^+ f](p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\exp tX \cdot p) - f(p)}{t}$$

для $f \in C^\infty(M)$, $p \in M$. Существование поля X^+ следует из того факта, что отображение $(g, p) \rightarrow g \cdot p$ есть дифференцируемое отображение многообразия $G \times M$ на M . Легко также проверить, что X^+ — дифференцирование алгебры $C^\infty(M)$. Оно называется векторным полем на многообразии M , индуцированным однопараметрической подгруппой $\exp tX$ ($t \in \mathbf{R}$).

Теорема 3.4. Пусть G — группа Ли преобразований многообразия M . Пусть X, Y — элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G , и пусть X^+, Y^+ — векторные поля на M , индуцированные однопараметрическими подгруппами $\exp tX$ и $\exp tY$ ($t \in \mathbf{R}$). Тогда

$$[X^+, Y^+] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y^+ - dg_t Y^+),$$

где $g_t = \exp tX$.

Доказательство. Пусть $f \in C^\infty(M)$ и $q \in M$. Функция $F(t, q) = f(\exp tX \cdot q)$ дифференцируема по t , так что

$$F(t, q) - F(0, q) = t \int_0^1 \left[\frac{\partial F}{\partial t} \right] (st, q) ds = h(t, q) t,$$

¹⁾ В русской литературе подгруппу H называют также *стационарной* или *стабильной* подгруппой точки p . — Прим. перев.

где $h \in C^\infty(\mathbf{R} \times M)$ и $h(0, q) = [X^+ f](q)$. Тогда

$$(dg_t \cdot Y^+)_p f = [Y^+ (f \circ g_t)](g_t^{-1} \cdot p) = [Y^+ f](g_t^{-1} \cdot p) + t [Y^+ h](t, g_t^{-1} \cdot p),$$

откуда

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y^+ - dg_t Y^+)_p f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{[Y^+ f](p) - [Y^+ f](g_t^{-1} \cdot p)\} + \\ &+ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{[Y^+ f](g_t^{-1} \cdot p) - [Y^+ (f \circ g_t)](g_t^{-1} \cdot p)\} = \\ &= -[-X^+ Y^+ f](p) - \lim_{t \rightarrow 0} [Y^+ h](t, g_t^{-1} \cdot p) = (X^+ Y^+ - Y^+ X^+)_p f. \end{aligned}$$

§ 4. Факторпространства и однородные пространства

Пусть G — группа Ли и H — замкнутая подгруппа. На группе H будет всегда рассматриваться аналитическая структура, о которой говорится в теореме 2.3. Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ алгебры Ли групп G и H соответственно и через $\mathfrak{m}$ — любое векторное подпространство в $\mathfrak{g}$, такое, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$ (прямая сумма). Пусть π — естественное отображение группы G на пространство G/H левых смежных классов gH ($g \in G$). Как обычно, снабдим пространство G/H естественной топологией, определенной требованием, чтобы π было непрерывным и открытым. Положим $p_0 = \pi(e)$ и обозначим через ψ ограничение отображения $\exp$ на $\mathfrak{m}$.

Лемма 4.1. *Существует такая окрестность U точки 0 в $\mathfrak{m}$, что ψ отображает ее гомеоморфно и что π гомеоморфно отображает $\psi(U)$ на некоторую окрестность точки p_0 в G/H .*

Доказательство. Пусть $U_{\mathfrak{m}}$, $U_{\mathfrak{h}}$ обладают свойствами, описанными в лемме 2.4 для $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$. Так как H имеет относительную топологию группы G , мы можем выбрать такую окрестность V точки e в G , что $V \cap H = \exp U_{\mathfrak{h}}$. Пусть U — такая компактная окрестность точки 0 в $U_{\mathfrak{m}}$, что $\exp(-U) \exp U \subset V$. Тогда ψ гомеоморфно отображает U на $\psi(U)$. Далее, π взаимно однозначно на $\psi(U)$. Действительно, если для $X', X'' \in U$ имеем $\pi(\exp X') = \pi(\exp X'')$, то $\exp(-X'') \exp X' \subset V \cap H$, откуда $\exp X' = \exp X'' \exp Z$, где $Z \in U_{\mathfrak{h}}$. Из леммы 2.4 можно заключить, что $X' = X''$, $Z = 0$. Следовательно, π взаимно однозначно на $\psi(U)$ и, значит, является гомеоморфизмом. Наконец, $U \times U_{\mathfrak{h}}$ есть окрестность точки $(0, 0)$ в $U_{\mathfrak{m}} \times U_{\mathfrak{h}}$. Значит, $\exp U \exp U_{\mathfrak{h}}$ — окрестность точки e в G и, поскольку π является открытым отображением, множество $\pi(\exp U \exp U_{\mathfrak{h}}) = \pi(\psi(U))$ есть окрестность точки p_0 в G/H . Тем самым лемма доказана. Множество $\psi(U)$ будет в дальнейшем называться *локальным сечением*.

Обозначим через N_0 внутренность множества $\pi(\psi(U))$ и через $X_1, \dots, X_r$ — некоторый базис пространства $\mathfrak{m}$. Если $g \in G$, то отображение

$$\pi(g \exp(x_1 X_1 + \dots + x_r X_r)) \rightarrow (x_1, \dots, x_r)$$

есть гомеоморфизм открытого множества $g \cdot N_0$ на открытое подмножество в $\mathbf{R}^r$. Легко видеть, что пространство G/H , снабженное этими картами, является аналитическим многообразием. Более того, если $x \in G$, то отображение $\tau(x) : yH \rightarrow xyH$ есть аналитический диффеоморфизм многообразия G/H на себя.

Теорема 4.2. Пусть G — группа Ли, H — замкнутая подгруппа группы G , G/H — пространство левых смежных классов gH с естественной топологией. Тогда G/H обладает единственной аналитической структурой, такой, что G есть группа Ли преобразований многообразия G/H .

Используя введенные выше обозначения, положим $B = \psi(\overset{\circ}{U})$, где $\overset{\circ}{U}$ — внутренность множества U . Вспоминая, что отображение Φ из леммы 2.4 является диффеоморфизмом, мы видим, что множество B есть подмногообразие в G . Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} G \times B & \xrightarrow{\Phi} & G \\ I \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G \times N_0 & & G/H \end{array}$$

с отображениями

$$\begin{aligned} I \times \pi: & (g, x) \rightarrow (g, xH) \quad (g \in G, x \in B); \\ \Phi: & (g, x) \rightarrow gx \quad (g \in G, x \in B). \end{aligned}$$

Отображение $(g, xH) \rightarrow gxH$ многообразия $G \times N_0$ на G/H можно записать в виде $\pi \circ \Phi \circ (I \times \pi)^{-1}$, а это аналитическое отображение. Значит, G — группа Ли преобразований многообразия G/H . Единственность вытекает из следующего предложения, которое следует сравнить с теоремой 3.2.

Предложение 4.3. Пусть G — транзитивная группа Ли преобразований многообразия M класса C^∞ . Пусть p_0 — точка в M , и пусть через G_{p_0} обозначена подгруппа группы G , оставляющая точку p_0 неподвижной. Тогда G_{p_0} замкнута. Обозначим через α отображение $gG_{p_0} \rightarrow g \cdot p_0$ пространства G/G_{p_0} на M .

(а) Если α — гомеоморфизм, то оно есть диффеоморфизм (G/G_{p_0} снабжено определенной выше аналитической структурой).

(б) Предположим, что α — гомеоморфизм и что M связно. Тогда G_0 , компонента единицы группы G , транзитивна на M .

Доказательство. (а) Положим $H = G_{p_0}$ и применим лемму 4.1. Пусть B и N_0 имеют то же значение, что и выше. Тогда B есть подмногообразие группы G , и π диффеоморфно отображает его на N_0 . Обозначим через i тождественное отображение множества B в G и через β — отображение

$B \xrightarrow{i} G$
 $\pi \downarrow \quad \downarrow \beta$
 $N_0 \xrightarrow{\alpha} M$

$g \rightarrow g \cdot p_0$ группы G на M . Согласно предположению, α_{N_0} , ограничение отображения α на N_0 , есть гомеоморфизм множества N_0 на открытое подмножество в M . Отображение α дифференцируемо, так как $\alpha_{N_0} = \beta \circ i \circ \pi^{-1}$. Чтобы показать, что α^{-1} дифференцируемо, мы покажем сначала, что матрица Якоби отображения β в точке $g = e$ имеет ранг r_β , равный $\dim M$.

Отображение $d\beta_e$ есть линейное отображение пространства $\mathfrak{g}$ в M_{p_0} . Предположим, что X содержится в ядре отображения $d\beta_e$. Тогда для $f \in C^\infty(M)$ имеем

$$0 = (d\beta_e X) f = X(f \circ \beta) = \left\{ \frac{d}{dt} f(\exp tX \cdot p_0) \right\}_{t=0}. \quad (1)$$

Пусть $s \in \mathbf{R}$. Применим (1) к функции $f^*(q) = f(\exp sX \cdot q)$ ($q \in M$). Тогда получим

$$0 = \left\{ \frac{d}{dt} f^*(\exp tX \cdot p_0) \right\}_{t=0} = \left\{ \frac{d}{dt} f(\exp tX \cdot p_0) \right\}_{t=s},$$

откуда видно, что $f(\exp sX \cdot p_0)$ постоянна по s . Поскольку функция f произвольна, $\exp sX \cdot p_0 = p_0$ для всех s , так что $X \in \mathfrak{h}$. С другой стороны, очевидно, что отображение $d\beta_e$ равно 0 на $\mathfrak{h}$. Значит, $\mathfrak{h}$ — ядро отображения $d\beta_e$. Отсюда $r_\beta = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}$. Но поскольку α — гомеоморфизм, из топологической инвариантности размерности следует, что $\dim G/H = \dim M$. Итак, $d\beta_e$ отображает $\mathfrak{g}$ на M_{p_0} и $r_\beta = \dim M$. Тем самым доказано (а).

(б) Если α — гомеоморфизм, то определенное выше отображение β открыто. Существует такое подмножество $\{x_\gamma \mid \gamma \in I\}$ группы G , что $G = \bigcup_{\gamma \in I} G_0 x_\gamma$. Каждая орбита $G_0 x_\gamma \cdot p_0$ есть открытое подмножество в M . Две орбиты $G_0 x_\gamma \cdot p_0$ и $G_0 x_{\gamma'} \cdot p_0$ либо не пересекаются, либо совпадают. Поэтому, поскольку M связно, все орбиты должны совпадать, откуда следует (б).

Определение. В дальнейшем факторпространство G/H (G — группа Ли, H — ее замкнутая подгруппа) всегда будет рассматриваться с аналитической структурой, описанной в теореме 4.2. Если $x \in G$, то диффеоморфизм $yH \rightarrow xyH$ многообразия G/H на себя будет обозначаться через $\tau(x)$. Группа H называется *группой изотропии*. Группа H^* линейных преобразований $(d\tau(h))_{\pi(e)}$ ($h \in H$) называется *линейной группой изотропии*.

Пусть N — подгруппа Ли группы G . Тогда подмножество $N \cap H$ замкнуто в N , и факторпространство $N/N \cap H$ находится

во взаимно однозначном соответствии с орбитой точки $\pi(e)$ в G/H относительно группы N . Если обозначить через $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{h}_1$ алгебры Ли групп N и $N \cap H$ соответственно, то $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ в силу формулы (2) § 2 и теоремы 2.3.

Предложение 4.4.

(а) Орбита $N/N \cap H$ является подмногообразием в G/H .

(б) Если N — топологическая подгруппа в G и если подгруппа H компактна, то подмногообразие $N/N \cap H$ есть замкнутое топологическое подпространство в G/H .

Доказательство. (а) Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{i} & G \\ \pi_1 \downarrow & I & \downarrow \pi \\ N/N \cap H & \longrightarrow & G/H \end{array}$$

где π_1 и π — естественные отображения группы N на $N/N \cap H$ и группы G на G/H соответственно. Через i обозначено тождественное отображение подгруппы N в G и через I — отображение $n(N \cap H) \rightarrow i(n)H$ многообразия $N/N \cap H$ в G/H . Пусть $\mathfrak{n}_1$ — дополнительное к $\mathfrak{h}_1$ подпространство в $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{g}_1$ — дополнительное к $\mathfrak{h} + \mathfrak{n}_1$ подпространство в $\mathfrak{g}$. Применим лемму 4.1 к разложениям $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + (\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{g}_1)$. Тогда получим подмногообразия $B_N \subset N$, $B_G \subset G$, проходящие через e , которые π_1 и π диффеоморфно отображают на открытые окрестности точек $\pi_1(e)$ в $N/N \cap H$ и $\pi(e)$ в G/H соответственно. В качестве B_N мы можем здесь взять подмногообразие в B_G . Положим $V_1 = \pi_1(B_N)$, $V = \pi(B_G)$. Ограничение I_{V_1} отображения I на V_1 можно записать в виде $I_{V_1} = \pi \circ i \circ \pi_1^{-1}$. Поэтому матрица Якоби отображения I_{V_1} в точке $\pi_1(e)$ имеет ранг, равный $\dim(N/N \cap H)$. Значит, I регулярен, и (а) доказано.

(б) Поскольку N теперь — топологическая подгруппа в G , рассмотренная выше диаграмма показывает, что I гомеоморфно отображает $N/N \cap H$ в G/H . Чтобы показать, что $N/N \cap H$ замкнуто, возьмем в $N/N \cap H$ последовательность (p_k) , сходящуюся к точке $q \in G/H$. Выберем такой элемент $g \in G$, что $\pi(g) = q$. Можно предположить, что все p_k принадлежат к окрестности $g \cdot V$ точки q . Значит, существует единственный элемент $g_k \in gB_G$, такой, что $\pi(g_k) = p_k$. Так как π — гомеоморфизм множества gB_G на $g \cdot V$, то $\lim g_k = g$.

С другой стороны, для каждого индекса k существует такой элемент $n_k \in N$, что $\pi_1(n_k) = p_k$. Следовательно, существует такой элемент $h_k \in H$, что $g_k = n_k h_k$. Поскольку подгруппа H компактна, мы можем считать, что (h_k) — сходящаяся последовательность.

Отсюда следует, что последовательность (n_k) сходится. Ее предел n^* лежит в N , так как подгруппа N замкнута в G . Следовательно, $\pi_1(n^*) = q$, так что орбита $N/N \cap H$ замкнута.

Замечание. Предложение 4.4 справедливо и в более общей ситуации; см. упражнение В.3 в конце этой главы и упражнение 5 из гл. IV.

§ 5. Присоединенная группа

Пусть $\mathfrak{a}$ алгебра Ли над полем R . Как обычно, обозначим через $GL(\mathfrak{a})$ группу всех невырожденных эндоморфизмов пространства $\mathfrak{a}$. Напомним, что эндоморфизм векторного пространства V (в частности, алгебры Ли)—это просто линейное отображение пространства V в себя. Алгеброй Ли $\mathfrak{gl}(\mathfrak{a})$ группы $GL(\mathfrak{a})$ является векторное пространство всех эндоморфизмов пространства $\mathfrak{a}$ с операцией коммутирования $[A, B] = AB - BA$. Отображение $X \rightarrow \text{ad } X$ ($X \in \mathfrak{a}$) есть гомоморфизм алгебры $\mathfrak{a}$ на некоторую подалгебру $\text{ad}(\mathfrak{a})$ в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{a})$. Обозначим через $\text{Int}(\mathfrak{a})$ аналитическую подгруппу группы $GL(\mathfrak{a})$, алгеброй Ли которой является $\text{ad}(\mathfrak{a})$. Группа $\text{Int}(\mathfrak{a})$ называется *присоединенной группой* алгебры $\mathfrak{a}$.

Группа $\text{Aut}(\mathfrak{a})$ всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{a}$ является замкнутой подгруппой в $GL(\mathfrak{a})$. Значит, $\text{Aut}(\mathfrak{a})$ обладает единственной аналитической структурой, относительно которой она является топологической подгруппой Ли в $GL(\mathfrak{a})$. Обозначим через $\mathfrak{d}(\mathfrak{a})$ алгебру Ли группы $\text{Aut}(\mathfrak{a})$. Из § 2 мы знаем, что $\mathfrak{d}(\mathfrak{a})$ состоит из всех таких эндоморфизмов D пространства $\mathfrak{a}$, что $e^{tD} \in \text{Aut}(\mathfrak{a})$ для всех $t \in R$. Пусть $X, Y \in \mathfrak{a}$. Из равенства $e^{tD}[X, Y] = [e^{tD}X, e^{tD}Y]$ для всех $t \in R$ следует, что

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]. \quad (1)$$

Эндоморфизм D пространства $\mathfrak{a}$, удовлетворяющий условию (1) для всех $X, Y \in \mathfrak{a}$, называется *дифференцированием* алгебры $\mathfrak{a}$. По индукции из равенства (1) получается

$$D^k[X, Y] = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} [D^i X, D^j Y] \quad (i \geq 0, j \geq 0), \quad (2)$$

где D^0 тождественное отображение пространства $\mathfrak{a}$. Из (2) следует, что $e^{tD}[X, Y] = [e^{tD}X, e^{tD}Y]$. Таким образом, $\mathfrak{d}(\mathfrak{a})$ состоит из всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{a}$. Пользуясь тождеством Якоби, мы видим, что $\text{ad}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{d}(\mathfrak{a})$ и, значит, $\text{Int}(\mathfrak{a}) \subset \text{Aut}(\mathfrak{a})$. Элементы алгебры $\text{ad}(\mathfrak{a})$ и группы $\text{Int}(\mathfrak{a})$ соответственно называются *внутренними дифференцированиями* и *внутренними автоморфизмами* алгебры $\mathfrak{a}$. Поскольку $\text{Aut}(\mathfrak{a})$ — топологическая подгруппа в $GL(\mathfrak{a})$, тождественное отображение группы $\text{Int}(\mathfrak{a})$ в $\text{Aut}(\mathfrak{a})$ непрерывно. В силу леммы 14.1 гл. I, $\text{Int}(\mathfrak{a})$ есть под-

группа Ли в группе $\text{Aut}(\mathfrak{a})$. Пусть $s \in \text{Aut}(\mathfrak{a})$. Тогда отображение $\sigma: g \rightarrow sgs^{-1}$ есть автоморфизм группы $\text{Aut}(\mathfrak{a})$, и $(d\sigma)_e$ есть автоморфизм алгебры $\mathfrak{d}(\mathfrak{a})$. Если A, B — эндоморфизмы некоторого векторного пространства и если существует A^{-1} , то $Ae^BA^{-1} = e^{ABA^{-1}}$. Применяя лемму 1.12, получаем

$$(d\sigma)_e D = sDs^{-1} \quad \text{для } D \in \mathfrak{d}(\mathfrak{a}).$$

Если $X \in \mathfrak{a}$, то $s \text{ad } Xs^{-1} = \text{ad}(s \cdot X)$, откуда

$$(d\sigma)_e \text{ad } X = \text{ad}(s \cdot X)$$

и, следовательно,

$$\sigma \cdot e^{\text{ad } X} = e^{\text{ad}(s \cdot X)} \quad (X \in \mathfrak{a}).$$

Но группа $\text{Int}(\mathfrak{a})$ связна и, значит, порождена элементами $e^{\text{ad } X}$ ($X \in \mathfrak{a}$). Отсюда следует, что $\text{Int}(\mathfrak{a})$ — нормальный делитель группы $\text{Aut}(\mathfrak{a})$ и что автоморфизм s алгебры $\mathfrak{a}$ индуцирует аналитический изоморфизм $g \rightarrow sgs^{-1}$ группы $\text{Int}(\mathfrak{a})$ на себя.

Более общим образом, пусть s — изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{a}$ на алгебру Ли $\mathfrak{b}$ (обе алгебры Ли над полем $\mathbf{R}$). Тогда отображение $g \rightarrow sgs^{-1}$ есть изоморфизм группы $\text{Aut}(\mathfrak{a})$ на $\text{Aut}(\mathfrak{b})$, отображающий $\text{Int}(\mathfrak{a})$ на $\text{Int}(\mathfrak{b})$.

Пусть G — группа Ли. Если $\sigma \in G$, то отображение $I(\sigma): g \rightarrow \sigma g \sigma^{-1}$ является аналитическим изоморфизмом группы G на себя. Положим $\text{Ad}(\sigma) = dI(\sigma)_e$. Иногда мы будем писать $\text{Ad}_G(\sigma)$ вместо $\text{Ad}(\sigma)$, если последняя запись может привести к недоразумениям. Отображение $\text{Ad}(\sigma)$ является автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$, алгебры Ли группы G . В силу леммы 1.12,

$$\exp \text{Ad}(\sigma) X = \sigma \exp X \sigma^{-1} \quad \text{для } \sigma \in G, X \in \mathfrak{g}. \quad (3)$$

Отображение $\sigma \rightarrow \text{Ad}(\sigma)$ есть гомоморфизм группы G в $GL(\mathfrak{g})$. Этот гомоморфизм называется *присоединенным представлением* группы G . Докажем, что этот гомоморфизм аналитичен. Для этого достаточно показать, что для каждого $X \in \mathfrak{g}$ и каждой линейной функции ω на $\mathfrak{g}$ функция $\sigma \rightarrow \omega(\text{Ad}(\sigma) X)$ ($\sigma \in G$) является аналитической в точке $\sigma = e$. Выберем такую $f \in C^\infty(G)$, что она аналитична в точке $\sigma = e$ и что $Yf = \omega(Y)$ для всех $Y \in \mathfrak{g}$.

Тогда, используя равенство (3), получим

$$\omega(\text{Ad}(\sigma) X) = (\text{Ad}(\sigma) X) f = \left\{ \frac{d}{dt} f(\sigma \exp tX \sigma^{-1}) \right\}_{t=0}.$$

Очевидно, эта функция аналитична в точке $\sigma = e$.

Пусть теперь X и Y — произвольные векторы из $\mathfrak{g}$. По лемме 1.8 (iii)

$$\exp(\text{Ad}(\exp tX) tY) = \exp(tY + t^2[X, Y] + O(t^3)).$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Ad}(\exp tX)Y = Y + t[X, Y] + O(t^2). \quad (4)$$

Дифференциал $d\operatorname{Ad}_e$ есть гомоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ и, в силу формулы (4),

$$d\operatorname{Ad}_e(X) = \operatorname{ad} X \quad (X \in \mathfrak{g}).$$

Применяя к обеим частям экспоненциальное отображение, получаем (лемма 1.12)

$$\operatorname{Ad}(\exp X) = e^{\operatorname{ad} X} \quad (X \in \mathfrak{g}). \quad (5)$$

Пусть G — связная группа Ли и H — аналитическая подгруппа. Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответствующие алгебры Ли. Соотношения (3) и (5) показывают, что H является нормальным делителем группы G тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$.

Лемма 5.1. Пусть G — связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, и пусть φ — аналитический гомоморфизм группы G в группу Ли X с алгеброй Ли $\mathfrak{x}$. Тогда

(i) ядро $\varphi^{-1}(e)$ есть топологическая подгруппа Ли в G ; ее алгеброй Ли является ядро гомоморфизма $d\varphi (= d\varphi_e)$;

(ii) образ $\varphi(G)$ есть подгруппа Ли группы X с алгеброй Ли $d\varphi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{x}$;

(iii) факторгруппа $G/\varphi^{-1}(e)$ со своей естественной аналитической структурой является группой Ли, и отображение $g\varphi^{-1}(e) \rightarrow \varphi(g)$ есть аналитический изоморфизм группы $G/\varphi^{-1}(e)$ на $\varphi(G)$; в частности, отображение $\varphi: G \rightarrow \varphi(G)$ аналитично.

Доказательство. (i) Согласно теореме 2.3, $\varphi^{-1}(e)$ обладает единственной аналитической структурой, относительно которой она является топологической подгруппой Ли в G . Далее, ее алгебра Ли содержит вектор $Z \in \mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\exp tZ) = e$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Поскольку $\varphi(\exp tZ) = \exp td\varphi(Z)$, это условие эквивалентно равенству $d\varphi(Z) = 0$.

(ii) Обозначим через X_1 аналитическую подгруппу группы X с алгеброй Ли $d\varphi(\mathfrak{g})$. Группа $\varphi(G)$ порождается элементами $\varphi(\exp Z) (Z \in \mathfrak{g})$. Группа X_1 порождается элементами $\exp(d\varphi(Z)) (Z \in \mathfrak{g})$. Поскольку $\varphi(\exp Z) = \exp d\varphi(Z)$, отсюда следует, что $\varphi(G) = X_1$.

(iii) Пусть H — некоторый замкнутый нормальный делитель группы G . Тогда H — топологическая подгруппа Ли, и факторгруппа G/H обладает единственной аналитической структурой, такой, что отображение $(g, xH) \rightarrow gxH$ есть аналитическое отображение многообразия $G \times G/H$ на G/H . Для доказательства того, что G/H — группа Ли относительно этой аналитической структуры, мы используем локальное сечение $\psi(U)$ из леммы 4.1.

Пусть $B = \psi(\dot{U})$, где $\dot{U}$ — внутренность множества U . Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} G \times G/H & \xrightarrow{\Phi} & G/H \\ \pi \times I \searrow & & \nearrow \alpha \\ & G/H \times G/H, & \end{array}$$

в которой через Φ , $\pi \times I$ и α обозначены отображения

$$\begin{aligned} \Phi: (g, xH) &\rightarrow g^{-1}xH \quad (x, g \in G); \\ \pi \times I: (g, xH) &\rightarrow (gH, xH) \quad (x, g \in G); \\ \alpha: (gH, xH) &\rightarrow g^{-1}xH \quad (x, g \in G). \end{aligned}$$

Отображение α определено, так как H — нормальный делитель в G . Пусть g_0, x_0 — две произвольные точки в G . Ограничение отображения $\pi \times I$ на $(g_0B) \times G/H$ является аналитическим диффеоморфизмом многообразия $(g_0B) \times G/H$ на окрестность N точки (g_0H, x_0H) в $G/H \times G/H$. На N мы имеем $\alpha = \Phi \circ (\pi \times I)^{-1}$, откуда видно, что α аналитично. Значит, G/H — группа Ли.

Возьмем теперь в качестве H группу $\varphi^{-1}(e)$ и обозначим через $\mathfrak{h}$ алгебру Ли группы H . Тогда $\mathfrak{h} = d\varphi^{-1}(0)$, так что $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. В силу (ii), алгебра Ли группы G/H есть алгебра $d\varphi(\mathfrak{g})$, которая изоморфна алгебре $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. С другой стороны, отображение $Z + \mathfrak{h} \rightarrow d\varphi(Z)$ является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ на $d\varphi(\mathfrak{g})$. Соответствующий локальный изоморфизм между G/H и $\varphi(G)$ совпадает с (алгебраическим) изоморфизмом $gH \rightarrow \varphi(g)$ в некоторой окрестности единицы. Отсюда следует, что последний изоморфизм аналитичен в точке e и, значит, всюду.

Следствие 5.2. Пусть G — связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим через Z центр группы G . Тогда

- (i) Ad_G есть аналитический гомоморфизм группы G на $\text{Int}(\mathfrak{g})$ с ядром Z ;
- (ii) отображение $gZ \rightarrow \text{Ad}_G(g)$ есть аналитический изоморфизм группы G/Z на $\text{Int}(\mathfrak{g})$.

Действительно, $\text{Ad}_G(G) = \text{Int}(\mathfrak{g})$, в силу формулы (5) и $\text{Ad}_G^{-1}(e) = Z$, в силу формулы (3). Остальные утверждения содержатся в лемме 5.1.

Следствие 5.3. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\mathbf{R}$ с центром $\{0\}$. Тогда центр группы $\text{Int}(\mathfrak{g})$ состоит из одного единичного элемента.

Действительно, пусть $G' = \text{Int}(\mathfrak{g})$, и пусть Z — центр группы G' . Обозначим через ad присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$ и через Ad' и ad' — присоединенные представления группы G'

и алгебры $\text{ad}(\mathfrak{g})$ соответственно. Отображение

$$\theta : gZ \rightarrow \text{Ad}'(g) \quad (g \in G')$$

является изоморфизмом группы G'/Z на $\text{Int}(\text{ad}(\mathfrak{g}))$. С другой стороны, отображение $s : X \rightarrow \text{ad} X$ ($X \in \mathfrak{g}$) есть изоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ на $\text{ad}(\mathfrak{g})$ и, следовательно, отображение $S : g \rightarrow s \circ g \circ s^{-1}$ ($g \in G'$) есть изоморфизм группы G' на $\text{Int}(\text{ad}(\mathfrak{g}))$. Далее, если $X \in \mathfrak{g}$, то из формулы (5) получаем

$$S(e^{\text{ad} X}) = s \circ e^{\text{ad} X} \circ s^{-1} = e^{(\text{ad}'(\text{ad} X))} = \text{Ad}'(e^{\text{ad} X}),$$

так как $\text{ad}(\mathfrak{g})$ — алгебра Ли группы G' . Отсюда следует, что $S^{-1} \circ \theta$ — изоморфизм группы G'/Z на G' , переводящий gZ в g ($g \in G'$). Очевидно, центр Z должен состоять из одной единицы.

З а м е ч а н и е. Заключение следствия 5.3, вообще говоря, несправедливо, если $\mathfrak{g}$ имеет нетривиальный центр. Пусть, например, $\mathfrak{g}$ — трехмерная алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathbf{R}X_1 + \mathbf{R}X_2 + \mathbf{R}X_3$ с коммутатором, определенным формулами $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_1, X_3] = [X_2, X_3] = 0$. Здесь $\mathfrak{g}$ не абелева, в то время как группа $\text{Int}(\mathfrak{g})$ абелева и имеет размерность 2.

О п р е д е л е н и е. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем $\mathbf{R}$. Пусть $\mathfrak{f}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, и пусть K^* — аналитическая подгруппа группы $\text{Int}(\mathfrak{g})$, соответствующая подалгебре $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{f})$ в $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. Подалгебра $\mathfrak{f}$ называется *компактно вложенной подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}$* , если группа K^* компактна. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *компактной*, если она компактно вложена в себя или, что то же самое, если группа $\text{Int}(\mathfrak{g})$ компактна.

Нужно заметить, что топология группы K^* может а priori отличаться от относительной топологии группы $\text{Int}(\mathfrak{g})$, которая в свою очередь может отличаться от относительной топологии группы $\mathbf{GL}(\mathfrak{g})$. Следующее предложение проясняет эту ситуацию.

П р е д л о ж е н и е 5.4. Обозначим через $\tilde{K}$ абстрактную группу K^* с относительной топологией группы $\mathbf{GL}(\mathfrak{g})$. Группа K^* компактна тогда и только тогда, когда $\tilde{K}$ компактна.

Тождественное отображение группы K^* в $\mathbf{GL}(\mathfrak{g})$ аналитично и, в частности, непрерывно. Значит, группа $\tilde{K}$ компактна, если K^* компактна. С другой стороны, если $\tilde{K}$ компактна, то она замкнута в $\mathbf{GL}(\mathfrak{g})$. По теореме 2.10 группы K^* и $\tilde{K}$ гомеоморфны.

З а м е ч а н и е. Пусть G — любая связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Пусть K — аналитическая подгруппа группы G с алгеброй Ли $\mathfrak{f}$. Тогда определенная выше группа K^* совпадает с $\text{Ad}_G(K)$. Действительно, обе эти группы порождаются элементами $\text{Ad}_G(\exp X)$ ($X \in \mathfrak{f}$).

§ 6. Полупростые группы Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем характеристики 0. Обозначив через Tr след эндоморфизма векторного пространства, рассмотрим билинейную форму $B(X, Y) = \text{Tr}(\text{ad } X \text{ ad } Y)$ на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Форма B называется *формой Киллинга* алгебры $\mathfrak{g}$.

Пусть σ — автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда $\text{ad } \sigma X = \sigma \circ \text{ad } X \circ \sigma^{-1}$, откуда $\text{Tr}(\text{ad } \sigma X \text{ ad } \sigma Y) = \text{Tr}(\sigma \text{ ad } X \text{ ad } Y \sigma^{-1}) = \text{Tr}(\text{ad } X \text{ ad } Y)$. Поскольку $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ для любых эндоморфизмов A и B , то $\text{Tr}(\text{ad } [Z, X] \text{ ad } Y) = \text{Tr}((\text{ad } Z \text{ ad } X - \text{ad } X \text{ ad } Z) \text{ ad } Y) = \text{Tr}((\text{ad } Y \text{ ad } Z - \text{ad } Z \text{ ad } Y) \text{ ad } X) = \text{Tr}(\text{ad } [Y, Z] \text{ ad } X)$. Таким образом, имеем формулы

$$B(\sigma X, \sigma Y) = B(X, Y) \quad (\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{g})),$$

$$B(X, [Y, Z]) = B(Y, [Z, X]) = B(Z, [X, Y]) \quad (X, Y, Z \in \mathfrak{g}). \quad (1)$$

Предположим, что $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Тогда легко проверить, что форма Киллинга алгебры $\mathfrak{a}$ совпадает с ограничением формы B на $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$.

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем характеристики 0 называется *полупростой*, если форма Киллинга B алгебры $\mathfrak{g}$ невырождена. Мы будем называть алгебру Ли $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ *простой*¹⁾, если она полупроста и не имеет идеалов, отличных от $\{0\}$ и $\mathfrak{g}$. Группа Ли называется *полупростой* (*простой*), если ее алгебра Ли полупроста (*проста*).

Предложение 6.1. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathfrak{a}^\perp$ множество элементов $X \in \mathfrak{g}$, ортогональных к $\mathfrak{a}$ относительно формы B . Тогда $\mathfrak{a}$ полупроста, $\mathfrak{a}^\perp$ является идеалом и

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^\perp \quad (\text{прямая сумма}).$$

Доказательство. То, что $\mathfrak{a}^\perp$ — идеал, очевидно из формулы (1). Поскольку форма B невырождена, то $\dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{a}^\perp = \dim \mathfrak{g}$. Если $Z \in \mathfrak{g}$ и $X, Y \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$, то $B(Z, [X, Y]) = B([Z, X], Y) = 0$, откуда $[X, Y] = 0$. Значит, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ — абелев идеал в $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{b}$ — любое подпространство алгебры $\mathfrak{g}$, дополнительное к $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$. Если $Z \in \mathfrak{g}$ и $T \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$, то эндоморфизм

¹⁾ Это определение простой алгебры Ли удобно для наших целей, но формально отлично от обычного определения: алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста, если она не абелева и не имеет идеалов, кроме $\{0\}$ и $\mathfrak{g}$. Однако эти два определения эквивалентны в силу критерия Картана: алгебра Ли полупроста тогда и только тогда, когда она не содержит абелевых идеалов, отличных от $\{0\}$ ²⁾.

²⁾ Доказательство критерия Картана см. в книге Шевалле [6], стр. 78, а также в сборнике семинара «Софус Ли» [1], стр. 78. — Прим. перев.

$\text{ad } T \text{ ad } Z$ отображает $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ в $\{0\}$, а $\mathfrak{b}$ — в $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$. В частности, $\text{Tr}(\text{ad } T \text{ ad } Z) = 0$. Отсюда следует, что $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$, и мы получаем прямое разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^\perp$. Поскольку форма Киллинга алгебры $\mathfrak{a}$ есть ограничение формы B на $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$, полупростота алгебры $\mathfrak{a}$ очевидна.

Следствие 6.2. Полупростая алгебра Ли имеет центр $\{0\}$.

Следствие 6.3. Полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является прямой суммой

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \dots + \mathfrak{g}_r,$$

где все $\mathfrak{g}_i$ ($1 \leq i \leq r$) — простые идеалы в $\mathfrak{g}$. Каждый идеал $\mathfrak{a}$ алгебры $\mathfrak{g}$ является прямой суммой нескольких идеалов $\mathfrak{g}_i$.

Действительно, из предложения 6.1 следует, что $\mathfrak{g}$ можно записать в виде прямой суммы простых идеалов $\mathfrak{g}_i$ ($1 \leq i \leq s$) так, что $\mathfrak{a}$ будет прямой суммой нескольких из этих $\mathfrak{g}_i$. Если $\mathfrak{b}$ — простой идеал, который не встречается среди идеалов $\mathfrak{g}_i$ ($1 \leq i \leq s$), то $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{b} = \{0\}$ для $1 \leq i \leq s$. Это противоречит следствию 6.2.

Предложение 6.4. Если алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста, то $\text{ad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$, т. е. каждое дифференцирование является внутренним дифференцированием.

Доказательство. Алгебра $\text{ad}(\mathfrak{g})$ изоморфна алгебре $\mathfrak{g}$ и, значит, полупроста. Если D — дифференцирование алгебры $\mathfrak{g}$, то $\text{ad}(DX) = [D, \text{ad } X]$ для $X \in \mathfrak{g}$. Значит, $\text{ad}(\mathfrak{g})$ — идеал в $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$. Ортогональное дополнение $\mathfrak{a}$ к этому идеалу также является идеалом в $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$. Тогда пересечение $\mathfrak{a} \cap \text{ad}(\mathfrak{g})$ ортогонально к $\text{ad}(\mathfrak{g})$ и относительно формы Киллинга алгебры $\text{ad}(\mathfrak{g})$, откуда $\mathfrak{a} \cap \text{ad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Следовательно, если $D \in \mathfrak{a}$, то $[D, \text{ad } X] \in \mathfrak{a} \cap \text{ad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Итак, $\text{ad}(DX) = 0$ для каждого $X \in \mathfrak{g}$, т. е. $D = 0$. Отсюда видно, что $\mathfrak{a} = \{0\}$, так что $\text{ad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$.

Следствие 6.5. Для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbf{R}$ присоединенная группа $\text{Int}(\mathfrak{g})$ является компонентой единицы группы $\text{Aut}(\mathfrak{g})$. В частности, $\text{Int}(\mathfrak{g})$ есть замкнутая топологическая подгруппа в $\text{Aut}(\mathfrak{g})$.

Замечание. Если $\mathfrak{g}$ не полупроста, то группа $\text{Int}(\mathfrak{g})$ не обязана быть замкнутой в $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ (см. упражнение С.3 к этой главе).

Предложение 6.6.

(i) Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbf{R}$. Тогда $\mathfrak{g}$ компактна тогда и только тогда, когда форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$ отрицательно определена.

(ii) Каждая компактная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ есть прямая сумма $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, где $\mathfrak{z}$ — центр алгебры $\mathfrak{g}$, а идеал $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ является полупростым и компактным.

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\mathbf{R}$, форма Киллинга которой отрицательно определена. Обозначим через $O(B)$ группу всех линейных преобразований пространства $\mathfrak{g}$, относительно которых форма B инвариантна. Тогда $O(B)$ компактна в относительной топологии группы $GL(\mathfrak{g})$. Мы имеем $\text{Aut}(\mathfrak{g}) \subset O(B)$. Поэтому, в силу следствия 6.5, группа $\text{Int}(\mathfrak{g})$ компактна.

Предположим теперь, что $\mathfrak{g}$ — произвольная компактная алгебра Ли. Подгруппа Ли $\text{Int}(\mathfrak{g})$ в $GL(\mathfrak{g})$ компактна. Значит, ее топология является относительной топологией группы $GL(\mathfrak{g})$. На $\mathfrak{g}$ существует положительно определенная квадратичная форма Q , инвариантная относительно компактной линейной группы $\text{Int}(\mathfrak{g})$ ¹⁾. Существует такой базис $X_1, \dots, X_n$ алгебры $\mathfrak{g}$,

что $Q(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2$, если $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$. В этом базисе каждый эле-

мент $\sigma \in \text{Int}(\mathfrak{g})$ представляется ортогональной матрицей, а каждый элемент $\text{ad } X$ ($X \in \mathfrak{g}$) — кососимметрической матрицей, которую мы обозначим через $(a_{ij}(X))$. Центр $\mathfrak{z}$ алгебры $\mathfrak{g}$ инвариантен относительно $\text{Int}(\mathfrak{g})$, т. е. $\sigma \cdot \mathfrak{z} \subset \mathfrak{z}$ для каждого $\sigma \in \text{Int}(\mathfrak{g})$. Ортогональное дополнение $\mathfrak{g}'$ к центру $\mathfrak{z}$ в $\mathfrak{g}$ относительно Q также инвариантно по отношению к $\text{Int}(\mathfrak{g})$ и $\text{ad}(\mathfrak{g})$. Значит, $\mathfrak{g}'$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Далее, форма Киллинга B' алгебры $\mathfrak{g}'$ является ограничением на $\mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}'$ формы Киллинга B алгебры $\mathfrak{g}$. Если теперь $X \in \mathfrak{g}$, то

$$B(X, X) = \text{Tr}(\text{ad } X \text{ ad } X) = \sum_{i,j} a_{ij}(X) a_{ji}(X) = - \sum_{i,j} a_{ij}(X^2) \leq 0.$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $\text{ad } X = 0$, т. е. тогда и только тогда, когда $X \in \mathfrak{z}$. Тем самым доказано, что алгебра $\mathfrak{g}'$ полупроста и компактна. Разложение из следствия 6.3 показывает, что $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] = \mathfrak{g}'$. Значит, $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, и предложение доказано.

Следствие 6.7. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbf{R}$ компактна тогда и только тогда, когда существует компактная группа Ли G с алгеброй Ли, изоморфной $\mathfrak{g}$.

Чтобы получить это следствие, нужно только заметить, что каждая абелева алгебра Ли изоморфна алгебре Ли тора $S^1 \times \dots \times S^1$.

¹⁾ Если G — компактная группа эндоморфизмов конечномерного векторного пространства V над $\mathbf{R}$, то в V существует положительно определенная квадратичная форма, инвариантная относительно G . Доказательство этого утверждения (основанное на инвариантном интегрировании по группе G , которое строится в гл. X, § 1, п. 1), можно найти в книге Шевалле [2], стр. 255. — Прим. перев.

Предложение 6.8. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\mathbf{R}$, и пусть $\mathfrak{z}$ — центр алгебры $\mathfrak{g}$. Предположим, что $\mathfrak{k}$ — компактно вложенная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$, то форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$ отрицательно определена на $\mathfrak{k}$.

Доказательство. Пусть B — форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$, и пусть K — аналитическая подгруппа присоединенной группы $\text{Int}(\mathfrak{g})$ с алгеброй Ли $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$. Согласно нашим предположениям, K есть компактная подгруппа Ли в $GL(\mathfrak{g})$. Значит, она несет на себе относительную топологию группы $GL(\mathfrak{g})$. На $\mathfrak{g}$ существует положительно определенная квадратичная форма Q , инвариантная относительно K . Существует такой базис алгебры $\mathfrak{g}$, что каждый эндоморфизм $\text{ad}_{\mathfrak{g}} T$ ($T \in \mathfrak{k}$) записывается при помощи кососимметрической матрицы $(a_{ij}(T))$. Тогда

$$B(T, T) = \sum_{i,j} a_{ij}(T) a_{ji}(T) = - \sum_{i,j} a_{ij}(T)^2 \leq 0,$$

и знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $T \in \mathfrak{z} \cap \mathfrak{k} = \{0\}$.

Теорема 6.9. Пусть G — компактная связная полупростая группа Ли. Тогда универсальная накрывающая группа G^* группы G компактна.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G (и G^*), и пусть B — форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$. На G и G^* существуют единственные левоинвариантные римановы структуры Q и Q^* соответственно, такие, что $Q_e = Q_{e^*}^* = -B$. Здесь через e и e^* обозначены единицы в G и G^* соответственно. Поскольку

$$B(\text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y) = B(X, Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{g}, g \in G),$$

структуры Q и Q^* инвариантны также относительно правых сдвигов на группах G и G^* . Обозначим через π накрывающее отображение группы G^* на G . Тогда $Q^* = \pi^*Q$ и, так как G полно, накрывающее многообразие G^* также является полным (предложение 10.6 гл. I). Из формулы (1) получаем, что

$$Q^*([\tilde{Z}, \tilde{X}], \tilde{Y}) + Q^*(\tilde{X}, [\tilde{Z}, \tilde{Y}]) = 0,$$

где $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ и $\tilde{Z}$ — левоинвариантные векторные поля на G^* , принимающие значения X , Y , Z в точке e^* . Обозначим через ∇ риманову связность на G^* , индуцированную структурой Q^* (теорема 9.1 гл. I). Тогда из формулы (2) § 9 гл. I видно, что $\nabla_{\tilde{X}}(\tilde{X}) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}$. Из предложения 1.4 вытекает, что геодезическими на G^* , проходящими через точку e^* , являются

однопараметрические подгруппы. Отсюда снова следует, что G^* полно.

Предположим теперь, что наша теорема не верна для группы G . Тогда, в силу предложения 10.7 гл. I, G^* содержит луч, выходящий из e^* . Пусть γ — однопараметрическая подгруппа, содержащая этот луч. Тогда γ есть «прямая» в G^* , т. е. реализует кратчайшее расстояние в G^* между любыми двумя своими точками. Действительно, любую пару точек на γ можно сдвинуть при помощи левого сдвига в некоторую пару точек на луче. Параметризуем γ длиной дуги t , измеряемой от точки $e^* = \gamma(0)$. Множество $\pi(\gamma)$ есть однопараметрическая подгруппа группы G . Ее замыкание в G является компактной абелевой связной подгруппой и, следовательно, тором¹⁾. По классической теореме Кронекера²⁾ существует такая последовательность $(t_n) \subset \mathbf{R}$, что $t_n \rightarrow \infty$ и $\pi(\gamma(t_n)) \rightarrow e$. Можно предположить, что все точки $\pi(\gamma(t_n))$ лежат в минимизирующем выпуклом нормальном шаре $B_r(e)$ и что π диффеоморфно отображает каждую компоненту C множества $\pi^{-1}(B_r(e))$ на $B_r(e)$. Тогда отображение $\pi: C \rightarrow B_r(e)$ сохраняет расстояние. Значит, существует такой элемент $z_n \in G^*$, что

$$\begin{aligned} \pi(z_n) &= e, \\ d(z_n, \gamma(t_n)) &= d(e, \pi(\gamma(t_n))). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь через d обозначается расстояние как в G , так и в G^* . Поскольку (G^*, π) — накрывающая группа группы G , ядро гомоморфизма π содержится в центре Z группы G^* . Поэтому из формул (2) следует, что $z_n \in Z$. Мы покажем сейчас, что $\gamma \subset Z$.

Рассмотрим теперь для заданного элемента $a \in G^*$ однопараметрическую подгруппу $\delta: t \rightarrow a\gamma(t)a^{-1}$ ($t \in \mathbf{R}$). Так как левые и правые сдвиги на G^* являются изометриями, то δ есть «прямая» и $|t|$ — длина дуги, измеряемая от точки e^* . Поскольку $z_n \in Z$, то $d(\delta(t_n), z_n) = d(\gamma(t_n), z_n)$, откуда видно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\gamma(t_n), \delta(t_n)) = 0. \quad (3)$$

Предположим теперь, что $\delta(t) \neq \gamma(t)$ для некоторого $t \neq 0$. Тогда угол между векторами $\dot{\gamma}(0)$ и $\dot{\delta}(0)$ отличен от 0 (быть может, равен 180°). В любом случае из леммы 9.8 гл. I и из следующего за ней замечания получаем, что

$$d(\gamma(-1), \delta(+1)) < d(e^*, \gamma(-1)) + d(e^*, \delta(1)) = 2.$$

1) Всякая компактная абелева связная группа Ли является тором, т. е. прямым произведением нескольких групп S^1 (см. Бурбаки [4], гл. VII, § 2). — Прим. перев.

2) См. Бурбаки [4], гл. VII, § 1. — Прим. перев.

В силу соотношения (3), можно определить такое целое число N , что

$$t_N > 1, d(\gamma(t_N), \delta(t_N)) < 2 - d(\gamma(-1), \delta(+1)).$$

Рассмотрим теперь ломаную геодезическую ζ , составленную из следующих звеньев: от $\gamma(-1)$ до $\delta(+1)$ — кратчайшая геодезическая, от $\delta(+1)$ до $\delta(t_N)$ — геодезическая δ , от $\delta(t_N)$ до $\gamma(t_N)$ — кратчайшая геодезическая. Кривая ζ соединяет точку $\gamma(-1)$ с $\gamma(t_N)$ и имеет длину

$$d(\gamma(-1), \delta(+1)) + (t_N - 1) + d(\delta(t_N), \gamma(t_N)),$$

которая строго меньше, чем $t_N + 1 = d(\gamma(-1), \gamma(t_N))$. Это противоречит тому, что γ — прямая.

Отсюда следует, что $\delta(t) = \gamma(t)$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Так как элемент $a \in G^*$ был произвольным, то $\gamma \subset Z$. Но тогда $\mathfrak{z}$, алгебра Ли группы Z , была бы отлична от $\{0\}$. Это противоречит тому, что $\mathfrak{g}$ полупроста.

УПРАЖНЕНИЯ

А. По геометрии групп Ли

1. Пусть $\gamma(t)$ ($t \in \mathbf{R}$) — однопараметрическая подгруппа группы Ли. Предположим, что γ пересекает сама себя. Тогда γ — «замкнутая» однопараметрическая подгруппа, т. е. существует такое число $L > 0$, что $\gamma(t+L) = \gamma(t)$ для всех $t \in \mathbf{R}$.

2. Пусть G — связная группа Ли, H — замкнутая подгруппа. Доказать, что многообразие G/H полно в любой G -инвариантной римановой структуре.

3. Пусть G — связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Пусть B — невырожденная симметрическая билинейная форма на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Тогда на G существует единственная левоинвариантная псевдориманова структура Q , такая, что $Q_e = B$. Показать, используя предложение 1.4 и формулу (2) из § 9 гл. I, что следующие условия эквивалентны:

(i) геодезические, проходящие через e , являются однопараметрическими подгруппами;

(ii) $B(X, [X, Y]) = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{g}$;

(iii) $B(X, [Y, Z]) = B([X, Y], Z)$ для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$;

(iv) структура Q инвариантна относительно всех правых сдвигов на G ;

(v) структура Q инвариантна относительно отображения $g \rightarrow g^{-1}$ группы G на себя.

4. Пусть G — связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, и пусть Q — риманова структура на G , инвариантная слева и справа. Пусть $X, Y \in \mathfrak{g}$. Параллельный перенос вектора X вдоль геодези-

ческой $\exp tY$ ($0 \leq t \leq 1$) задается формулой

$$dL\left(\exp \frac{1}{2} Y\right) dR\left(\exp \frac{1}{2} Y\right) \cdot X,$$

где $L(x)$ и $R(x)$ — левый и правый сдвиги на элемент x .

5. Обозначим через $SL(2, R)$ группу всех вещественных квадратных матриц порядка 2 с определителем 1. Ее алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2, R)$ состоит из всех вещественных квадратных матриц порядка 2 со следом 0.

(i) Пусть $X \in \mathfrak{sl}(2, R)$, I — единичная матрица. Показать, что

$$e^X = \operatorname{ch}(-\det X)^{1/2} I + \frac{\operatorname{sh}(-\det X)^{1/2}}{(-\det X)^{1/2}} X, \quad \text{если } \det X < 0;$$

$$e^X = \cos(\det X)^{1/2} I + \frac{\sin(\det X)^{1/2}}{(\det X)^{1/2}} X, \quad \text{если } \det X > 0.$$

(ii) Будем считать однопараметрические подгруппы одинаковыми, если они имеют пропорциональные касательные векторы в точке e . Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in SL(2, R) \quad (\lambda \neq 1)$$

лежит в точности на одной однопараметрической подгруппе, если $\lambda > 0$, на бесконечно многих однопараметрических подгруппах, если $\lambda = -1$, и ни на одной однопараметрической подгруппе, если $\lambda < 0$, $\lambda \neq -1$.

6. Показать, что группа $SL(2, R)$ допускает двусторонне инвариантную псевдориманову структуру. Это псевдориманово многообразие *полно* в том смысле, что геодезические бесконечно продолжаемы (упражнение 3). Показать, что

(i) две точки в $SL(2, R)$, вообще говоря, нельзя соединить геодезической;

(ii) две точки в $SL(2, R)$ всегда можно соединить ломаной геодезической с одним изломом;

(iii) на любом связном многообразии M с аффинной связностью произвольную пару точек всегда можно соединить геодезической с конечным числом изломов. Число необходимых изломов может быть неограниченным, даже если M полно¹⁾ (Хикс [2]).

В. Подгруппы и группы преобразований

1. Проверить описание алгебр Ли различных подгрупп группы $GL(n, C)$, перечисленных в гл. IX, § 4.

¹⁾ Полноту многообразия с аффинной связностью надо понимать в смысле бесконечной продолжаемости геодезических. — Прим. перев.

2. Показать, что коммутативная связная группа Ли изоморфна прямому произведению вида $R^n \times T^m$, где T^m — m -мерный тор.

3. Пусть G — группа Ли преобразований многообразия M . Тогда каждая орбита $G \cdot p$ является подмногообразием в M , диффеоморфным G/G_p . (Рассуждать так же, как в доказательстве предложения 4.3.)

4. Получить формулу ((4) § 5)

$$\operatorname{ad} X = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\operatorname{Ad} (\exp tX) - I)$$

в качестве частного случая теоремы 7.1 гл. I и в качестве частного случая теоремы 3.4 гл. II.

5. Пусть G — локально связная топологическая группа. Предположим, что ее компонента единицы G_0 обладает аналитической структурой, совместимой с топологией, относительно которой она является группой Ли. Показать, что G обладает тем же свойством. (Указание: использовать теорему 2.6.)

Отсюда видно, что принятое здесь определение группы Ли эквивалентно определению Шевалле [2].

С. Замкнутые подгруппы

1. Пусть Γ — такая дискретная подгруппа в R^2 , что R^2/Γ компактна. Показать, что аналитическая подгруппа в R^2 всегда замкнута, но ее образ в R^2/Γ при естественном отображении не обязательно замкнут.

2. Пусть $H \subseteq G$ — связные группы Ли. Предположим, что тождественное отображение $I: H \rightarrow G$ является непрерывным (алгебраическим) изоморфизмом. Тогда H — подгруппа Ли в G .

3. Пусть G — пятимерное многообразие $C \times C \times R$ с умножением, определенным следующей формулой (ван Эст [1], Хохшильд [1]):

$$(c_1, c_2, r) (c'_1, c'_2, r') = (c_1 + e^{2\pi i r} c'_1, c_2 + e^{2\pi i h r} c'_2, r + r'),$$

где h — фиксированное иррациональное число и $c_1, c_2, c'_1, c'_2 \in C$, $r, r' \in R$. Тогда G — группа Ли.

(i) Пусть $s, t \in R$. Определим отображение $\alpha_{s,t}: G \rightarrow G$ формулой $\alpha_{s,t}(c_1, c_2, r) = (e^{2\pi i s} c_1, e^{2\pi i t} c_2, r)$. Показать, что $\alpha_{s,t}$ — аналитический изоморфизм.

(ii) Если $t = hs + hn$, где n — целое число, то $\alpha_{s,t}$ совпадает с внутренним автоморфизмом

$$(c_1, c_2, r) \rightarrow (0, 0, s+n) (c_1, c_2, r) (0, 0, s+n)^{-1}.$$

(iii) Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G и через $A_{s,t}$ автоморфизм $d\alpha_{s,t}$ алгебры $\mathfrak{g}$. Если $s_n \rightarrow s_0$, $t_n \rightarrow t_0$, то $A_{s_n, t_n} \rightarrow A_{s_0, t_0}$ в $\text{Aut}(\mathfrak{g})$.

(iv) Показать, что $A_{0, 1/3} \notin \text{Int}(\mathfrak{g})$. Вывести из (iii), что подгруппа $\text{Int}(\mathfrak{g})$ не замкнута в $\text{Aut}(\mathfrak{g})$.

4. Пусть G — связная группа Ли и H — аналитическая подгруппа. Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответствующие алгебры Ли.

(i) Предположим, что G односвязна. Если $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, то подгруппа H замкнута в G (Шевалле [2], стр. 186).

(ii) Предположим, что G односвязна. Если алгебра $\mathfrak{h}$ полупроста, то подгруппа H замкнута в G (Мостов [2], стр. 615).

(iii) Предположим, что G компактна. Если $\mathfrak{h}$ полупроста, то подгруппа H замкнута в G (Мостов [2], стр. 615).

(iv) Предположим, что $G = GL(n, \mathbb{C})$. Если $\mathfrak{h}$ полупроста, то подгруппа H замкнута в G (Гото [1]).

(v) Предположим, что H не замкнута в G . Тогда существует однопараметрическая подгруппа γ в H , замыкание которой (в G) не содержится в H (Гото [1])¹⁾.

ЗАМЕЧАНИЯ

На первых порах существования теории групп Ли, в конце девятнадцатого столетия, понятие группы Ли носило в работах Ли, Киллинга и Картана в основном локальный характер. Группы Ли в целом выделились только в двадцатых годах благодаря работам Г. Вейля, Э. Картана и Шрайера. Эти две точки зрения, инфинитезимальный метод и интегральный метод, не были полностью согласованы, пока Картан не доказал в 1936 г. [20], что каждая алгебра Ли над $\mathbb{R}$ является алгеброй Ли некоторой группы Ли. Книга Шевалле [2] дает систематическое изложение теории групп Ли с глобальной точки зрения.

§ 1—3. Общность не увеличится, если в определении группы Ли заменить требование аналитичности требованием дифференцируемости (Шмидт (1891 г.), Понтрягин [1], § 56). Даже предположение дифференцируемости не является существенным. Локально евклидова топологическая группа всегда обладает аналитической структурой (в действительности, единственной), относительно которой групповые операции аналитичны. Эта теорема, доказанная Глисоном, Монтгомери и Зиппином, представляет собой положительное решение проблемы, поставленной Гильбертом в 1900 г. (см. Монтгомери и Зиппин [1]).

Универсальная обертывающая алгебра была определена Биркгофом [1] и Виттом [1]. Она играет важную роль в работах Хариш-Чандра о представлениях групп Ли. Изоморфизм $U(\mathfrak{g}) \cong D(G)$ из предложения 1.9 доказан в работе Хариш-Чандра [8]; Годеман [3] приписывает его Л. Шварцу. Различные инвариантные аффинные связности на группе Ли были введены Картаном и Скоутеном [1]. Предложение 1.4 доказано Номидзу [2]. Теорема 1.7, которую мы получили в качестве частного случая теоремы 6.5 гл. I, эквивалентна (в силу двойственности) формуле Картана [16], стр. 21 (см. также Шевалле [2], стр. 228), выражающей формы Маурера — Картана в канонических координатах. Описание подгрупп Ли и подалгебр в § 2 основано главным образом на работе Шевалле [2]. Некоторые упрощения стали возможными благодаря использованию экспоненциального отображения. В част-

¹⁾ Этот результат принадлежит А. И. Мальцеву [1]. — Прим. перев.

ности, доказательства основных теорем 1.11, 2.1 и 2.3 взяты из лекций Брюа [2]. Доказательство теоремы 2.6 тоже имеется там (хотя и слишком упрощенное), а также в лекциях Фрейденталя [4]. Применение графика гомоморфизма встречается также в другом контексте в книге Шевалле [2], стр. 165. Теорема 2.3 о замкнутых подгруппах была первоначально доказана фон Нейманом [1] для групп матриц и обобщена Картаном [16] на произвольные группы Ли. Теорема 3.2 была доказана Аренсом [1], но следствие 3.3 является более старым (см. Понтрягин [1]). Интерпретация коммутатора (теорема 3.4) является классической (см. Понтрягин [1], § 60 и Номидзу [4]).

§ 5—6. Присоединенная группа восходит к Ли и Картану. Существование положительно определенной квадратичной формы, инвариантной относительно заданной компактной линейной группы, — это одно из важных приложений инвариантной меры, сделанных Г. Вейлем. Фундаментальная теорема 6.9 также принадлежит Вейлю [1], гл. IV, теорема 2. Более подробное изложение доказательства Вейля см. в книге Понтрягина [1], § 64. Доказательство, данное в тексте, принадлежит Самельсону [1].

Глава III

СТРУКТУРА ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

Как станет ясно в гл. V, изучение симметрических пространств быстро и довольно удивительным образом приводит к полупростым алгебрам Ли. Настоящая глава посвящена предварительному изучению этих алгебр Ли. Центральным результатом является теорема 6.3, утверждающая, что любая комплексная полупростая алгебра Ли обладает компактной вещественной формой. Доказательство основано на разложении комплексной полупростой алгебры Ли на корневые подпространства относительно подалгебры Картана. Однако существование подалгебры Картана не является тривиальным фактом. Оно основано на теореме Ли о разрешимых алгебрах Ли, доказанной в § 2. В § 1 дается краткий обзор хорошо известных фактов, связанных с жордановой канонической формой линейных преобразований векторного пространства.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть K — некоторое поле и V — конечномерное векторное пространство над K . Напомним некоторые факты, связанные с эндоморфизмами пространства V . Обозначим через $\text{Hom}(V, V)$ кольцо всех эндоморфизмов пространства V . Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис пространства V . Каждому $A \in \text{Hom}(V, V)$ сопоставим матрицу

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

которая определяется условием $Ae_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i$ ($1 \leq j \leq n$). Матрицу (α_{ij}) мы будем называть *выражением* эндоморфизма A в базисе $e_1, \dots, e_n$. Отображение $A \rightarrow (\alpha_{ij})$ есть изоморфизм кольца $\text{Hom}(V, V)$ на кольцо $M_n(K)$ всех квадратных матриц порядка n с элементами из K . Если $f_1, \dots, f_n$ — базис, двойственный базису $e_1, \dots, e_n$, то матричным выражением эндоморфизма ${}^tA: V^* \rightarrow V^*$ является матрица (α_{ji}) , транспонированная по отношению к матрице (α_{ij}) . Матрица (α_{ij}) , у которой $\alpha_{ij} = 0$ для $i > j$, называется *верхней треугольной* матрицей, а матрица

(β_{ij}) , у которой $\beta_{ij} = 0$ для $i < j$, — *нижней треугольной матрицей*. Матрица, одновременно являющаяся верхней и нижней треугольной, называется *диагональной матрицей*.

Если $\lambda \in K$, то обозначим через V_λ множество таких элементов $e \in V$, что $Ae = \lambda e$. Если $V_\lambda \neq \{0\}$, то λ называется *собственным значением* эндоморфизма A и V_λ называется *собственным подпространством* эндоморфизма A , относящимся к собственному значению λ . Вектор $v \neq 0$ из V , принадлежащий к некоторому собственному подпространству эндоморфизма A , называется *собственным вектором* эндоморфизма A . Уравнение с неизвестным λ

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (I — \text{тождественный эндоморфизм})$$

называется *характеристическим уравнением* эндоморфизма A . Те решения этого уравнения, которые лежат в поле K , совпадают с собственными значениями эндоморфизма A . Левая часть уравнения называется *характеристическим многочленом* эндоморфизма A .

Эндоморфизм $N \in \text{Hom}(V, V)$ называется *нильпотентным*, если $N^k = 0$ для некоторого целого $k > 0$. Если $V \neq \{0\}$ и если эндоморфизм $N \in \text{Hom}(V, V)$ nilпотентен, то N имеет в точности одно собственное значение, а именно 0. Пусть $e_1 \neq 0$ — такой вектор из V , что $Ne_1 = 0$. Если обозначить через E_1 одномерное подпространство в V , натянутое на e_1 , то N индуцирует эндоморфизм N_1 факторпространства V/E_1 . Этот эндоморфизм N_1 снова nilпотентен и, если $\dim V/E_1 \neq 0$, то можно выбрать такой вектор $e_2 \neq 0$ в V , что вектор $(e_2 + E_1) \in V/E_1$ является собственным вектором для N_1 . Продолжая этот процесс, мы получим такой базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V , что

$$Ne_1 = 0, \quad Ne_p \equiv 0 \pmod{(e_1, \dots, e_{p-1})} \quad (2 \leq p \leq n).$$

Здесь через $(e_1, \dots, e_{p-1})$ обозначено подпространство пространства V , натянутое на векторы $e_1, \dots, e_{p-1}$. Матрица (n_{ij}) , выражающая эндоморфизм N в базисе $e_1, \dots, e_n$, имеет нули на главной диагонали и ниже ее. Если $f_1, \dots, f_n$ — любой базис пространства V , то эндоморфизм N , заданный условием

$$Nf_j = \sum_{i=1}^n n_{ij} f_i, \text{ nilпотентен.}$$

Итак, эндоморфизм N nilпотентен тогда и только тогда, когда обладает матричным выражением с нулями на главной диагонали и ниже ее.

Рассмотрим теперь некоторое подмножество $\mathfrak{S} \subset \text{Hom}(V, V)$. Подпространство W пространства V называется *инвариантным* (относительно $\mathfrak{S}$), если $SW \subset W$ для каждого $S \in \mathfrak{S}$. Пространство V называется *неприводимым*, если единственными его инвариантными подпространствами являются $\{0\}$ и V . Множество $\mathfrak{S}$

называется *полупростым*, если каждое инвариантное (относительно $\mathfrak{S}$) подпространство обладает дополнительным инвариантным подпространством. В этом случае V можно записать в виде прямой суммы $V = \sum_i V_i$, где подпространства V_i инвариантны и неприводимы (относительно $\mathfrak{S}$). Если $\mathfrak{S}$ — коммутативное семейство эндоморфизмов, то $\mathfrak{S}$ является полупростым тогда и только тогда, когда каждый эндоморфизм $S \in \mathfrak{S}$ полупрост. Каждый эндоморфизм $A \in \text{Hom}(V, V)$ допускает однозначное разложение

$$A = S + N, \quad S \text{ полупрост, } N \text{ нильпотентен, } SN = NS. \quad (1)$$

В этом разложении эндоморфизмы S и N являются многочленами от A и называются *полупростой частью* и *нильпотентной частью* эндоморфизма A соответственно. Пусть λ — собственное значение эндоморфизма A . Выберем такой вектор $e \neq 0$, что $Ae = \lambda e$. Из того, что N — многочлен от A и имеет нуль в качестве единственного собственного значения, следует, что $Ne = 0$ и $Se = \lambda e$. С другой стороны, пусть λ — собственное значение эндоморфизма S , и пусть V_λ — собственное подпространство для S , относящееся к собственному значению λ . Поскольку $AS = SA$, то $AV_\lambda \subset V_\lambda$ и ограничение эндоморфизма $A - \lambda I$ на V_λ нильпотентно. В частности, λ — собственное значение эндоморфизма A . Итак, A и S имеют одни и те же собственные значения, которые мы обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.

Предположим теперь, что поле K алгебраически замкнуто. Пусть $\mathfrak{S}$ — полупростое коммутативное семейство эндоморфизмов пространства V . Тогда каждое ненулевое инвариантное неприводимое (относительно $\mathfrak{S}$) подпространство одномерно, так что V обладает базисом, в котором все $S \in \mathfrak{S}$ выражаются диагональными матрицами. В частности, это имеет место в случае, когда $\mathfrak{S}$ состоит из одного рассмотренного выше эндоморфизма S . Таким образом, V можно записать в виде прямой суммы

$$V = \sum_{i=1}^r V_i,$$

где V_i — собственное подпространство для S , относящееся к собственному значению λ_i . Пусть $v \neq 0$ — вектор из V и $\lambda \in K$ — такой элемент, что

$$(A - \lambda I)^k v = 0$$

для некоторого целого k . Взяв k наибольшим из возможных, мы видим, что λ — собственное значение эндоморфизма A , например, $\lambda = \lambda_1$. Мы можем написать $v = \sum_i v_i$, где $v_i \in V_i$. Так как V_i

инвариантно относительно A , то получаем

$$(A - \lambda_1 I)^k v_i = 0 \quad \text{для } 1 \leq i \leq r.$$

Но эндоморфизм $N_i = A - \lambda_i I$ нильпотентен на V_i . В то же время равенство

$$(N_i + (\lambda_i - \lambda_1) I)^k v_i = 0$$

показывает, что если $v_i \neq 0$, то N_i имеет собственное значение $\lambda_1 - \lambda_i$ на V_i . Отсюда следует, что $v_i = 0$, если $i > 1$. Значит, $v \in V_1$. Суммируя, получаем

Предложение 1.1. Пусть V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем K . Пусть $A \in \text{Hom}(V, V)$, и пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ — различные собственные значения эндоморфизма A . Положим

$$V_i = \{v \in V \mid (A - \lambda_i I)^k v = 0 \text{ для достаточно больших } k\}.$$

Тогда

$$(i) \quad V = \sum_{i=1}^r V_i \quad (\text{прямая сумма});$$

(ii) каждое V_i инвариантно относительно A ;

(iii) полупростая часть эндоморфизма A задается формулой

$$S\left(\sum_{i=1}^r v_i\right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \quad (v_i \in V_i);$$

(iv) характеристический многочлен эндоморфизма A имеет вид

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{d_r},$$

где $d_i = \dim V_i$ ($1 \leq i \leq r$).

§ 2. Теоремы Ли и Энгеля

На протяжении всего этого параграфа через K обозначается поле характеристики 0 и через $\tilde{K}$ — его алгебраическое замыкание. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K . Векторное пространство, натянутое на все элементы $[X, Y]$ ($X, Y \in \mathfrak{g}$), является идеалом в $\mathfrak{g}$, который называется *производной алгеброй* алгебры $\mathfrak{g}$. Производная алгебра будет обозначаться через $\mathfrak{D}\mathfrak{g}$. По индукции определяется n -я производная алгебра $\mathfrak{D}^n \mathfrak{g}$ алгебры $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{D}^0 \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{D}^n \mathfrak{g} = \mathfrak{D}(\mathfrak{D}^{n-1} \mathfrak{g})$. Каждая алгебра $\mathfrak{D}^n \mathfrak{g}$ является идеалом в $\mathfrak{g}$.

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *разрешимой*, если существует такое целое $n \geq 0$, что $\mathfrak{D}^n \mathfrak{g} = \{0\}$. Группа Ли называется разрешимой, если ее алгебра Ли разрешима.

Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли, отличная от $\{0\}$, и пусть n — наименьшее целое число, для которого $\mathfrak{D}^n \mathfrak{g} = \{0\}$. Тогда $\mathfrak{D}^{n-1} \mathfrak{g}$ — ненулевой абелев идеал в $\mathfrak{g}$. Значит, $\mathfrak{g}$ не является полупростой (предложение 6.1 гл. II).

Определение. Говорят, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ удовлетворяет *цепному условию*, если для каждого идеала $\mathfrak{h} \neq \{0\}$ в $\mathfrak{g}$ существует идеал $\mathfrak{h}_1$ в $\mathfrak{h}$ коразмерности 1.

Лемма 2.1. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда она удовлетворяет цепному условию.*

Доказательство. Если $\mathfrak{g}$ разрешима и отлична от $\{0\}$, то $\mathfrak{D} \mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}$. Значит, существует подпространство $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ коразмерности 1, содержащее $\mathfrak{D} \mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Каждый идеал (даже каждая подалгебра) разрешимой алгебры Ли есть разрешимая алгебра. Следовательно, $\mathfrak{g}$ удовлетворяет цепному условию. С другой стороны, предположим, что $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, удовлетворяющая цепному условию. Тогда существует последовательность

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_{n-1} \supset \mathfrak{g}_n = \{0\},$$

в которой $\mathfrak{g}_r$ есть идеал в $\mathfrak{g}_{r-1}$ коразмерности 1 ($1 \leq r \leq n$) и, значит, $\mathfrak{D} \mathfrak{g}_{r-1} \subset \mathfrak{g}_r$. По индукции доказывается, что $\mathfrak{g}$ разрешима.

Теорема 2.2 (Ли). *Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли над полем K . Пусть $V \neq \{0\}$ — конечномерное векторное пространство над алгебраическим замыканием $\tilde{K}$ поля K . Пусть π — гомоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(V)$. Тогда существует вектор $v \neq 0$ в V , являющийся собственным вектором для всех элементов алгебры $\pi(\mathfrak{g})$.*

Доказательство. Мы будем доказывать теорему индукцией по $\dim \mathfrak{g}$. Если $\dim \mathfrak{g} = 1$, то теорема является следствием предложения 1.1. Предположим теперь, что теорема верна для всех разрешимых алгебр Ли над K размерности меньше $\dim \mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{h}$ — идеал коразмерности 1 в $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{h}$ разрешим, значит, по предположению, существуют такой вектор $e_0 \neq 0$ в V и такая линейная функция $\lambda: \mathfrak{h} \rightarrow \tilde{K}$, что

$$\pi(H)e_0 = \lambda(H)e_0 \quad \text{для всех } H \in \mathfrak{h}.$$

Выберем такой вектор $X \in \mathfrak{g}$, что $X \notin \mathfrak{h}$, и положим

$$e_{-1} = 0, \quad e_p = \pi(X)^p e_0 \quad (p = 1, 2, \dots).$$

Подпространство W пространства V , натянутое на все e_p ($p \geq 0$), инвариантно относительно $\pi(X)$. Докажем теперь по индукции, что

$$\pi(H)e_p \equiv \lambda(H)e_p \pmod{(e_0, \dots, e_{p-1})} \quad \text{для всех } H \in \mathfrak{h}, \quad p \geq 0. \quad (1)$$

Действительно, формула (1) имеет место для $p=0$. Предполагая, что это верно для p , получаем соотношение

$$\begin{aligned} \pi(H) e_{p+1} &= \pi(H) \pi(X) e_p = \pi([H, X]) e_p + \pi(X) \pi(H) e_p \equiv \\ &\equiv \lambda([H, X]) e_p + \pi(X) \lambda(H) e_p \\ &\quad \text{mod } (e_0, \dots, e_{p-1}, \pi(X) e_0, \dots, \pi(X) e_{p-1}), \end{aligned}$$

откуда

$$\pi(H) e_{p+1} \equiv \lambda(H) e_{p+1} \text{ mod } (e_0, \dots, e_p). \quad (H \in \mathfrak{h}).$$

Отсюда следует, что W инвариантно относительно $\pi(\mathfrak{g})$ и что $\text{Tr}_W \pi(H) = \lambda(H) \dim W$. Но $\pi([H, X]) = \pi(H) \pi(X) - \pi(X) \pi(H)$, так что $\text{Tr}_W \pi([H, X]) = 0$. Поскольку $\dim W > 0$, мы получаем $\lambda([H, X]) = 0$. Далее, имеем

$$\pi(H) e_{p+1} = \pi([H, X]) e_p + \pi(X) \pi(H) e_p,$$

откуда при помощи индукции по p выводится соотношение

$$\pi(H) e_p = \lambda(H) e_p \quad (H \in \mathfrak{h}, \quad p \geq 0).$$

Отсюда видно, что для $H \in \mathfrak{h}$ имеем $\pi(H) = \lambda(H) I$ на W . Так как $\pi(X)$ оставляет W инвариантным, то он имеет собственный вектор $v \neq 0$ в W . Этот вектор обладает свойствами, указанными в формулировке теоремы.

Следствие 2.3. Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли над полем K и π — представление алгебры $\mathfrak{g}$ в конечномерном векторном пространстве $V \neq \{0\}$ над алгебраическим замыканием $\tilde{K}$ поля K . Тогда существует такой базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V , в котором все эндоморфизмы $\pi(X)$ ($X \in \mathfrak{g}$) выражаются верхними треугольными матрицами.

Действительно, мы можем применить теорему 2.2. Пусть $e_1 \neq 0$ — общий собственный вектор для всех $\pi(X)$ ($X \in \mathfrak{g}$). Рассмотрим подпространство E_1 в V , натянутое на e_1 . Представление π индуцирует представление π_1 алгебры $\mathfrak{g}$ в факторпространстве V/E_1 . Значит, если $\dim V/E_1 \neq 0$, то можно выбрать такой вектор $e_2 \in V$, что вектор $(e_2 + E_1) \in V/E_1$ является собственным для всех $\pi_1(X)$. Продолжая таким образом, мы найдем такой базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V , что для каждого $X \in \mathfrak{g}$

$$\pi(X) e_i \equiv 0 \text{ mod } (e_1, e_2, \dots, e_i).$$

Это значит, что матрица, представляющая эндоморфизм $\pi(X)$, имеет нули ниже главной диагонали.

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над K называется *нильпотентной*, если для каждого $Z \in \mathfrak{g}$ эндоморфизм $\text{ad}_{\mathfrak{g}} Z$ пространства $\mathfrak{g}$ нильпотентен. Группа Ли называется *нильпотентной*, если ее алгебра Ли нильпотентна.

Теорема 2.4 (Энгель). Пусть V — ненулевое конечномерное векторное пространство над K , и пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра $\mathfrak{gl}(V)$, состоящая из нильпотентных элементов. Тогда

- (i) алгебра $\mathfrak{g}$ нильпотентна;
- (ii) существует такой вектор $v \neq 0$ в V , что $Zv = 0$ для всех $Z \in \mathfrak{g}$;
- (iii) существует базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V , в котором все эндоморфизмы $X \in \mathfrak{g}$ выражаются матрицами с нулями на главной диагонали и ниже ее.

Доказательство. (i) Для $Z \in \mathfrak{gl}(V)$ рассмотрим эндоморфизмы L_Z и R_Z пространства $\mathfrak{gl}(V)$, заданные формулами $L_Z X = ZX$, $R_Z X = XZ$ ($X \in \mathfrak{gl}(V)$). Тогда L_Z и R_Z перестановочны и, если обозначить через ad присоединенное представление алгебры $\mathfrak{gl}(V)$, то $\text{ad } Z = L_Z - R_Z$. Отсюда следует, что для $X \in \mathfrak{g}$ и любого целого $p \geq 0$

$$(\text{ad } Z)^p(X) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{p}{i} Z^{p-i} X Z^i. \quad (2)$$

Предположим, что $Z \in \mathfrak{g}$. Тогда Z нильпотентен и, в силу равенства (2), $\text{ad } Z$ нильпотентен на $\mathfrak{gl}(V)$. Так как $\text{ad}_{\mathfrak{g}} Z$ есть ограничение эндоморфизма $\text{ad } Z$ на $\mathfrak{g}$, то эндоморфизм $\text{ad}_{\mathfrak{g}} Z$ тоже нильпотентен.

Для доказательства второй части теоремы положим $r = \dim \mathfrak{g}$. Применим индукцию по r . Если $r = 1$, то (ii) тривиально. Предположим теперь, что (ii) имеет место для всех алгебр размерности меньше r . Пусть $\mathfrak{h}$ — собственная подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, имеющая максимальную размерность. Если $H \in \mathfrak{h}$, то, в силу (i), $\text{ad}_{\mathfrak{g}} H$ есть нильпотентный эндоморфизм пространства $\mathfrak{g}$ и отображает $\mathfrak{h}$ в себя. Значит, $\text{ad}_{\mathfrak{g}} H$ индуцирует нильпотентный эндоморфизм H^* векторного пространства $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Множество $\{H^* \mid H \in \mathfrak{h}\}$ есть подалгебра в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$, имеющая размерность меньше r и состоящая из нильпотентных элементов. Используя предположение индукции, видим, что существует такой элемент $X \in \mathfrak{g}$, $X \notin \mathfrak{h}$, что $\text{ad}_{\mathfrak{g}} H(X) \in \mathfrak{h}$ для всех $H \in \mathfrak{h}$. Значит, подпространство $\mathfrak{h} + KX$ алгебры $\mathfrak{g}$ есть подалгебра в $\mathfrak{g}$, которая, в силу максимальной размерности подалгебры $\mathfrak{h}$, должна совпадать с $\mathfrak{h}$. Значит, $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$.

Пусть теперь W — подпространство пространства V , заданное условием

$$W = \{e \in V \mid He = 0 \text{ для всех } H \in \mathfrak{h}\}.$$

В силу предположения индукции, $W \neq \{0\}$. Далее, если $e \in W$, то

$$HXe = [H, X]e + XHe = 0,$$

откуда $X \cdot W \subset W$. Ограничение эндоморфизма X на W нильпотентно и поэтому существует такой вектор $v \neq 0$ в W , что $Xv = 0$. Этот вектор v обладает свойствами, указанными в (ii).

Для доказательства утверждения (iii) обозначим через e_1 любой такой вектор из V , что $e_1 \neq 0$ и $Ze_1 = 0$ для всех $Z \in \mathfrak{g}$. Пусть E_1 — подпространство в V , натянутое на e_1 . Тогда каждый $Z \in \mathfrak{g}$ индуцирует нильпотентный эндоморфизм Z^* векторного пространства V/E_1 . Если $V/E_1 \neq \{0\}$, то можно выбрать такой вектор $e_2 \in V$, $e_2 \notin E_1$, что $e_2 + E_1 \in V/E_1$ аннулируется всеми Z^* ($Z \in \mathfrak{g}$). Продолжая таким образом, найдем такой базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V , что для каждого $Z \in \mathfrak{g}$ имеем

$$Ze_1 = 0, \quad Ze_i \equiv 0 \pmod{(e_1, \dots, e_{i-1})} \quad (2 \leq i \leq n). \quad (3)$$

Матрица, выражающая эндоморфизм Z в базисе $e_1, \dots, e_n$, имеет нули на главной диагонали и ниже ее.

Следствие 2.5. В обозначениях теоремы 2.4 имеем

$$X_1 X_2 \dots X_s = 0$$

если $s \geq \dim V$ и $X_i \in \mathfrak{g}$ ($1 \leq i \leq s$).

Действительно, это непосредственно вытекает из формул (3).

Следствие 2.6. Нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима.

Действительно, алгебра $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ есть подалгебра в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ и состоит из нильпотентных эндоморфизмов пространства $\mathfrak{g}$. Произведение s таких эндоморфизмов равно 0, если $s \geq \dim \mathfrak{g}$ (следствие 2.5). В частности, $\mathfrak{g}$ разрешима.

Определение. Для любой алгебры Ли $\mathfrak{l}$ определим

$$\mathcal{C}^0 \mathfrak{l} = \mathfrak{l}, \quad \mathcal{C}^{p+1} \mathfrak{l} = [\mathfrak{l}, \mathcal{C}^p \mathfrak{l}] \quad (p = 0, 1, \dots).$$

Ряд

$$\mathcal{C}^0 \mathfrak{l} \supset \mathcal{C}^1 \mathfrak{l} \supset \mathcal{C}^2 \mathfrak{l} \supset \dots$$

называется убывающим центральным рядом алгебры $\mathfrak{l}$.

Следствие 2.7. Алгебра Ли $\mathfrak{l}$ над K нильпотентна тогда и только тогда, когда $\mathcal{C}^m \mathfrak{l} = \{0\}$ для $m \geq \dim \mathfrak{l}$.

Действительно, если $\mathfrak{l}$ нильпотентна, то к алгебре Ли $\mathfrak{g} = \text{ad}(\mathfrak{l})$ можно применить следствие 2.5 и получить, что $\mathcal{C}^m \mathfrak{l} = \{0\}$, если $m \geq \dim \mathfrak{l}$. Обратное утверждение тривиально.

Следствие 2.8. Нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{l} \neq \{0\}$ имеет ненулевой центр.

Действительно, если $\mathcal{C}^m \mathfrak{l} = \{0\}$, то $\mathcal{C}^{m-1} \mathfrak{l}$ лежит в центре алгебры $\mathfrak{l}$.

§ 3. Подалгебры Картана

В этом параграфе через $\mathfrak{g}$ обозначается произвольная фиксированная полупростая алгебра Ли над полем комплексных

чисел $\mathbb{C}$. Присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$ будет обозначаться через ad .

Определение. *Подалгеброй Картана* алгебры $\mathfrak{g}$ называется подалгебра $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая следующим условиям:

- (i) $\mathfrak{h}$ — максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{g}$;
- (ii) для каждого $H \in \mathfrak{h}$ эндоморфизм $\text{ad } H$ пространства $\mathfrak{g}$ является полупростым.

В этом параграфе мы докажем, что каждая полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$ обладает подалгеброй Картана. Позже мы увидим, что для любых двух подалгебр Картана $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ алгебры $\mathfrak{g}$ существует такой автоморфизм σ алгебры $\mathfrak{g}$, что $\sigma \cdot \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$.

Пусть H — некоторый элемент в $\mathfrak{g}$, и пусть $0 = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ — различные собственные значения эндоморфизма $\text{ad } H$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ рассмотрим подпространство

$$\mathfrak{g}(H, \lambda) = \{X \in \mathfrak{g} \mid (\text{ad } H - \lambda I)^k X = 0 \text{ для некоторого } k\}.$$

Тогда, вследствие предложения 1.1, имеем $\mathfrak{g}(H, \lambda) = 0$, за исключением случая, когда $\lambda = \lambda_i$ для некоторого i . Далее,

$$\mathfrak{g} = \sum_{i=0}^r \mathfrak{g}(H, \lambda_i) \quad (\text{прямая сумма}).$$

Определение. Элемент $H \in \mathfrak{g}$ называется *регулярным*, если

$$\dim \mathfrak{g}(H, 0) = \min_{X \in \mathfrak{g}} (\dim \mathfrak{g}(X, 0)).$$

Мы докажем теперь следующую теорему, из которой вытекает существование подалгебр Картана.

Теорема 3.1. Пусть H_0 — регулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{g}(H_0, 0)$ есть подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$.

Это утверждение будет доказано при помощи теорем Ли и Энгеля. Положим $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(H_0, 0)$.

Лемма 3.2. Если $Z \in \mathfrak{g}$, то $[\mathfrak{g}(Z, \lambda), \mathfrak{g}(Z, \mu)] \subset \mathfrak{g}(Z, \lambda + \mu)$. В частности, $\mathfrak{h}$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$.

Пусть $X_\lambda \in \mathfrak{g}(Z, \lambda)$, $X_\mu \in \mathfrak{g}(Z, \mu)$. Тогда

$$(\text{ad } Z - (\lambda + \mu)I)[X_\lambda, X_\mu] = [(\text{ad } Z - \lambda I)X_\lambda, X_\mu] + [X_\lambda, (\text{ad } Z - \mu I)X_\mu]$$

и по индукции

$$\begin{aligned} (\text{ad } Z - (\lambda + \mu)I)^n [X_\lambda, X_\mu] &= \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} [(\text{ad } Z - \lambda I)^i X_\lambda, (\text{ad } Z - \mu I)^{n-i} X_\mu]. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует лемма.

Лемма 3.3. *Алгебра $\mathfrak{h}$ нильпотентна.*

Пусть $0 = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ — различные собственные значения эндоморфизма $\text{ad } H_0$, и пусть $\mathfrak{g}'$ — подпространство $\sum_{i=1}^r \mathfrak{g}(H_0, \lambda_i)$ в $\mathfrak{g}$. Тогда $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}'] \subset \mathfrak{g}'$, в силу леммы 3.2. Для каждого $H \in \mathfrak{h}$ обозначим через H' ограничение эндоморфизма $\text{ad } H$ на $\mathfrak{g}'$. Пусть $d(H) = \det H'$. Тогда функция $H \rightarrow d(H)$ является полиномиальной функцией на $\mathfrak{h}$ и, поскольку H_0 имеет только ненулевые собственные значения, $d(H_0) \neq 0$. Но если полиномиальная функция равна нулю на открытом множестве, то она должна равняться нулю тождественно. Отсюда следует, что подмножество S в $\mathfrak{h}$, состоящее из всех точек $H \in \mathfrak{h}$, для которых $d(H) \neq 0$, плотно в $\mathfrak{h}$. Если H — некоторый элемент из S , то все собственные значения эндоморфизма H' пространства $\mathfrak{g}'$ отличны от 0. Отсюда следует, что $\mathfrak{g}(H, 0) \subset \mathfrak{h}$. Так как H_0 регулярен, то на самом деле $\mathfrak{g}(H, 0) = \mathfrak{h}$. Это значит, что ограничение эндоморфизма $\text{ad } H$ на $\mathfrak{h}$ нильпотентно. Это ограничение есть эндоморфизм $\text{ad}_{\mathfrak{h}} H$, так что для $l = \dim \mathfrak{h}$ имеем

$$(\text{ad}_{\mathfrak{h}} H)^l = 0 \text{ для каждого } H \in S. \quad (1)$$

Так как S плотно в $\mathfrak{g}$, то соотношение (1), в силу непрерывности, имеет место для всех $H \in \mathfrak{h}$. Значит, $\mathfrak{h}$ нильпотентна.

Определение регулярного элемента и доказательство леммы 3.3 остаются в силе для любой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В следующей лемме, однако, мы используем полупростоту алгебры $\mathfrak{g}$.

Лемма 3.4. *Алгебра $\mathfrak{h}$ абелева и является максимальной абелевой подалгеброй в $\mathfrak{g}$.*

Как обычно, обозначим через B форму Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$. Если $X \in \mathfrak{g}(H_0, \lambda)$ и $H \in \mathfrak{h}$, то $\text{ad } X \text{ ad } H$ отображает подпространство $\mathfrak{g}(H_0, \mu)$ в $\mathfrak{g}(H_0, \lambda + \mu)$. Выбирая в $\mathfrak{g}$ базис, составленный из базисов подпространств $\mathfrak{g}(H_0, \lambda_i)$, видим, что

$$\text{Tr}(\text{ad } X \text{ ad } H) = B(X, H) = 0, \text{ если } H \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}'. \quad (2)$$

Алгебра $\mathfrak{h}$, будучи нильпотентной, разрешима (следствие 2.6). Поэтому, в силу следствия 2.3, существует базис алгебры $\mathfrak{g}$, в котором все эндоморфизмы $\text{ad } H$ ($H \in \mathfrak{h}$) выражаются верхними треугольными матрицами. Если A, B, C — верхние треугольные матрицы, то матрицы ABC и BAC имеют одни и те же диагональные элементы. Значит, $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BAC)$. В частности, имеем

$$\text{Tr}(\text{ad}[H_1, H_2] \text{ ad } H) = 0, \text{ если } H_1, H_2, H \in \mathfrak{h}.$$

Сопоставляя это с (2), видим, что элемент $[H_1, H_2]$ ортогонален к $\mathfrak{g}$ (относительно формы B). Используя полупростоту алгебры $\mathfrak{g}$, заключаем отсюда, что алгебра $\mathfrak{h}$ абелева. Максимальность сразу следует из определения алгебры $\mathfrak{h}$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3.1. Пусть λ — одно из ненулевых собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ эндоморфизма $\text{ad } H_0$. Подпространство $\mathfrak{g}(H_0, \lambda)$ инвариантно относительно каждого эндоморфизма $\text{ad } H$ ($H \in \mathfrak{h}$). Поэтому если обозначить через $\text{ad}_\lambda H$ ограничение эндоморфизма $\text{ad } H$ на $\mathfrak{g}(H_0, \lambda)$, то отображение $\text{ad}_\lambda : H \rightarrow \text{ad}_\lambda H$ будет представлением алгебры $\mathfrak{h}$ в пространстве $\mathfrak{g}(H_0, \lambda)$. Поскольку семейство $\text{ad}_\lambda(\mathfrak{h})$ коммутативно, существует базис $e_1, \dots, e_s$ пространства $\mathfrak{g}(H_0, \lambda)$, в котором все эндоморфизмы $\text{ad}_\lambda H$ ($H \in \mathfrak{h}$) выражаются верхними треугольными матрицами, причем диагональ матрицы соответствует полупростой части эндоморфизма. Диагональные элементы $\alpha_1(H), \dots, \alpha_s(H)$ являются линейными функциями на $\mathfrak{h}$ и $\alpha_1(H_0) = \dots = \alpha_s(H_0) = \lambda$. Пусть β — некоторая линейная функция на $\mathfrak{h}$, такая, что $\beta(H_0) = \lambda$. Пусть V_β — подпространство в $\mathfrak{g}(H_0, \lambda)$, натянутое на базисные векторы e_j , для которых $\alpha_j(H) \equiv \beta(H)$ для всех $H \in \mathfrak{h}$. Тогда V_β есть множество таких векторов $X \in \mathfrak{g}(H_0, \lambda)$, что

$$(\text{ad } H - \beta(H) I)^k X = 0 \quad (3)$$

для всех $H \in \mathfrak{h}$ и некоторого фиксированного k (не зависящего от H). С другой стороны, $\beta(H_0) = \lambda$, так что ни один вектор $X \in \mathfrak{g}$, не лежащий в $\mathfrak{g}(H_0, \lambda)$, не может удовлетворять равенству (3). Отсюда следует, что

$$V_\beta = \{X \in \mathfrak{g} \mid (\text{ad } H - \beta(H) I)^k X = 0 \text{ для всех } H \in \mathfrak{h} \text{ и некоторого фиксированного } k\}. \quad (4)$$

Если задана некоторая линейная функция β на $\mathfrak{h}$, то можно определить подмножество V_β в $\mathfrak{g}$ при помощи равенства (4). Тогда V_β — подпространство в $\mathfrak{g}$ и $V_0 = \mathfrak{h}$. Далее, в точности так же, как лемма 3.2, доказывается соотношение

$$[V_\alpha, V_\beta] \subset V_{\alpha+\beta}. \quad (5)$$

Выше было показано, что $\mathfrak{g}$ есть прямая сумма некоторых из подпространств V_β , например, $\mathfrak{g} = \sum_i V_{\beta_i}$.

Тогда, если $H, H' \in \mathfrak{h}$, то

$$B(H, H') = \text{Tr}(\text{ad } H \text{ ad } H') = \sum_i \beta_i(H) \beta_i(H') \dim V_{\beta_i}. \quad (6)$$

Эндоморфизм $\text{ad } H$ можно представить в виде суммы

$$\text{ad } H = S + N,$$

где эндоморфизм S полупрост, N нильпотентен и $SN = NS$. Так как S — многочлен от $\text{ad } H$, то каждое V_β инвариантно относительно S и из (4) следует, что $SX = \beta(H)X$ для всех $X \in V_\beta$. Теперь из (5) легко выводится, что S — дифференцирование алгебры $\mathfrak{g}$. Из предложения 6.4 гл. II мы знаем, что каждое

дифференцирование алгебры $\mathfrak{g}$ является внутренним. Другими словами, существует такой элемент $Z \in \mathfrak{g}$, что $S = \text{ad } Z$. Но S , будучи многочленом от $\text{ad } H$, перестановочен со всеми элементами алгебры $\text{ad } \mathfrak{h}$. Поскольку $\mathfrak{h}$ — максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{g}$, отсюда следует, что $Z \in \mathfrak{h}$. Далее, $\text{ad } Z(X) = \beta(H)X$ для $X \in V_\beta$. Поэтому из определения пространства V_β следует, что $\beta(H) = \beta(Z)$ для всякой линейной функции β на $\mathfrak{h}$, удовлетворяющей условию $V_\beta \neq \{0\}$. Но тогда из формул (6) и (2) видно, что элемент $Z - H$ ортогонален к $\mathfrak{g}$ (относительно формы B). Следовательно, $Z = H$ и эндоморфизм $\text{ad } H$ является полупростым. На этом доказательство теоремы 3.1 закончено.

§ 4. Разложение на корневые пространства

Структурная теория полупростых алгебр Ли основывается на следующей теореме, доказательство которой было дано в § 3.

Теорема 4.1. *Каждая полупростая алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$ содержит подалгебру Картана.*

В § 4 и § 5 через $\mathfrak{g}$ будет обозначаться произвольная полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$ и через $\mathfrak{h}$ — произвольная фиксированная подалгебра Картана.

Пусть α — линейная функция на комплексном векторном пространстве $\mathfrak{h}$. Обозначим через $\mathfrak{g}^\alpha$ линейное подпространство в $\mathfrak{g}$, заданное условием

$$\mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X \text{ для всех } H \in \mathfrak{h}\}.$$

Линейная функция α называется *корнем* (алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$), если $\mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\}$. В этом случае $\mathfrak{g}^\alpha$ называется *корневым подпространством*. Так как $\mathfrak{h}$ — максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$. Из тождества Якоби легко получить соотношение

$$[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta} \quad (1)$$

для любой пары $\mathbb{C}$ -линейных функций α, β на $\mathfrak{h}$.

Обозначим через Δ множество всех ненулевых корней и, как и раньше, обозначим через B форму Киллинга на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.

Теорема 4.2.

(i) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha$ (прямая сумма).

(ii) $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$ для каждого $\alpha \in \Delta$.

(iii) Пусть α, β — два таких корня, что $\alpha + \beta \neq 0$. Тогда $\mathfrak{g}^\alpha$ и $\mathfrak{g}^\beta$ ортогональны относительно формы B .

(iv) Ограничение формы B на $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ невырождено. Для каждого корня α существует единственный такой элемент $H_\alpha \in \mathfrak{h}$, что

$$B(H, H_\alpha) = \alpha(H) \text{ для всех } H \in \mathfrak{h}.$$

(v) Если $\alpha \in \Delta$, то $-\alpha \in \Delta$ и

$$[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] = \mathcal{C}H_\alpha, \quad \alpha(H_\alpha) \neq 0.$$

Доказательство. (i) Докажем сначала, что сумма является прямой. Если бы это было не так, то мы имели бы соотношение

$$H^* + \sum_i X_{\alpha_i} = 0,$$

где $H^* \in \mathfrak{h}$, $X_{\alpha_i} \neq 0$ в $\mathfrak{g}^{\alpha_i}$, корни α_i различны и отличны от 0. Тогда можно выбрать такой $H \in \mathfrak{h}$, что числа $\alpha_i(H)$ все различны и отличны от 0. Действительно, подмножество N в $\mathfrak{h}$, на котором все функции α_i различны и отличны от 0, является дополнением к объединению конечного множества гиперплоскостей. В частности, N не пусто. Тогда H^* и векторы X_{α_i} лежат в различных собственных подпространствах эндоморфизма $\text{ad } H$ и поэтому линейно независимы. С другой стороны, так как множество $\text{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ является полупростым, то мы можем написать $\mathfrak{g} = \sum_i \mathfrak{g}_i$ (прямая сумма), где каждое $\mathfrak{g}_i$ есть одномерное подпространство в $\mathfrak{g}$, инвариантное относительно $\text{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$. Это значит, что $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}^\alpha$ для подходящего корня α , откуда следует (i). В качестве следствия равенства (i) получаем следующее утверждение:

$$\text{Если } \alpha(H_0) = 0 \text{ для каждого } \alpha \in \Delta, \text{ то } H_0 = 0. \quad (2)$$

Действительно, из свойства (i) видно, что $[H_0, X] = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}$. Значит, $H_0 = 0$, ибо центр равен $\{0\}$. Чтобы доказать (iii), выберем любые $X \in \mathfrak{g}^\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}^\beta$. Тогда $\text{ad } X \text{ ad } Y$ отображает $\mathfrak{g}^\gamma$ в $\mathfrak{g}^{\gamma+\alpha+\beta}$. Поскольку $\alpha + \beta \neq 0$, ясно, что $\mathfrak{g}^\gamma \cap \mathfrak{g}^{\gamma+\alpha+\beta} = \{0\}$. Поэтому если выразить эндоморфизм $\text{ad } X \text{ ad } Y$ в базисе, каждый из элементов которого лежит в некотором корневом подпространстве $\mathfrak{g}^\gamma$, то станет очевидным, что $\text{Tr}(\text{ad } X \text{ ad } Y) = 0$. Докажем теперь (iv). Если $H_0 \in \mathfrak{h}$ удовлетворяет условию $B(H_0, H) = 0$ для всех $H \in \mathfrak{h}$, то, в силу (iii), $B(H_0, X) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}$. Значит, $H_0 = 0$. Вторая часть утверждения (iv) является следствием первой. Чтобы доказать (v), возьмем $\alpha \in \Delta$. Если бы подпространство $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ было нулевым, то, в силу (iii), каждый $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ удовлетворял бы условию $B(X_\alpha, X) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}$, что невозможно. Пусть H , X_α , $X_{-\alpha}$ — произвольные элементы из $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ соответственно. Тогда

$$B([X_\alpha, X_{-\alpha}], H) = B(X_\alpha, [X_{-\alpha}, H]) = B(X_\alpha, X_{-\alpha}) B(H_\alpha, H).$$

Используя (iv), получаем отсюда, что

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = B(X_\alpha, X_{-\alpha}) H_\alpha. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь любой элемент $E_{-\alpha} \neq 0$ из $\mathfrak{g}^{-\alpha}$. Так как B индуцирует невырожденную билинейную форму на $\mathfrak{g}^{\alpha} \times \mathfrak{g}^{-\alpha}$ ¹⁾, то существует такой вектор $E_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, что

$$B(E_{\alpha}, E_{-\alpha}) = +1.$$

Пусть β — некоторый корень, и пусть $\mathfrak{g}^* = \sum_{n \in N} \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}$, где N — множество всех целых n , для которых $\beta + n\alpha$ является корнем. В силу формулы (1), подпространство $\mathfrak{g}^*$ инвариантно относительно эндоморфизмов $\text{ad } E_{-\alpha}$, $\text{ad } E_{\alpha}$, $\text{ad } H_{\alpha}$. Вычислим двумя способами след эндоморфизма $\text{ad } H_{\alpha}$. Так как $[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = H_{\alpha}$, то имеем

$$\text{Tr}_{\mathfrak{g}^*} \text{ad } H_{\alpha} = -\text{Tr}_{\mathfrak{g}^*} \text{ad } E_{-\alpha} \text{ad } E_{\alpha} + \text{Tr}_{\mathfrak{g}^*} \text{ad } E_{\alpha} \text{ad } E_{-\alpha} = 0.$$

С другой стороны, каждое подпространство $\mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}$ инвариантно относительно $\text{ad } H_{\alpha}$, откуда

$$\text{Tr}_{\mathfrak{g}^*} \text{ad } H_{\alpha} = \sum_{n \in N} (\beta + n\alpha)(H_{\alpha}) \dim \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}.$$

Итак, мы имеем соотношение

$$\beta(H_{\alpha}) \sum_{n \in N} \dim \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha} = -\alpha(H_{\alpha}) \sum_{n \in N} n \dim \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha} \quad (4)$$

для каждого $\alpha \in \Delta$ и каждого корня β .

Поскольку $\dim \mathfrak{g}^{\beta} > 0$, из формул (2) и (4) следует, что $\alpha(H_{\alpha}) \neq 0$. Тем самым доказано (v). Для доказательства утверждения (ii) предположим, что $\dim \mathfrak{g}^{\alpha} > 1$. Тогда существует такой вектор $D_{\alpha} \neq 0$ в $\mathfrak{g}^{\alpha}$, что

$$B(D_{\alpha}, E_{-\alpha}) = 0$$

(E_{α} и $E_{-\alpha}$ — выбранные выше элементы). Положим $D_{-1} = 0$, $D_n = (\text{ad } E_{\alpha})^n D_{\alpha}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Тогда

$$[E_{-\alpha}, D_n] = -\frac{n(n+1)}{2} \alpha(H_{\alpha}) D_{n-1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Для $n = 0$ это следует из формулы (3). Предполагая, что (5) верно для n , имеем

$$\begin{aligned} [E_{-\alpha}, D_{n+1}] &= [E_{-\alpha}, [E_{\alpha}, D_n]] = -[E_{\alpha}, [D_n, E_{-\alpha}]] - [D_n, [E_{-\alpha}, E_{\alpha}]] = \\ &= -\frac{n(n+1)}{2} \alpha(H_{\alpha}) [E_{\alpha}, D_{n-1}] + [D_n, H_{\alpha}] = \\ &= -\left(\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\right) \alpha(H_{\alpha}) D_n = -\frac{(n+1)(n+2)}{2} \alpha(H_{\alpha}) D_n, \end{aligned}$$

¹⁾ Действительно, если бы существовал такой элемент $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}$ $X_{\alpha} \neq 0$, что $B(X_{\alpha}, X_{-\alpha}) = 0$ для всех $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, то, в силу (iii), мы имели бы $B(X_{\alpha}, X) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}$, что невозможно. — Прим. перев.

где использован тот факт, что $D_n \in \mathfrak{g}^{(n+1)\alpha}$. Поскольку $D_0 \neq 0$, из формулы (5) видно, что все $D_n \neq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), что невозможно. Тем самым доказано условие (ii), и теорема 4.2 доказана.

Пусть $\alpha \in \Delta$, и пусть β — некоторый корень. Тогда α -серией, содержащей корень β , называется множество всех корней вида $\beta + n\alpha$, где n — целое число.

Теорема 4.3. Пусть β — корень и $\alpha \in \Delta$.

(i) α -серия, содержащая корень β , имеет вид $\beta + n\alpha$ ($p \leq n \leq q$) (α -серия есть непрерывающийся ряд). При этом

$$-2 \frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = p + q.$$

(ii) Пусть $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, $X_\beta \in \mathfrak{g}^\beta$, где $\beta \neq 0$. Тогда

$$[X_{-\alpha}, [X_\alpha, X_\beta]] = \frac{q(1-p)}{2} \alpha(H_\alpha) B(X_\alpha, X_{-\alpha}) X_\beta.$$

(iii) Единственными корнями, пропорциональными корню α , являются $-\alpha$, 0 , α .

(iv) Предположим, что $\alpha + \beta \neq 0$. Тогда $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.

Доказательство. Пусть $E_{-\alpha}$, E_α — некоторые элементы из $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ и $\mathfrak{g}^\alpha$ соответственно, удовлетворяющие условию

$$B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1.$$

Для доказательства утверждения (i) возьмем два целых числа r, s , таких, что $\beta + n\alpha$ есть корень при $r \leq n \leq s$, но не является корнем ни при $n = r - 1$, ни при $n = s + 1$. Такое множество $\beta + n\alpha$ ($r \leq n \leq s$) мы будем называть *максимальным рядом*. Подпространство

$$\mathfrak{g}^* = \sum_{n=r}^s \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}$$

инвариантно относительно $\text{ad } E_{-\alpha}$, $\text{ad } E_\alpha$, $\text{ad } H_\alpha$. Так как $H_\alpha = [E_\alpha, E_{-\alpha}]$, то

$$\text{Tr}_{\mathfrak{g}^*}(\text{ad } H_\alpha) = 0.$$

С другой стороны,

$$\text{Tr}_{\mathfrak{g}^*}(\text{ad } H_\alpha) = \sum_{n=r}^s (\beta + n\alpha)(H_\alpha).$$

Так как $\alpha(H_\alpha) \neq 0$, то

$$-2 \frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = r + s; \quad (6)$$

α -серия, содержащая β , разумеется, является объединением максимальных рядов $\beta + n\alpha$ ($r_i \leq n \leq s_i$). Так как соотношение (6)

имеет место для каждого максимального ряда, то α -серия может состоять лишь из одного такого ряда. Тем самым доказано (i). Для доказательства утверждения (iii) рассмотрим α -серию $n\alpha$ ($p \leq n \leq q$), содержащую 0. Подпространство

$$\mathfrak{s} = \sum_{n=-1}^q \mathfrak{g}^{n\alpha}$$

инвариантно относительно $\text{ad } E_{-\alpha}$, $\text{ad } E_{\alpha}$ и $\text{ad } H_{\alpha}$. Как и выше, получаем

$$0 = \text{Tr}_{\mathfrak{s}} \text{ad } H_{\alpha} = \sum_{n=-1}^q n\alpha(H_{\alpha}),$$

откуда следует, что $q=1$. Применяя теорему 4.2 (v), видим, что $p=-1$. Предположим теперь, что существует такое комплексное число c , не являющееся целым, что $c\alpha$ — корень. Применяя утверждение (i) к корню $\beta = c\alpha$, мы получаем, что $c = n + \frac{1}{2}$, где n — целое число. Та α -серия, которая содержит β , содержит также корень $-(n + \frac{1}{2})\alpha$ и, поскольку эта серия состоит в точности из одного ряда, она должна содержать корни $-\frac{1}{2}\alpha$ и $\frac{1}{2}\alpha$.

Но поскольку $\alpha = 2(\frac{1}{2}\alpha)$, это противоречит первой части доказательства. Докажем теперь (iv). Мы имеем $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$, так что (iv) очевидно, если $\alpha + \beta$ — не корень. Предположим, что $\alpha + \beta$ — корень, и пусть $\beta + n\alpha$ ($p \leq n \leq q$) — α -серия, содержащая β . Тогда $q \geq 1$. Если бы $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] = \{0\}$, то подпространство

$$\mathfrak{t} = \sum_{n=p}^0 \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}$$

было бы инвариантным относительно $\text{ad } E_{\alpha}$, $\text{ad } E_{-\alpha}$, $\text{ad } H_{\alpha}$. Как и выше, получаем, что

$$0 = \text{Tr}_{\mathfrak{t}} \text{ad } H_{\alpha} = \sum_{n=p}^0 (\beta + n\alpha)(H_{\alpha}).$$

Но $-2\beta(H_{\alpha}) = \alpha(H_{\alpha})p$. Тогда из (i) следует, что $q=0$, и мы пришли к противоречию. Наконец, докажем утверждение (ii). Сначала заметим, что $\beta + p\alpha \neq 0$. Выберем вектор $E_p \neq 0$ в $\mathfrak{g}^{\beta+p\alpha}$ и положим $E_n = (\text{ad } E_{\alpha})^{n-p} E_p$ для $n \geq p$. Тогда $E_n = 0$ для $n > q$. Если $p \leq n \leq q$, то $E_n \neq 0$ вследствие утверждения (iv) и теоремы 4.2 (v). Докажем теперь равенство

$$[E_{-\alpha}, [E_{\alpha}, E_n]] = \frac{(q-n)(1-p+n)}{2} \alpha(H_{\alpha}) E_n \quad (n \geq p). \quad (7)$$

Поскольку X_β пропорционален вектору E_0 , из формулы (7) будет следовать (ii). Докажем (7) по индукции и рассмотрим сначала случай $n = p$. По тождеству Якоби

$$\begin{aligned} [E_{-\alpha}, [E_\alpha, E_p]] &= -[E_\alpha, [E_p, E_{-\alpha}]] - [E_p, [E_{-\alpha}, E_\alpha]] = \\ &= 0 + [E_p, H_\alpha] = -(\beta + p\alpha)(H_\alpha)E_p, \end{aligned}$$

что, в силу (i), равно $\frac{1}{2}(q-p)\alpha(H_\alpha)E_p$. Допустим теперь, что формула (7) справедлива. Тогда

$$[E_{-\alpha}, [E_\alpha, E_{n+1}]] = -[E_\alpha, [E_{n+1}, E_{-\alpha}]] - [E_{n+1}, [E_{-\alpha}, E_\alpha]]. \quad (8)$$

Первый член справа равен выражению $[E_\alpha, [E_{-\alpha}, [E_\alpha, E_n]]]$, что, по предположению индукции, равно

$$\frac{(q-n)(1-p+n)}{2}\alpha(H_\alpha)E_{n+1}.$$

Последний член в правой части соотношения (8) равен $-(\beta + (n+1)\alpha)(H_\alpha)E_{n+1}$, так как $E_{n+1} \in \mathfrak{g}^{\beta+(n+1)\alpha}$. Применяя (i), видим, что эти два члена в сумме дают

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha(H_\alpha)E_{n+1}\{(q-n)(1-p+n) + p + q - 2n - 2\} &= \\ &= \frac{(q-n-1)(n+2-p)}{2}\alpha(H_\alpha)E_{n+1}. \end{aligned}$$

Тем самым доказаны равенство (7) и теорема 4.3.

Теорема 4.4. Пусть $\mathfrak{h}^* = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbf{R}H_\alpha$. Тогда

- (i) форма B является вещественной и положительно определенной на $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$;
- (ii) $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^* + i\mathfrak{h}^*$ (прямая сумма).

Доказательство. Для $H, H' \in \mathfrak{h}$ имеет место равенство

$$B(H, H') = \text{Tr}(\text{ad } H \text{ ad } H') = \sum_{\beta \in \Delta} \beta(H)\beta(H'). \quad (9)$$

Из теоремы 4.3 (i) мы знаем, что

$$2\beta(H_\alpha) = -\alpha(H_\alpha)(p_{\beta,\alpha} + q_{\beta,\alpha}), \quad p_{\beta,\alpha}, q_{\beta,\alpha} \text{ — целые числа.}$$

Отсюда

$$\alpha(H_\alpha) = B(H_\alpha, H_\alpha) = \frac{1}{4}\alpha(H_\alpha)^2 \sum_{\beta \in \Delta} (p_{\beta,\alpha} + q_{\beta,\alpha})^2.$$

Поскольку $\alpha(H_\alpha) \neq 0$, мы видим, что $\alpha(H_\alpha)$ — вещественное (и положительное) число и $\beta(H)$ вещественно для каждого $H \in \mathfrak{h}^*$. Используя соотношения (2) и (9), получаем утверждение (i). Далее, из (i) видно, что $\mathfrak{h}^* \cap i\mathfrak{h}^* = \{0\}$. Наконец, пространства $\mathfrak{h}$

и $\sum_{\alpha \in \Delta} CH_\alpha$ должны совпадать. Действительно, предположим противное. Тогда существует такая линейная функция λ на $\mathfrak{h}$, которая не равна тождественно 0, но обращается в 0 на подпространстве $\sum_{\alpha \in \Delta} CH_\alpha$. Существует единственный такой элемент $H_\lambda \in \mathfrak{h}$, что $B(H, H_\lambda) = \lambda(H)$ для всех $H \in \mathfrak{h}$. В частности, $\alpha(H_\lambda) = 0$ для всех $\alpha \in \Delta$, откуда, в силу формулы (2), $H_\lambda = 0$ и $\lambda \equiv 0$. Это противоречие доказывает утверждение (ii).

§ 5. Значение системы корней

С каждой полупростой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и подалгеброй Картана $\mathfrak{h}$ мы связали систему векторов H_α ($\alpha \in \Delta$). Теперь мы увидим, что эта система определяет алгебру $\mathfrak{g}$ с точностью до изоморфизма.

Пусть S — некоторое подмножество в Δ . Оболочка подмножества S , обозначаемая через $\bar{S}$, — это, по определению, множество всех корней из Δ , имеющих вид $\pm \alpha$, $\pm(\alpha + \beta)$, где α, β пробегает S . Для каждой пары $\alpha, -\alpha \in \bar{S}$ выберем векторы $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, такие, что

$$B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1 \text{ для } \alpha, -\alpha \in \bar{S}. \quad (1)$$

Пусть α, β — любые элементы из $\bar{S}$, такие, что $\alpha + \beta \neq 0$ и что либо $\alpha + \beta \in \bar{S}$, либо $\alpha + \beta \notin \Delta$. Определим число $N_{\alpha, \beta}$ условиями

$$\begin{aligned} [E_\alpha, E_\beta] &= N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta}, \text{ если } \alpha + \beta \in \bar{S}, \\ N_{\alpha, \beta} &= 0, \text{ если } \alpha + \beta \notin \Delta. \end{aligned}$$

Таким образом, $N_{\alpha, \beta}$ определено при следующих предположениях:

(а) $\alpha, \beta \in \bar{S}$; (б) $\alpha + \beta \neq 0$; (в) $\alpha + \beta \in \bar{S}$ или $\alpha + \beta \notin \Delta$.

Очевидно, что $N_{\alpha, \beta} = -N_{\beta, \alpha}$.

Лемма 5.1. Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \bar{S}$ и $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Тогда

$$N_{\alpha, \beta} + N_{\beta, \gamma} + N_{\gamma, \alpha} = 0 \text{ (все } N \text{ определены)}.$$

Доказательство. Применим тождество Якоби к векторам $E_\alpha, E_\beta, E_\gamma$. В силу равенства (3) из § 4, получаем, что

$$N_{\beta, \gamma} H_\alpha + N_{\gamma, \alpha} H_\beta + N_{\alpha, \beta} H_\gamma = 0.$$

С другой стороны, $-H_\gamma = H_\alpha + H_\beta$ и корень β не пропорционален корню α . Отсюда следует лемма.

Лемма 5.2. Предположим, что $\alpha, \beta \in S$, $\alpha + \beta \in \Delta$. Обозначим α -серию, содержащую β , через $\beta + n\alpha$ ($p \leq n \leq q$). Тогда

$$N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, -\beta} = -\frac{q(1-p)}{2} \alpha(H_\alpha).$$

Доказательство. Поскольку $-\alpha + (\alpha + \beta) = \beta$, число $N_{-\alpha, \alpha+\beta}$ определено. Используя теорему 4.3 (ii), приходим к равенству

$$N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, \alpha+\beta} = \frac{q(1-p)}{2} \alpha(H_\alpha).$$

Из леммы 5.1 получаем, что

$$N_{-\alpha, \alpha+\beta} = N_{\alpha+\beta, -\beta} = N_{-\beta, -\alpha},$$

откуда следует лемма 5.2.

Лемма 5.3. Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — четыре корня из S (не обязательно различные), никакие два из которых не дают в сумме 0. Если

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0,$$

то

$$N_{\alpha, \beta} N_{\gamma, \delta} + N_{\beta, \gamma} N_{\alpha, \delta} + N_{\gamma, \alpha} N_{\beta, \delta} = 0 \quad (\text{все } N \text{ определены}).$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\beta + \gamma$ — корень. Тогда $\beta + \gamma \in \bar{S}$ и, поскольку $\alpha + (\beta + \gamma) = -\delta$, число $N_{\alpha, \beta+\gamma}$ определено. В этом случае

$$[E_\alpha, [E_\beta, E_\gamma]] = N_{\beta, \gamma} N_{\alpha, \beta+\gamma} E_{-\delta}.$$

Применяя лемму 5.1 к корням $\alpha, \beta + \gamma, \delta$, получаем, что $N_{\alpha, \beta+\gamma} = N_{\delta, \alpha}$ и поэтому

$$[E_\alpha, [E_\beta, E_\gamma]] = -N_{\beta, \gamma} N_{\alpha, \delta} E_{-\delta}. \quad (2)$$

Это соотношение имеет место и в случае, когда $\beta + \gamma$ — не корень, потому что в этом случае обе части равенства являются нулями. Теперь сделаем циклическую перестановку букв α, β, γ в формуле (2) и применим тождество Якоби. Поскольку $E_{-\delta} \neq 0$, отсюда будет следовать лемма 5.3.

Множество M называется *упорядоченным* (или линейно упорядоченным) при помощи отношения $<$, если для любых двух элементов a, b этого множества имеет место в точности одно из следующих соотношений: $a < b$, $b < a$ или $a = b$. Кроме того, предполагается, что если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$. Соотношение $a > b$, по определению, значит то же, что $b < a$. Если отношение $a < b$ (или $a > b$) определено только для некоторых пар элементов из M , то множество M называется *частично упорядоченным*.

Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbf{R}$. Пространство V называется *упорядоченным векторным пространством*, если оно является упорядоченным множеством и если отношение порядка $<$ удовлетворяет условиям: (1) если $X > 0$, $Y > 0$, то $X + Y > 0$; (2) если $X > 0$ и a — положительное вещественное

число, то $aX > 0$. Заметим, что из условия (1) вытекает утверждение: $X > 0$ тогда и только тогда, когда $-X < 0$. Если $X_1, \dots, X_n$ — базис пространства V , то V можно следующим образом превратить в упорядоченное векторное пространство.

Пусть $X, Y \in V$. Мы говорим, что $X > Y$, если $X - Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ и первое ненулевое число в последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n$ положительно. Легко проверить, что с этим упорядочением V является упорядоченным векторным пространством. Такое упорядочение называется *лексикографическим упорядочением* пространства V по отношению к базису $X_1, \dots, X_n$. Обозначим через $V^\wedge$ двойственное к V пространство. Пусть $\lambda, \mu \in V^\wedge$. Мы говорим, что $\lambda > \mu$, если первое ненулевое число в последовательности $\lambda(X_1) - \mu(X_1), \dots, \lambda(X_n) - \mu(X_n)$ положительно. Это упорядочение пространства $V^\wedge$ называется *лексикографическим упорядочением* по отношению к базису $X_1, \dots, X_n$ пространства $V (= (V^\wedge)^\wedge)$. Элемент $\lambda \in V^\wedge$ называется *положительным*, если $\lambda > 0$.

Пусть V и W — два векторных пространства над $\mathbf{R}$, и $V^\wedge$ и $W^\wedge$ — двойственные к ним пространства. Если φ — линейное отображение пространства V в W , то через ${}^t\varphi$ будет обозначаться двойственное отображение пространства $W^\wedge$ в $V^\wedge$, определенное формулой

$$({}^t\varphi)(F)(v) = F(\varphi(v)) \quad (v \in V, F \in W^\wedge).$$

Следующая важная теорема показывает, что полупростая алгебра Ли над $\mathbf{C}$ определяется (с точностью до изоморфизма) своей подалгеброй Картана и соответствующей системой корней.

Теорема 5.4. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ — две полупростые алгебры Ли, $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}'$ — подалгебры Картана алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ соответственно. Обозначим через Δ и Δ' соответствующие множества ненулевых корней и, как обычно, положим

$$\mathfrak{h}^* = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbf{R}H_\alpha, \quad (\mathfrak{h}')^* = \sum_{\alpha' \in \Delta'} \mathbf{R}H_{\alpha'}.$$

Тогда Δ и Δ' можно рассматривать как подмножества двойственных пространств к $\mathfrak{h}^*$ и $(\mathfrak{h}')^*$ соответственно, так как каждая функция $\beta \in \Delta$ ($\beta' \in \Delta'$) вещественна на $\mathfrak{h}^*$ ($(\mathfrak{h}')^*$).

Предположим, что φ — такое взаимно однозначное $\mathbf{R}$ -линейное отображение пространства $\mathfrak{h}^*$ на $(\mathfrak{h}')^*$, что ${}^t\varphi$ отображает Δ' в Δ . Тогда φ можно продолжить до изоморфизма $\tilde{\varphi}$ алгебры $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}'$.

Доказательство. Формы Киллинга B и B' индуцируют на $\mathfrak{h}^*$ и $(\mathfrak{h}')^*$ положительно определенные метрики. Докажем сна-

чала, что φ — изометрия, т. е.

$$B(H_1, H_2) = B'(\varphi(H_1), \varphi(H_2)) \quad (H_1, H_2 \in \mathfrak{h}^*).$$

Достаточно доказать, что

$$B(H_\alpha, H_\beta) = B'(H_{\alpha'}, H_{\beta'})$$

для всех $\alpha, \beta \in \Delta$, где $\alpha = {}^t\varphi \cdot \alpha'$, $\beta = {}^t\varphi \cdot \beta'$. Используя теорему 4.3 (i), получаем, что

$$\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = \frac{\beta'(H_{\alpha'})}{\alpha'(H_{\alpha'})}$$

для всех $\alpha, \beta \in \Delta$. Меняя местами α и β , находим, что

$$B(H_\alpha, H_\beta) = c B(H_{\alpha'}, H_{\beta'}) \quad (\alpha, \beta \in \Delta),$$

где c — ненулевая константа, не зависящая от α и β . Поскольку

$$B(H_\alpha, H_\beta) = \sum_{\gamma \in \Delta} \gamma(H_\alpha) \gamma(H_\beta) = c^2 \sum_{\gamma' \in \Delta'} \gamma'(H_{\alpha'}) \gamma'(H_{\beta'}) = \\ = c^2 B(H_{\alpha'}, H_{\beta'}),$$

мы видим, что $c^2 = c$, т. е. $c = 1$, что и утверждалось.

Если в $\mathfrak{h}^*$ задан некоторый базис, то в двойственном к $\mathfrak{h}^*$ пространстве можно ввести лексикографическое упорядочение. При этом Δ становится упорядоченным множеством. Мы будем доказывать теорему 5.4 при помощи индукции относительно этого упорядочения. Выберем для каждого $\alpha \in \Delta$ такой элемент $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, что для всех $\alpha \in \Delta$ имеет место соотношение (1). Тогда числа $N_{\alpha, \beta}$ определены для всех $\alpha, \beta \in \Delta$, для которых $\alpha + \beta \neq 0$.

Покажем, что для каждого $\alpha' \in \Delta'$ существует такой элемент $E_{\alpha'} \in \mathfrak{g}'(\alpha')$, что

$$B'(E_{\alpha'}, E_{-\alpha'}) = 1 \quad (\alpha' \in \Delta') \quad (3)$$

и что

$$[E_{\alpha'}, E_{\beta'}] = N_{\alpha', \beta'} E_{\alpha' + \beta'}, \quad \text{если } \alpha', \beta', \alpha' + \beta' \in \Delta'. \quad (4)$$

Пусть $\varrho \in \Delta$ — положительный корень, и пусть Δ_ϱ — множество корней $\alpha \in \Delta$, для которых $-\varrho < \alpha < \varrho$. Если существуют корни, большие, чем ϱ , то через ϱ^* будет обозначаться наименьший из таких корней.

Предположение индукции состоит в том, что для каждого $\alpha \in \Delta_\varrho$ вектор E_α можно выбрать в $\mathfrak{g}'(\alpha')$ таким образом, что соотношение (3) удовлетворяется для всех $\alpha \in \Delta_\varrho$, а (4) удовлетворяется, если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta_\varrho$. Определим теперь $E_{\varrho'}$ и $E_{-\varrho'}$ таким образом, чтобы (3) удовлетворялось для всех $\alpha \in \Delta_{\varrho^*}$, а (4) — при $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta_{\varrho^*}$. Если ϱ^* не существует, то под Δ_{ϱ^*} надо понимать само множество Δ .

Если ϱ не допускает разложения $\varrho = \alpha + \beta$, где $\alpha, \beta \in \Delta_\varrho$, то нам достаточно взять в качестве $E_{\varrho'}$ произвольный ненулевой

элемент в $\mathfrak{g}'(\rho')$ и затем определить $E_{-\rho}$ соотношением

$$B'(E_{\rho}, E_{-\rho}) = 1. \quad (5)$$

Если ρ допускает разложение $\rho = \alpha + \beta$, $\alpha, \beta \in \Delta_{\rho}$, то выберем из этих разложений то, у которого α является наименьшим, и определим E_{ρ} при помощи равенства

$$[E_{\alpha}, E_{\beta}] = N_{\alpha, \beta} E_{\rho}. \quad (6)$$

Тогда $E_{\rho} \neq 0$, и мы опять можем определить $E_{-\rho}$ при помощи (5). Для доказательства того, что равенство (4) имеет место для всех $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta_{\rho^*}$, определим числа $M_{\gamma, \delta}$ при помощи соотношения

$$[E_{\gamma}, E_{\delta}] = M_{\gamma, \delta} E_{\gamma + \delta}, \text{ если } \gamma, \delta, \gamma + \delta \in \Delta_{\rho^*}. \quad (7)$$

Положим, далее, $M_{\gamma, \delta} = 0$, если γ, δ удовлетворяют условиям $\gamma, \delta \in \Delta_{\rho^*}$, $\gamma + \delta \neq 0$, $\gamma + \delta \notin \Delta$. Докажем, что $N_{\gamma, \delta} = M_{\gamma, \delta}$, если только $\gamma, \delta, \gamma + \delta \in \Delta_{\rho^*}$. Нам придется рассмотреть различные возможности:

1. $\gamma, \delta, \gamma + \delta \in \Delta_{\rho}$. Тогда $N_{\gamma, \delta} = M_{\gamma, \delta}$, в силу предположения индукции.

2. $\gamma + \delta = \rho$. Тогда $\gamma, \delta \in \Delta_{\rho}$. Можно предположить, что разложение $\rho = \gamma + \delta$ отличается от разложения $\rho = \alpha + \beta$. Тогда корни $\alpha, \beta, -\gamma, -\delta$ удовлетворяют соотношению $\alpha + \beta + (-\gamma) + (-\delta) = 0$, и никакие два из этих корней не дают в сумме 0. Мы можем применить к алгебре $\mathfrak{g}$ леммы 5.2 и 5.3 для $S = \Delta$. Получим

$$N_{\alpha, \beta} N_{-\gamma, -\delta} = -N_{\beta, -\gamma} N_{\alpha, -\delta} - N_{-\gamma, \alpha} N_{\beta, -\delta}, \quad (8)$$

$$N_{\gamma, \delta} N_{-\gamma, -\delta} = -\frac{l(1-k)}{2} \gamma(H_{\gamma}), \quad (8')$$

если $\delta + n\gamma$ ($k \leq n \leq l$) — γ -серия, содержащая δ . Можно также применить леммы 5.2 и 5.3 к $\mathfrak{g}'$, взяв в качестве S множество корней $\alpha', \beta', -\gamma', -\delta'$. Чтобы убедиться в том, что леммы можно применить, заметим, что ${}^t\varphi(\bar{S}) \subset \Delta_{\rho^*}$, так что $E_{\mu'}$ определен для каждого $\mu' \in \bar{S}$. Далее, числа $M_{\mu, \nu}$ определены при условиях: (а) $\mu', \nu' \in \bar{S}$, (б) $\mu' + \nu' \neq 0$, (в) $\mu' + \nu' \in \bar{S}$ или $\mu' + \nu' \notin \Delta'$. Мы получаем равенства

$$M_{\alpha, \beta} M_{-\gamma, -\delta} = -M_{\beta, -\gamma} M_{\alpha, -\delta} - M_{-\gamma, \alpha} M_{\beta, -\delta}, \quad (9)$$

$$M_{-\gamma, -\delta} M_{\gamma, \delta} = -\frac{l(1-k)}{2} (-\gamma'(H_{-\gamma'})), \quad (9')$$

так как $-\delta + n(-\gamma)$ ($k \leq n \leq l$) есть $(-\gamma)$ -серия, содержащая $-\delta$. Из рассмотрения случая 1 мы знаем, что правые части равенств (9) и (8) равны между собой. Из формул (6) и (7) имеем $M_{\alpha, \beta} = N_{\alpha, \beta} \neq 0$. Отсюда следует, что $N_{-\gamma, -\delta} = M_{-\gamma, -\delta}$. В силу

первой части доказательства, $\gamma(H_\gamma) = \gamma'(H_{\gamma'})$. Поэтому, согласно (8') и (9'), $N_{\gamma, \delta} = M_{\gamma, \delta}$, что мы и хотели доказать.

3. $\gamma + \delta = -\varrho$. Тогда $(-\gamma) + (-\delta) = \varrho$, $(-\gamma), (-\delta) \in \Delta_\varrho$. Из рассмотрения случая 2 видно, что $N_{\gamma, \delta} = M_{\gamma, \delta}$.

4. Один из корней γ, δ равен $\pm \varrho$. Предположим, например, что $\gamma = -\varrho$. Тогда $\delta \neq \pm \varrho$ и $\varrho = \delta + (-\gamma - \delta)$, где $\delta, -\gamma - \delta \in \Delta_\varrho$. Применяя случай 1, получаем $N_{\delta, -\gamma-\delta} = M_{\delta, -\gamma-\delta}$. Применим лемму 5.1 к алгебре $\mathfrak{g}$ для $S = \Delta$. Получим

$$N_{\delta, -\gamma-\delta} = N_{-\gamma-\delta, \gamma} = N_{\gamma, \delta}.$$

Применив лемму 5.1 к $\mathfrak{g}'$ для $S = \{\delta', -\gamma' - \delta', \gamma'\}$, получим (поскольку ${}^t\varphi(\bar{S}) \subset \Delta_{\varrho^*}$):

$$M_{\delta, -\gamma-\delta} = M_{-\gamma-\delta, \gamma} = M_{\gamma, \delta},$$

откуда следует, что $N_{\gamma, \delta} = M_{\gamma, \delta}$. Тем самым соотношения (3) и (4) доказаны.

Рассмотрим теперь линейное отображение $\tilde{\varphi}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$, определенное условиями

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(H_\alpha) &= \varphi(H_\alpha) = H_{\alpha'}, \\ \tilde{\varphi}(E_\alpha) &= E_{\alpha'}, \quad (\alpha \in \Delta). \end{aligned}$$

Тогда соотношения (3) и (4) показывают, что $\tilde{\varphi}$ есть изоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}'$.

З а м е ч а н и е 1. Продолжение $\tilde{\varphi}$, вообще говоря, не является единственным. Действительно, если $H \in \mathfrak{h}$, то $e^{\text{ad} H}$ есть автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, ограничение которого на $\mathfrak{h}$ является тождественным отображением.

З а м е ч а н и е 2. В изложенном выше доказательстве упорядочение множества Δ было введено для того, чтобы провести индукцию. Однако упорядочение множества Δ будет играть важную роль и в других случаях, которые представятся позже. Поэтому следует запомнить, что под «упорядочением множества Δ » всегда будет пониматься упорядочение множества Δ , индуцированное некоторым упорядочением двойственного к $\mathfrak{h}^*$ векторного пространства.

Т е о р е м а 5.5. Для каждого $\alpha \in \Delta$ можно выбрать такой вектор $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, что для всех $\alpha, \beta \in \Delta$ будет

$$\begin{aligned} [X_\alpha, X_{-\alpha}] &= H_\alpha, \quad [H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha \quad \text{для } H \in \mathfrak{h}; \\ [X_\alpha, X_\beta] &= 0, \quad \text{если } \alpha + \beta \neq 0 \text{ и } \alpha + \beta \notin \Delta; \\ [X_\alpha, X_\beta] &= N_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta}, \quad \text{если } \alpha + \beta \in \Delta, \end{aligned}$$

где константы $N_{\alpha, \beta}$ удовлетворяют условию

$$N_{\alpha, \beta} = -N_{-\alpha, -\beta}.$$

При любом таком выборе

$$N_{\alpha, \beta}^2 = \frac{q(1-p)}{2} \alpha(H_\alpha),$$

где $\beta + n\alpha$ ($p \leq n \leq q$) — α -серия, содержащая β .

Доказательство. Обозначим через φ отображение $H \rightarrow -H$ пространства $\mathfrak{h}^*$ на себя. Тогда $({}^t\varphi)(\lambda) = -\lambda$ для каждой вещественной линейной формы λ на $\mathfrak{h}^*$. В частности, ${}^t\varphi$ отображает множество Δ на себя. Из теоремы 5.4 мы знаем, что φ можно продолжить до автоморфизма $\tilde{\varphi}$ алгебры $\mathfrak{g}$. Для каждого $\alpha \in \Delta$ выберем такой $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, что

$$B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1 \text{ для всех } \alpha \in \Delta.$$

Так как $\tilde{\varphi}(E_\alpha) \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ и $\dim \mathfrak{g}^{-\alpha} = 1$, то существует такое комплексное число $c_{-\alpha}$, что $\tilde{\varphi}(E_\alpha) = c_{-\alpha}E_{-\alpha}$. Поскольку форма B инвариантна относительно φ , мы имеем $c_\alpha c_{-\alpha} = 1$. Для каждого $\alpha \in \Delta$ можно выбрать такое число a_α , что

$$a_\alpha^2 = -c_\alpha, \quad a_\alpha a_{-\alpha} = +1 \text{ для } \alpha \in \Delta.$$

Положим теперь

$$X_\alpha = a_\alpha E_\alpha \quad (\alpha \in \Delta).$$

В силу равенства (3) из § 4, имеем

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = B(X_\alpha, X_{-\alpha}) H_\alpha = a_\alpha a_{-\alpha} B(E_\alpha, E_{-\alpha}) H_\alpha = H_\alpha.$$

Далее,

$$\tilde{\varphi}(X_\alpha) = a_\alpha \tilde{\varphi}(E_\alpha) = a_\alpha c_{-\alpha} E_{-\alpha} = -a_{-\alpha} E_{-\alpha} = -X_{-\alpha}.$$

Если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$, то определим числа $N_{\alpha, \beta}$ условием $[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta}$. Тогда

$$\begin{aligned} -N_{\alpha, \beta} X_{-\alpha-\beta} &= \tilde{\varphi}(N_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta}) = \tilde{\varphi}[X_\alpha, X_\beta] = [-X_{-\alpha}, -X_{-\beta}] = \\ &= N_{-\alpha, -\beta} X_{-\alpha-\beta}, \end{aligned}$$

так что $N_{\alpha, \beta} = -N_{-\alpha, -\beta}$. Последнее равенство теоремы следует из леммы 2.2.

§ 6. Вещественные формы

Пусть V — векторное пространство над $\mathbf{R}$ конечной размерности. Комплексной структурой в пространстве V называется $\mathbf{R}$ -линейный эндоморфизм J пространства V , такой, что $J^2 = -I$, где I — тождественное отображение пространства V . Векторное пространство V над $\mathbf{R}$ с комплексной структурой J можно превратить в векторное пространство $\tilde{V}$ над $\mathbf{C}$, полагая

$$(a + ib)X = aX + bJX \quad (X \in V, a, b \in \mathbf{R}).$$

Действительно, из равенства $J^2 = -I$ вытекает, что $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$ для $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $X \in V$. Очевидно, $\dim_{\mathbb{C}} \tilde{V} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} V$ и, значит, V должно быть четномерным. Мы будем называть $\tilde{V}$ комплексным векторным пространством, связанным с V . Заметим, что V и $\tilde{V}$ совпадают как множества.

С другой стороны, если E — векторное пространство над $\mathbb{C}$, то E можно рассматривать как векторное пространство $E^{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$. Тогда умножение на i в пространстве E превращается в комплексную структуру J в пространстве $E^{\mathbb{R}}$ и, очевидно, имеем $E = (E^{\mathbb{R}})^{\sim}$.

Говорят, что алгебра Ли $\mathfrak{v}$ над $\mathbb{R}$ снабжена комплексной структурой J , если J есть комплексная структура в векторном пространстве $\mathfrak{v}$ и, кроме того,

$$[X, JY] = J[X, Y] \quad (X, Y \in \mathfrak{v}). \quad (1)$$

Условие (1) означает, что $(\operatorname{ad} X) \circ J = J \circ (\operatorname{ad} X)$ для всех $X \in \mathfrak{v}$ или, что равносильно, $\operatorname{ad}(JX) = J \circ (\operatorname{ad} X)$ для всех $X \in \mathfrak{v}$. Из равенства (1) следует, что

$$[JX, JY] = -[X, Y].$$

Комплексное пространство $\tilde{\mathfrak{v}}$ является алгеброй Ли над $\mathbb{C}$ с операцией коммутирования, унаследованной от алгебры $\mathfrak{v}$. Действительно,

$$\begin{aligned} [(a+ib)X, (c+id)Y] &= [aX+bJX, cY+dJY] = \\ &= ac[X, Y] + bcJ[X, Y] + adJ[X, Y] - bd[X, Y], \end{aligned}$$

откуда

$$[(a+ib)X, (c+id)Y] = (a+ib)(c+id)[X, Y].$$

С другой стороны, предположим, что $\mathfrak{e}$ — алгебра Ли над $\mathbb{C}$. Векторное пространство $\mathfrak{e}^{\mathbb{R}}$ имеет комплексную структуру J , заданную умножением на i в пространстве $\mathfrak{e}$. С операцией коммутирования, унаследованной от $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}^{\mathbb{R}}$ становится алгеброй Ли над $\mathbb{R}$ с комплексной структурой J .

Предположим теперь, что W — произвольное конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$. Произведение $W \times W$ снова является векторным пространством над $\mathbb{R}$, а эндоморфизм $J: (X, Y) \rightarrow (-Y, X)$ есть комплексная структура на $W \times W$. Комплексное векторное пространство $(W \times W)^{\sim}$ называется комплексной оболочкой пространства W и будет обозначаться через $W^{\mathbb{C}}$. Разумеется, $\dim_{\mathbb{C}} W^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} W$. Элементами пространства $W^{\mathbb{C}}$ являются пары (X, Y) , где $X, Y \in W$. Поскольку $(X, Y) = (X, 0) + i(Y, 0)$, мы будем писать $X + iY$ вместо (X, Y) . Так как

$$(a+bJ)(X, Y) = a(X, Y) + b(-Y, X) = (aX - bY, aY + bX),$$

то

$$(a + ib)(X + iY) = aX - bY + i(aY + bX).$$

С другой стороны, каждое конечномерное векторное пространство E над $\mathbf{C}$ изоморфно $W^{\mathbf{C}}$, где W — подходящее векторное пространство над $\mathbf{R}$. Действительно, если (Z_i) — некоторый базис пространства E , то можно взять в качестве W множество всех векторов вида $\sum_i a_i Z_i$, где $a_i \in \mathbf{R}$.

Пусть $\mathfrak{l}_0$ — алгебра Ли над $\mathbf{R}$. В силу сделанных выше соглашений, комплексное векторное пространство $\mathfrak{l} = (\mathfrak{l}_0)^{\mathbf{C}}$ состоит из всех символов $X + iY$, $X, Y \in \mathfrak{l}_0$. Определим в $\mathfrak{l}$ операцию коммутирования формулой

$$[X + iY, Z + iT] = [X, Z] - [Y, T] + i([Y, Z] + [X, T]).$$

Эта операция билинейна над $\mathbf{C}$. Ясно, что $\mathfrak{l} = (\mathfrak{l}_0)^{\mathbf{C}}$ является алгеброй Ли над $\mathbf{C}$; она называется *комплексной оболочкой алгебры Ли $\mathfrak{l}_0$* . Алгебра Ли $\mathfrak{l}^{\mathbf{R}}$ есть алгебра Ли над $\mathbf{R}$ с комплексной структурой J , получающейся из умножения на i в алгебре $\mathfrak{l}$.

Лемма 6.1. *Обозначим через K_0 , K и $K^{\mathbf{R}}$ формы Киллинга алгебр Ли $\mathfrak{l}_0$, $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{l}^{\mathbf{R}}$. Тогда*

$$K_0(X, Y) = K(X, Y) \text{ для } X, Y \in \mathfrak{l}_0,$$

$$K^{\mathbf{R}}(X, Y) = 2 \operatorname{Re} K(X, Y) \text{ для } X, Y \in \mathfrak{l}^{\mathbf{R}} \text{ (Re — действительная часть)}.$$

Первое соотношение очевидно. Для доказательства второго равенства предположим, что $X_i (1 \leq i \leq n)$ — некоторый базис алгебры $\mathfrak{l}$. Обозначим через $B + iC$ матрицу эндоморфизма $\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y$ в этом базисе, где B и C — вещественные матрицы. Тогда $X_1, \dots, X_n, JX_1, \dots, JX_n$ — базис пространства $\mathfrak{l}^{\mathbf{R}}$. Так как линейное преобразование $\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y$ пространства $\mathfrak{l}^{\mathbf{R}}$ перестановочно с J , то его матричное выражение имеет вид

$$\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует второе соотношение.

В качестве следствия леммы 6.1 заметим, что все алгебры $\mathfrak{l}_0$, $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{l}^{\mathbf{R}}$ являются полупростыми тогда и только тогда, когда этим свойством обладает одна из них.

Определение. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\mathbf{C}$. *Вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$* — это такая подалгебра $\mathfrak{g}_0$ вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}^{\mathbf{R}}$, что

$$\mathfrak{g}^{\mathbf{R}} = \mathfrak{g}_0 + J\mathfrak{g}_0 \text{ (прямая сумма векторных пространств)}.$$

В этом случае каждый $Z \in \mathfrak{g}$ однозначно записывается в виде

$$Z = X + iY \quad (X, Y \in \mathfrak{g}_0).$$

Таким образом, $\mathfrak{g}$ изоморфна комплексной оболочке алгебры $\mathfrak{g}_0$. Отображение σ алгебры $\mathfrak{g}$ на себя, заданное формулой $\sigma: X + iY \rightarrow X - iY$ ($X, Y \in \mathfrak{g}_0$), называется *сопряжением* алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{g}_0$. Отображение σ обладает следующими свойствами:

$$\sigma(\sigma(X)) = X, \quad \sigma(X + Y) = \sigma(X) + \sigma(Y),$$

$$\sigma(\alpha X) = \bar{\alpha} \sigma(X), \quad \sigma[X, Y] = [\sigma X, \sigma Y]$$

для $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Таким образом, σ не является автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$, но является автоморфизмом вещественной алгебры $\mathfrak{g}^R$. С другой стороны, пусть σ — отображение алгебры $\mathfrak{g}$ на себя, обладающее указанными выше свойствами. Тогда множество $\mathfrak{g}_0$ неподвижных точек отображения σ есть вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$ и σ есть сопряжение алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{g}_0$. В самом деле, $J\mathfrak{g}_0$ есть собственное подпространство преобразования σ , отвечающее собственному значению -1 , и, значит, $\mathfrak{g}^R = \mathfrak{g}_0 + J\mathfrak{g}_0$. Если B — форма Киллинга на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, то из леммы 6.1 легко следует, что $B(\sigma X, \sigma Y)$ есть сопряженное к $B(X, Y)$ комплексное число. Сделаем в этой связи еще одно полезное замечание. Пусть $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — две вещественные формы алгебры $\mathfrak{g}$ и σ_1 и σ_2 — соответствующие сопряжения. Тогда $\mathfrak{g}_2$ инвариантна относительно σ_1 тогда и только тогда, когда σ_1 и σ_2 перестановочны. В этом случае мы имеем прямые разложения

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_1 \cap (i\mathfrak{g}_2),$$

$$\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_2 \cap (i\mathfrak{g}_1).$$

Лемма 6.2. *Предположим, что $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_0$ — вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$ и σ — сопряжение алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{g}_0$. Обозначим через ad присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}^R$ и через $\text{Int}(\mathfrak{g}^R)$ — присоединенную группу алгебры $\mathfrak{g}^R$. Если обозначить через G_0 аналитическую подгруппу в группе $\text{Int}(\mathfrak{g}^R)$, алгеброй Ли которой является $\text{ad}(\mathfrak{g}_0)$, то G_0 есть замкнутая подгруппа в $\text{Int}(\mathfrak{g}^R)$ и аналитически изоморфна группе $\text{Int}(\mathfrak{g}_0)$.*

Доказательство. Каждый автоморфизм s алгебры $\mathfrak{g}^R$ порождает автоморфизм $\tilde{s}$ группы $\text{Int}(\mathfrak{g}^R)$, удовлетворяющий условию $\tilde{s}(e^{\text{ad } X}) = e^{\text{ad}(s \cdot X)} (X \in \mathfrak{g}^R)^1$. В частности, существует такой автоморфизм $\tilde{\sigma}$ группы $\text{Int}(\mathfrak{g}^R)$, что $(d\tilde{\sigma})_e(\text{ad } X) = \text{ad}(\sigma \cdot X)$

¹⁾ Автоморфизм $\tilde{s}$ имеет вид $\tilde{s}(A) = sAs^{-1} (A \in \text{Int}(\mathfrak{g}^R))$. — Прим. перев.

для $X \in \mathfrak{g}^R$. Поскольку ad является изоморфизмом, отсюда следует, что $\text{ad}(\mathfrak{g}_0)$ есть множество неподвижных точек преобразования $(\tilde{d}\tilde{\sigma})_e$. Значит, G_0 есть компонента единицы в множестве неподвижных точек автоморфизма $\tilde{\sigma}$. Обозначим через ad_0 присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}_0$ и для каждого эндоморфизма A пространства $\mathfrak{g}^R$, оставляющего $\mathfrak{g}_0$ инвариантной, обозначим через A_0 его ограничение на $\mathfrak{g}_0$. Тогда для $X \in \mathfrak{g}_0$ имеем $(\text{ad } X)_0 = \text{ad}_0 X$ и отображение $A \rightarrow A_0$ отображает G_0 на $\text{Int}(\mathfrak{g}_0)$. Это отображение является изоморфизмом группы G_0 на $\text{Int}(\mathfrak{g}_0)$. Действительно, пусть $A \in G_0$ — такой элемент, что A_0 — тождественное отображение. Из того, что A перестановочен с комплексной структурой J , следует, что A — тождественное отображение. Наконец, этот изоморфизм является аналитическим изоморфизмом, так как он регулярен в единице.

Следующая теорема является чрезвычайно важной в теории полупростых алгебр Ли и симметрических пространств.

Теорема 6.3. *Каждая полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$ обладает вещественной формой, которая является компактной.*

Доказательство. Как всегда, обозначим через B форму Киллинга на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$ и Δ — соответствующее множество ненулевых корней. Для каждого $\alpha \in \Delta$ выберем элемент $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, обладающий свойствами, сформулированными в теореме 5.5. Из первого соотношения $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ следует, в силу формулы (3) из § 4, что $B(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$. Значит,

$$\begin{aligned} B(X_\alpha - X_{-\alpha}, X_\alpha - X_{-\alpha}) &= -2, \\ B(i(X_\alpha + X_{-\alpha}), i(X_\alpha + X_{-\alpha})) &= -2, \\ B(X_\alpha - X_{-\alpha}, i(X_\alpha + X_{-\alpha})) &= 0, \\ B(iH_\alpha, iH_\alpha) &= -\alpha(H_\alpha) < 0, \end{aligned}$$

причем последнее соотношение вытекает из теоремы 4.4. Так как $B(X_\alpha, X_\beta) = 0$, если $\alpha + \beta \neq 0$, то отсюда следует, что форма B отрицательно определена на $\mathbb{R}$ -линейном подпространстве

$$\mathfrak{g}_k = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}(iH_\alpha) + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha}) + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}(i(X_\alpha + X_{-\alpha})). \quad (2)$$

Более того, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_k + i\mathfrak{g}_k$ (прямая сумма векторных пространств). Используя теперь (в первый раз) соотношение $N_{\alpha, \beta} = -N_{-\alpha, -\beta}$ (из которого, в силу леммы 5.2, следует, что каждое $N_{\alpha, \beta}$ вещественно), видим, что для $X, Y \in \mathfrak{g}_k$ имеем включение $[X, Y] \in \mathfrak{g}_k$. Итак, $\mathfrak{g}_k$ — вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$. Форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}_k$, будучи ограничением формы B на $\mathfrak{g}_k \times \mathfrak{g}_k$, является отрицательно определенной. Значит, $\mathfrak{g}_k$ компактна, и теорема доказана.

§ 7. Разложения Картана

Теорема 7.1. Пусть $\mathfrak{g}_0$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbf{R}$, $\mathfrak{g}$ — ее комплексная оболочка и ι — компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$. Обозначим через σ и τ сопряжения алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{g}_0$ и ι соответственно. Тогда существует такой автоморфизм φ алгебры $\mathfrak{g}$, что компактная вещественная форма $\varphi \cdot \iota$ инвариантна относительно σ .

Доказательство. Эрмитова форма B_τ на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, заданная формулой

$$B_\tau(X, Y) = -B(X, \tau Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{g}),$$

положительно определена, так как ι компактна. Линейное преобразование $N = \sigma\tau$ есть автоморфизм комплексной алгебры $\mathfrak{g}$ и поэтому оставляет форму Киллинга инвариантной. Используя равенства $\sigma^2 = \tau^2 = I$, получаем

$$B(NX, \tau Y) = B(X, N^{-1}\tau Y) = B(X, \tau NY)$$

или

$$B_\tau(NX, Y) = B_\tau(X, NY).$$

Это значит, что преобразование N является самосопряженным по отношению к B_τ . Пусть $X_1, \dots, X_n$ — базис алгебры $\mathfrak{g}$, в котором N представляется диагональной матрицей. Тогда эндоморфизм $P = N^2$ представляется диагональной матрицей с положительными диагональными элементами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Для каждого $t \in \mathbf{R}$ обозначим через P^t линейное преобразование алгебры $\mathfrak{g}$, представляемое диагональной матрицей с диагональными элементами $(\lambda_i)^t > 0$. Тогда каждое P^t перестановочно с N . Обозначим через C_{ij}^k константы, определенные равенствами

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k X_k$$

для $1 \leq i, j \leq n$. Поскольку P — автоморфизм,

$$\lambda_i \lambda_j C_{ij}^k = \lambda_k C_{ij}^k \quad (1 \leq i, j, k \leq n).$$

Из этого равенства следует, что

$$(\lambda_i)^t (\lambda_j)^t C_{ij}^k = (\lambda_k)^t C_{ij}^k \quad (t \in \mathbf{R}),$$

откуда видно, что каждое P^t является автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим теперь отображение $\tau_1 = P^t \tau P^{-t}$ алгебры $\mathfrak{g}$ в себя. Подпространство $P^t \iota$ есть компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$, а τ_1 — сопряжение алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к этой

форме. Далее, $\tau N \tau^{-1} = N^{-1}$, откуда $\tau P \tau^{-1} = P^{-1}$. При помощи простого вычисления с матрицами из соотношения $\tau P = P^{-1} \tau$ выводится, что $\tau P^t = P^{-t} \tau$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\sigma \tau_1 &= \sigma P^t \tau P^{-t} = \sigma \tau P^{-2t} = N P^{-2t}, \\ \tau_1 \sigma &= (\sigma \tau_1)^{-1} = P^{2t} N^{-1} P^{2t}.\end{aligned}$$

Если $t = \frac{1}{4}$, то $\sigma \tau_1 = \tau_1 \sigma$. Таким образом, автоморфизм $\varphi = P^{1/4}$ обладает желаемыми свойствами.

З а м е ч а н и е. Доказательство показывает, что автоморфизм φ можно выбрать в виде $P^{1/4}$, где P^t ($t \in \mathbf{R}$) — однопараметрическая группа полупростых положительно определенных (относительно формы B_τ) автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая условию $P^1 = (\sigma \tau)^2$.

О п р е д е л е н и е. Пусть $\mathfrak{g}_0$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbf{R}$, $\mathfrak{g}$ — ее комплексная оболочка, σ — сопряжение алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{g}_0$. Разложение $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ алгебры $\mathfrak{g}_0$ в прямую сумму подалгебры $\mathfrak{k}_0$ и векторного подпространства $\mathfrak{p}_0$ называется *разложением Картана*, если существует такая компактная вещественная форма $\mathfrak{g}_k$ алгебры $\mathfrak{g}$, что

$$\sigma \cdot \mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}_k, \quad \mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_k, \quad \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap (i\mathfrak{g}_k). \quad (1)$$

Из теорем 6.3 и 7.1 непосредственно следует, что каждая полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ над $\mathbf{R}$ допускает разложение Картана. Следующая теорема показывает, что любые два разложения Картана сопряжены при помощи внутреннего автоморфизма.

Т е о р е м а 7.2. Пусть $\mathfrak{g}_0$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbf{R}$. Предположим, что

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_2 + \mathfrak{p}_2$$

— два разложения Картана алгебры $\mathfrak{g}_0$. Тогда существует такой элемент $\psi \in \text{Int}(\mathfrak{g}_0)$, что

$$\psi \cdot \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_2, \quad \psi \cdot \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная оболочка алгебры $\mathfrak{g}_0$, σ — сопряжение алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{g}_0$. Тогда существуют такие компактные вещественные формы $\mathfrak{u}_1$ и $\mathfrak{u}_2$ алгебры $\mathfrak{g}$, что

$$\sigma \cdot \mathfrak{u}_j \subset \mathfrak{u}_j, \quad \mathfrak{k}_j = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}_j, \quad \mathfrak{p}_j = \mathfrak{g}_0 \cap (i\mathfrak{u}_j) \quad (j = 1, 2).$$

Обозначим через τ_1 и τ_2 сопряжения алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{u}_1$ и $\mathfrak{u}_2$ соответственно. Согласно теореме 7.1 и следующему за ней замечанию, существует такая однопараметрическая группа

P^t положительно определенных полупростых автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$, что $P^1 = (\tau_1 \tau_2)^2$ и что $P^{1/4} \cdot u_2$ есть компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$, инвариантная относительно τ_1 . Отсюда следует, что $P^{1/4} \cdot u_2$ является прямой суммой своих пересечений с u_1 и $i u_1$. Далее, B , форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$, положительно определена на подпространстве $i u_1$ и отрицательно определена на компактной форме $P^{1/4} u_2$. Следовательно, пересечение $P^{1/4} u_2 \cap i u_1$ равно $\{0\}$, откуда

$$u_1 = P^{1/4} \cdot u_2.$$

Поскольку $\sigma u_j \subset u_j$, мы имеем $\sigma \tau_j = \tau_j \sigma$ ($j = 1, 2$) и, значит, σ перестановочно с P^1 . Но P^t есть единственная положительно определенная t -я степень элемента P^1). Значит, σ перестановочно с каждым P^t , т. е. подалгебра $\mathfrak{g}_0$ инвариантна относительно P^t . Ограничения линейных преобразований P^t на $\mathfrak{g}_0$ составляют однопараметрическую подгруппу $\{\exp tX\}$ в $\text{Aut}(\mathfrak{g}_0)$. Согласно следствию 6.5 из гл. II, $\{\exp tX\} \subset \text{Int}(\mathfrak{g}_0)$. Отсюда следует теорема, если взять $\psi = \exp \frac{1}{4} X$.

Из доказательства вытекает

Следствие 7.3. Если u_1 и u_2 — любые компактные вещественные формы полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$, то существует такая однопараметрическая подгруппа ψ^t ($t \in \mathbb{R}$) автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$, что $\psi^1 u_1 = u_2$.

Предложение 7.4. Пусть $\mathfrak{g}_0$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{R}$, разложенная в прямую сумму $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$, где $\mathfrak{k}_0$ — подалгебра, а $\mathfrak{p}_0$ — векторное подпространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ есть разложение Картана алгебры $\mathfrak{g}_0$;

(ii) $B(T, T) < 0$ для $T \neq 0$ в $\mathfrak{k}_0$,

$B(X, X) > 0$ для $X \neq 0$ в $\mathfrak{p}_0$

и отображение

$$s_0: T + X \rightarrow T - X \quad (T \in \mathfrak{k}_0, X \in \mathfrak{p}_0)$$

является автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}_0$.

Если эти условия удовлетворяются, то $\mathfrak{k}_0$ есть максимальная компактно вложенная подалгебра в $\mathfrak{g}_0$.

Доказательство. (ii) $\Rightarrow$ (i). Обозначим через $\mathfrak{g}$ комплексную оболочку алгебры $\mathfrak{g}_0$ и через $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ — алгебру Ли $\mathfrak{g}$, рассматриваемую как алгебра Ли над $\mathbb{R}$. Поскольку s_0 — автоморфизм, то

1) То есть существует единственная однопараметрическая группа A_t эндоморфизмов пространства $\mathfrak{g}$, состоящая из положительно определенных полупростых эндоморфизмов, такая, что $A_1 = P^1$. — Прим. перев.

$B(\mathfrak{f}_0, \mathfrak{p}_0) = 0$, $[\mathfrak{f}_0, \mathfrak{p}_0] \subset \mathfrak{p}_0$ и $[\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_0] \subset \mathfrak{f}_0$. Отсюда следует, что подпространство $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{f}_0 + i\mathfrak{p}_0$ алгебры $\mathfrak{g}^R$ является подалгеброй и, более того, компактной вещественной формой алгебры $\mathfrak{g}$, удовлетворяющей соотношениям (1). С другой стороны, соотношения (1) показывают, что (i) $\Rightarrow$ (ii). Из леммы 6.2 мы знаем, что группы $\text{Int}(\mathfrak{g}_0)$ и $\text{Int}(\mathfrak{g}_k)$ можно рассматривать как замкнутые подгруппы в $\text{Int}(\mathfrak{g}^R)$. Но группа $\text{Int}(\mathfrak{g}_k)$ компактна, и тем же свойством обладает $\text{Int}(\mathfrak{g}_0) \cap \text{Int}(\mathfrak{g}_k)$. Эта последняя группа является подгруппой Ли в $\text{Int}(\mathfrak{g}_0)$ и имеет алгебру Ли $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_k = \mathfrak{f}_0$. Значит, $\mathfrak{f}_0$ компактно вложена в $\mathfrak{g}_0$. Если $\mathfrak{f}_0$ не максимальна, то пусть $\mathfrak{f}_1$ — компактно вложенная подалгебра в $\mathfrak{g}_0$, содержащая $\mathfrak{f}_0$ в качестве собственной подалгебры. Тогда в $\mathfrak{f}_1 \cap \mathfrak{p}_0$ существует элемент $X \neq 0$. Обозначим через η сопряжение алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{g}_k$. Тогда $\eta\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_0$ и билинейная форма B_η на $\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$, определенная формулой

$$B_\eta(Y, Z) = -B(Y, \eta Z) \quad (Y, Z \in \mathfrak{g}_0),$$

симметрична и положительно определена. Так как

$$B([X, Y], \eta Z) = -B(Y, [X, \eta Z]) = B(Y, [\eta X, \eta Z]),$$

то

$$B_\eta(\text{ad } X(Y), Z) = B_\eta(Y, \text{ad } X(Z)).$$

Таким образом, все собственные значения эндоморфизма $\text{ad } X$ вещественны, и не все они равны 0. Но тогда степени $e^n \text{ad } X$ не могут лежать в компактной группе матриц. Это противоречит тому, что $\mathfrak{f}_1$ — компактно вложенная подалгебра алгебры $\mathfrak{g}_0$.

Следствие 7.5. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, и пусть $\mathfrak{u}$ — компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathfrak{g}^R$ алгебру Ли $\mathfrak{g}$, рассматриваемую как вещественная алгебра Ли, и через J — комплексную структуру в $\mathfrak{g}^R$, соответствующую умножению на i в алгебре $\mathfrak{g}$. Тогда

$$\mathfrak{g}^R = \mathfrak{u} + J\mathfrak{u}$$

есть разложение Картана алгебры $\mathfrak{g}^R$.

Действительно, обозначим через B^R , B и B^C формы Киллинга на $\mathfrak{g}^R$, $\mathfrak{g}$ и $(\mathfrak{g}^R)^C$. Тогда, в силу леммы 6.1, $B^C = B^R = 2\text{Re } B$ на $\mathfrak{g}^R \times \mathfrak{g}^R$. Поскольку B отрицательно определена на $\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}$ и положительно определена на $J\mathfrak{u} \times J\mathfrak{u}$, тем же свойством обладает форма B^C . Теперь следствие вытекает из предложения 7.4.

УПРАЖНЕНИЯ

А. Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли

1. Разрешимая алгебра Ли не содержит полупростых подалгебр, отличных от $\{0\}$.

2. Пусть $t(n)$ — подалгебра всех верхних треугольных матриц порядка n в $gl(n, \mathbf{R})$, а $n(n)$ — подалгебра матриц из $t(n)$, имеющих нулевые диагональные элементы. Доказать, что

(i) $t(n)$ разрешима, $n(n)$ нильпотентна и совпадает с производной алгеброй алгебры $t(n)$;

(ii) центры обеих алгебр Ли $t(n)$ и $n(n)$ имеют размерность 1;

(iii) обозначим через B форму Киллинга алгебры $t(n)$.

Тогда $B(t(n), n(n)) = 0$.

3*. Алгебра Ли разрешима тогда и только тогда, когда ее производная алгебра нильпотентна (Э. Картан [1], стр. 47, Бурбаки [3], § 5).

4. Обозначим через G группу всех отображений $T_{a,b}: x \rightarrow ax + b$ ($x \in \mathbf{R}$), где a и b — вещественные числа, $a > 0$. Введем на G аналитическую структуру, определенную условием, чтобы отображение $(a, b) \rightarrow T_{a,b}$ было аналитическим диффеоморфизмом. Показать, что G — разрешимая алгебра Ли и что ее алгебра Ли есть единственная некоммутативная алгебра Ли над $\mathbf{R}$ размерности 2 (с точностью до изоморфизма).

5. Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли над $\mathbf{C}$, и пусть $\mathfrak{a}$ — минимальный собственный идеал в $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{a}$ имеет размерность 1. Сформулировать и доказать аналогичный результат для разрешимых алгебр Ли над $\mathbf{R}$.

В. Полупростые алгебры Ли

1. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbf{C}$, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана. Обозначим через Δ множество ненулевых корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$. Пусть Γ — подмножество в Δ , удовлетворяющее условиям: если $\gamma \in \Gamma$, то $-\gamma \in \Gamma$; если $\gamma, \delta \in \Gamma$ и $\gamma + \delta \in \Delta$, то $\gamma + \delta \in \Gamma$. Пусть $\mathfrak{g}_\Gamma$ — наименьшая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, содержащая все корневые подпространства $\mathfrak{g}^\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$). Тогда $\mathfrak{g}_\Gamma$ полупроста и $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_\Gamma$ есть подалгебра Картана в $\mathfrak{g}_\Gamma$.

2. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbf{C}$ и $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана. Пусть Δ — система ненулевых корней, и положим $\mathfrak{h}^* = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbf{R}H_\alpha$. Система $\{H_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ инвариантна относительно отражений в гиперплоскостях $\alpha(H) = 0$ пространства $\mathfrak{h}^*$ (теорема 4.3 (i)).

3. Рассмотрим алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$, $\mathfrak{so}(n, \mathbf{C})$ и $\mathfrak{sh}(n, \mathbf{C})$ из гл. IX, § 4. Пусть E_{ij} — матрица $(\delta_{ai}\delta_{bj})_{1 \leq a, b \leq n}$. Показать, что (i) $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ имеет подалгебру Картана, состоящую из всех диагональных матриц со следом 0. Ее форма Киллинга равна

$$B(X, Y) = 2n \operatorname{Tr}(XY) \quad (X, Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})).$$

(ii) $\mathfrak{so}(n, \mathbf{C})$ имеет подалгебру Картана, натянутую на векторы

$E_{2i-1, 2i} - E_{2i, 2i-1} \left(1 \leq i \leq \left[\frac{n}{2} \right] \right)$. Ее форма Киллинга равна

$$B(X, Y) = (n-2) \operatorname{Tr}(XY) \quad (X, Y \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})).$$

(iii) $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ имеет подалгебру Картана, натянутую на векторы $E_{ii} - E_{n+i, n+i} \ (1 \leq i \leq n)$. Ее форма Киллинга равна

$$B(X, Y) = (2n+2) \operatorname{Tr}(XY) \quad (X, Y \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})).$$

4. Представление ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в конечномерном векторном пространстве V называется *полупростым*, если каждое подпространство в V , инвариантное относительно $\rho(\mathfrak{g})$, обладает дополнительным инвариантным подпространством.

(i) Любое конечномерное представление компактной алгебры Ли является полупростым.

(ii) (Унитарный прием Г. Вейля.) Используя компактную вещественную форму, доказать, что любое конечномерное представление полупростой алгебры Ли над $\mathbb{R}$ является полупростым.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ 2. Теорема Ли доказана в книге Ли [1], III, стр. 678. Название «разрешимая» («интегрируемая» в терминологии Ли) произошло из аналогичного понятия для конечных групп. В теории расширений Пикара — Вессю дифференциальных полей разрешимые группы Ли играют роль, аналогичную роли разрешимых конечных групп в теории Галуа (Колчин [1]). Относительно теоремы Энгеля см. Э. Картан [1], стр. 46.

§ 3—5. Разложение на корневые пространства использовалось в проведенной Э. Картаном классификации простых алгебр Ли над $\mathbb{C}$ [1]. Корни вводятся там как нули характеристического многочлена $\det(\lambda I - \operatorname{ad} X)$. В работах Г. Вейля [1, 2] была выдвинута на передний план подалгебра Картана и было введено много упрощений и новых методов. Среди последних — упорядочение корней, сила которого убедительно показана в доказательстве теоремы 5.4, принадлежащем Г. Вейлю. Используя классификацию Картана, Шевалле доказал в [5], теорема 1, усиленную форму теоремы 5.5. Шевалле показывает, что если заменить векторы $H_\alpha, X_\alpha \ (\alpha \in \Delta)$ пропорциональными векторами H'_α, X'_α , такими, что $\alpha(H'_\alpha) = 2$ и что соотношения коммутации по-прежнему удовлетворяются, то новые коэффициенты $N_{\alpha, \beta}$ имеют абсолютную величину 1 — p . Отсюда и из теоремы 4.3 (i) следует, что $\mathfrak{g}$ обладает таким базисом (Z_i) , что структурные константы c_{jk}^i , определяемые равенствами $[Z_j, Z_k] = \sum c_{jk}^i Z_i$, все являются целыми числами. Следовательно, $\mathfrak{g}$ позволяет определить алгебру Ли над любым полем любой характеристики.

§ 6. Вещественные формы всех простых алгебр Ли над $\mathbb{C}$ были классифицированы Э. Картаном [2], который при этом впервые доказал теорему 6.3. Доказательство в тексте, не зависящее от классификации, принадлежит Г. Вейлю [1], гл. III, теорема 6. По-видимому, не известно ни одного доказательства, которое не использовало бы подалгебру Картана (см. интересные указания, сделанные Э. Картаном в [12], стр. 23). Из такого доказательства существование подалгебр Картана вытекало бы в качестве следствия без использования теорем Ли и Энгеля.

§ 7. Теорема 7.1 доказана Э. Картаном [12], Мостов [1] упростил ее. Доказательство в тексте сделано по Самельсону. Теорема 7.2 также доказана в работе Э. Картана [12]. Доказательство в тексте проще, но, возможно, менее поучительно.

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В этой главе мы возвращаемся к римановой геометрии и начинаем изучение римановых локально симметрических пространств. Последние определяются как римановы многообразия, тензор кривизны которых инвариантен относительно всех параллельных переносов. Э. Картан поставил себе задачу дать полную классификацию таких пространств. Путем остроумных рассуждений он придал этой задаче две различные теоретико-групповые формулировки (см. Картан [6]). Одна из них является особенно эффективной и замечательным образом сводит задачу к классификации простых алгебр Ли над R . Последнюю задачу сам Картан решил еще в 1914 г.

Первый метод Картана был основан на так называемой *группе голономии*. Если o — точка в римановом многообразии M , то группа голономии многообразия M есть группа всех линейных преобразований касательного пространства M_o , получающихся из параллельных переносов вдоль замкнутых кривых, выходящих из точки o . Легко видеть, что различные точки многообразия M дают изоморфные группы голономии. Разумеется, риманова структура g_o инвариантна относительно каждого элемента группы голономии. Если M локально симметрично, то тензор кривизны R_o также инвариантен. Поэтому из структурных уравнений (6) и (7) § 8 гл. I следует, что каждый элемент группы голономии индуцирует изометрию некоторой окрестности точки o на себя, оставляющую точку o неподвижной. Это обстоятельство приводит к алгебраическим соотношениям между алгеброй Ли $\mathfrak{R}$ компоненты единицы группы голономии и тензорами g_o и R_o , а именно

$$\begin{aligned} g_o(AX, Y) + g_o(X, AY) &= 0 \quad (A \in \mathfrak{R}, X, Y \in M_o); \\ [A, R_o(X, Y)] &= R_o(AX, Y) + R_o(X, AY) \quad (A \in \mathfrak{R}, X, Y \in M_o); \\ R_o(X, Y) &\in \mathfrak{R} \quad (X, Y \in M_o). \end{aligned}$$

Эти равенства доказаны здесь в § 5. Затем Картан показал ([6], стр. 225), что если для заданной алгебры $\mathfrak{R}$ тензор R_o типа (1.3) удовлетворяет этим соотношениям и, кроме того, общим условиям симметрии для тензора кривизны (лемма 12.5 гл. I), то существует локально симметрическое пространство, для которого он является тензором кривизны в точке o . В нашем изложении это доказательство использовано в § 5 для построения глобально симметрического пространства из локально симметрического. Так как симметрическое пространство локально определяется тензорами R_o и g_o , то задача сводится к двум следующим задачам: 1. Классифицировать все возможные группы голономии симметрических пространств. 2. Определить (с точностью до постоянного множителя) тензор кривизны симметрического пространства при помощи группы голономии. Относительно второй задачи см. теорему 3.6 гл. IX и работу Картана [6], стр. 221—224. Для решения первой задачи Картан использовал свою более раннюю работу о конечномерных предста-

влениях алгебр Ли, но необходимые пространственные вычисления не были проведены в [6] во всех деталях, так как стал известен более простой метод.

Этот второй метод Картана [7] (которому мы будем следовать) более прямым способом приводит проблему классификации локально симметрических пространств в сферу теории групп. Он основан на том факте, что инвариантность тензора кривизны при параллелизме эквивалентна условию, чтобы геодезическая симметрия по отношению к каждой точке была локальной изометрией. (Этим объясняется термин «локально симметрическое».) Следствия из этого факта удобнее формулировать для римановых глобально симметрических пространств, у которых, по определению, геодезическая симметрия всегда продолжается до глобальной изометрии. Такие пространства обладают транзитивной группой изометрий и могут быть представлены как факторпространства G/K , где G — связная группа Ли с инволютивным автоморфизмом σ , множество неподвижных точек которого (в существенном) совпадает с K . Группа G становится полупростой, если отбросить прямой сомножитель, являющийся группой движений евклидова пространства. Таким образом, проблема сводится к изучению некоторых инволютивных автоморфизмов полупростых алгебр Ли.

В § 1 рассматриваются два определения локально симметрических пространств и доказывается их эквивалентность. В § 2 изучается группа изометрий риманова многообразия. В § 3 результаты применяются к римановым глобально симметрическим пространствам, которые затем представляются в виде факторпространств специального вида. В § 4 вычисляется тензор кривизны риманова глобально симметрического пространства. Результат используется в § 5 для построения риманова глобально симметрического пространства, кусок которого изометричен куску заданного локально симметрического пространства. В последнем параграфе показана связь, существующая между вполне геодезическими подпространствами симметрического пространства и тройными системами Ли в алгебре Ли группы изометрий.

§ 1. Аффинные локально симметрические пространства

Пусть M — многообразие класса C^∞ с аффинной связностью ∇ . Пусть p — точка в M , и пусть N_0 — нормальная окрестность начала координат 0 в M_p , симметричная относительно точки 0 . Как обычно, положим $N_p = \text{Exp}_p N_0$. Для каждой точки $q \in N_p$ рассмотрим геодезическую $t \rightarrow \gamma(t)$ в N_p , проходящую через p и q и такую, что $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. Положим $q' = \gamma(-1)$. Отображение $q \rightarrow q'$ окрестности N_p на себя называется *геодезической симметрией* относительно точки p и будет обозначаться через s_p . В нормальных координатах $\{x_1, \dots, x_m\}$ в точке p отображение s_p имеет выражение $(x_1, \dots, x_m) \rightarrow (-x_1, \dots, -x_m)$. В частности, s_p есть диффеоморфизм окрестности N_p на себя и $(ds_p)_p = -I$, где I — тождественное отображение.

О п р е д е л е н и е. Пусть M — многообразие с аффинной связностью ∇ , имеющее тензор кручения T и тензор кривизны R . Многообразие M называется *аффинным локально симметрическим*, если каждая точка $m \in M$ обладает открытой окрестностью N_m , на которой геодезическая симметрия s_m является аффинным преобразованием.

Теорема 1.1. *Многообразие M является аффинным локально симметрическим тогда и только тогда, когда $T=0$ и $\nabla_Z R=0$ для всех $Z \in \mathfrak{D}^1(M)$.*

Доказательство. Пусть сначала M — любое многообразие с аффинной связностью ∇ , и пусть φ — диффеоморфизм многообразия M на себя. Определим на M связность ∇' формулой

$$\nabla'_X(Y) = (\nabla_{X\varphi}(Y^\varphi))^{\varphi^{-1}} \text{ для } X, Y \in \mathfrak{D}^1(M). \quad (1)$$

Если обозначить через φ отображение $X \rightarrow X^\varphi$ ($X \in \mathfrak{D}^1$), то $\nabla'_X = \varphi^{-1} \circ \nabla_{\varphi X} \circ \varphi$ на $\mathfrak{D}^1$. Обозначим через T' и R' соответствующие тензоры кручения и кривизны. Тривиальным образом проверяются равенства

$$T'(X, Y) = \varphi^{-1}(T(\varphi X, \varphi Y)), \quad (2)$$

$$R'(X, Y) = \varphi^{-1} \circ R(\varphi X, \varphi Y) \circ \varphi \quad (3)$$

для $X, Y \in \mathfrak{D}^1$. Докажем теперь соотношение

$$(\nabla'_Z R')(X, Y) = \varphi^{-1} \circ ((\nabla_{\varphi Z} R)(\varphi X, \varphi Y)) \circ \varphi \quad (4)$$

для $X, Y, Z \in \mathfrak{D}^1$. Из соотношения (7) гл. 1, § 7, имеем

$$[\nabla_Z, R(X, Y)] = \nabla_Z(R(X, Y)). \quad (5)$$

Применим теперь ∇_Z к тензорному полю $X \otimes Y \otimes R$. Используя формулу (5) и тот факт, что ∇_Z перестановочно со свертываниями, получим

$$(\nabla_Z R)(X, Y) = [\nabla_Z, R(X, Y)] - R(\nabla_Z X, Y) - R(X, \nabla_Z Y).$$

Если объединить это с аналогичной формулой для $(\nabla'_Z R')(X, Y)$, то легко получится соотношение (4).

Пусть m — произвольная точка в M , и пусть N_m — нормальная окрестность точки m , инвариантная относительно s_m . Предположим сначала, что M является аффинным локально симметрическим многообразием. Пусть $Z \in \mathfrak{D}^1(M)$, и пусть γ — геодезическая в N_m , проходящая через m , с касательным вектором Z_m в точке m . Пусть p и q — две точки на γ , симметричные относительно точки m . Обозначим через τ и τ_m параллельный перенос (вдоль γ) из точки p в q и m соответственно. Рассмотрим вектор $L \in M_p$. Векторы L и $\tau_m L$ параллельны относительно геодезической (m, p) . Поскольку s_m — аффинное преобразование, векторы $ds_m L$ и $ds_m \tau_m L$ параллельны относительно геодезической (m, q) . Так как $ds_m \tau_m L = -\tau_m L$, то

$$ds_m(L) = -\tau L. \quad (6)$$

Используя формулы (2) и (3) для $s_m = \varphi$, $R' = R$, $T' = T$, получаем (§ 7 гл. I), что

$$\tau R_p = R_q, \quad \tau T_p = -T_q. \quad (7)$$

Пользуясь определением тензора $(\nabla_Z R)_m$ (§ 7 гл. I), выводим из (7), что $(\nabla_Z R)_m = 0$. Далее, если положить $p = q = m$, то из (7) следует, что $T_m = 0$.

Докажем теперь обратное утверждение. Диффеоморфизм s_m окрестности N_m определяет по формуле (1) новую связность на N_m . Так как T и $\nabla_Z R$ равны 0, то из (2) и (4) получаем, что $T' = 0$ и $\nabla'_Z R' = 0$. Наконец, из равенства $(ds_m)_m = -I$ выводим, что $R'_m = R_m$. Поэтому теорема вытекает из следующей леммы.

Лемма 1.2. Пусть M и M' — два многообразия с аффинными связностями ∇ и ∇' . Предположим, что

$$\nabla_Z T = 0, \quad \nabla_Z R = 0 \quad \text{для всех } Z \in \mathfrak{D}^1(M),$$

$$\nabla'_{Z'} T' = 0, \quad \nabla'_{Z'} R' = 0 \quad \text{для всех } Z' \in \mathfrak{D}^1(M').$$

Пусть $p \in M$, $p' \in M'$, и пусть A — линейное взаимно однозначное отображение пространства M_p на $M'_{p'}$. Обозначим через $\tilde{A}$ единственный сохраняющий тип изоморфизм смешанной тензорной алгебры $\mathfrak{D}(p)$ на $\mathfrak{D}(p')$, продолжающий A и совпадающий на двойственном пространстве $(M_p)^\wedge$ с отображением $({}^t A)^{-1}$. Допустим теперь, что $\tilde{A} \cdot R_p = R'_{p'}$, $\tilde{A} \cdot T_p = T'_{p'}$. Тогда существуют такая открытая окрестность U_p точки p в M и такое аффинное преобразование φ окрестности U_p на открытую окрестность $U_{p'}$ точки p' в M' , что $\varphi(p) = p'$ и $d\varphi_p = A$.

Доказательство. Пусть N_0 и N'_0 — нормальные окрестности начала координат в пространствах M_p и $M'_{p'}$ соответственно. Положим $N_p = \text{Exp } N_0$, $N'_{p'} = \text{Exp } N'_0$. Пусть $Y_1, \dots, Y_m$ — базис пространства M_p , и пусть T_{jk}^i и R_{ljk}^i — коэффициенты в выражениях тензоров T и R через адаптированный базис векторных полей $Y_1^*, \dots, Y_m^*$. Эти коэффициенты, в силу предположения, постоянны в N_p . Выразим теперь T' и R' через базис векторных полей на $N'_{p'}$, адаптированный к базису $AY_1, \dots, AY_m$ пространства $M'_{p'}$. Тогда коэффициенты T_{jk}^i и R_{ljk}^i суть те же константы, что T_{jk}^i и R_{ljk}^i .

Пусть V (соответственно V') — множество точек $(t, a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, для которых $ta_1 Y_1 + \dots + ta_m Y_m \in N_0$ ($ta_1 (AY_1) + \dots + ta_m (AY_m) \in N'_0$). Дифференциальные уравнения (6) и (7) из гл. I, § 8, совершенно одинаковы для обеих связностей ∇ и ∇' . Для связности ∇ они имеют место в V , а для ∇' — в V' . Так как эти уравнения линейны, то единственность их решений имеет место в целом. Следовательно, решения этих двух систем уравнений совпадают на $V \cap V'$. Положим

$$U_p = \{\text{Exp}_p(t(a_1 Y_1 + \dots + a_m Y_m)) \mid (t, a_1, \dots, a_m) \in V \cap V'\};$$

$$U_{p'} = \{\text{Exp}_{p'}(t(a_1 AY_1 + \dots + a_m AY_m)) \mid (t, a_1, \dots, a_m) \in V \cap V'\}.$$

Тогда U_p и $U_{p'}$ — нормальные окрестности точек $p \in M$ и $p' \in M'$ соответственно. Если $q \in U_p$ и $q' \in U_{p'}$ имеют одинаковые нормальные координаты по отношению к базам (Y_i) и (AY_i) соответственно, то отображение $\varphi: q \rightarrow q'$ есть аффинное преобразование окрестности U_p на $U_{p'}$, такое, что $\varphi(p) = p'$ и $d\varphi_p = A$.

Определение. Риманово многообразие M называется *римановым локально симметрическим пространством*, если для каждой точки $p \in M$ существует нормальная окрестность точки p , на которой геодезическая симметрия относительно p является изометрией.

Теорема 1.3. Пусть M — риманово многообразие. Тогда M есть риманово локально симметрическое пространство тогда и только тогда, когда кривизна в двумерном направлении инвариантна при всех параллельных переносах.

Если M локально симметрично, то риманова структура g и тензор кривизны R инвариантны при всех параллельных переносах. Инвариантность кривизны в двумерном направлении следует из теоремы 12.2 гл. I. С другой стороны, предположим, что кривизна в двумерном направлении инвариантна при всех параллельных переносах. Пусть $p, q \in M$, γ — отрезок кривой, соединяющий p и q , и τ — параллельный перенос из p в q вдоль γ . Если $X, Y \in M_p$, то

$$\begin{aligned} g_p(R_p(X, Y)X, Y) &= g_q(R_q(\tau X, \tau Y)\tau X, \tau Y), \\ g_p(R_p(X, Y)X, Y) &= g_q(\tau(R_p(X, Y)X), \tau Y). \end{aligned}$$

Рассмотрим 4-линейную форму B , заданную равенством

$$B(X, Y, Z, T) = g_q(R_q(\tau X, \tau Y)\tau Z, \tau T) - g_q(\tau(R_p(X, Y)Z), \tau T)$$

для $X, Y, Z, T \in M_p$. Она удовлетворяет условиям леммы 12.4 гл. I. Следовательно, $B \equiv 0$, так что

$$\tau(R_p(X, Y)Z) = R_q(\tau X, \tau Y)\tau Z, \quad \text{т. е. } \tau \cdot R_p = R_q.$$

Отсюда видно, что $\nabla_U R = 0$ для каждого $U \in \mathfrak{D}^1$. Так как геодезическая симметрия s_m индуцирует изометрию пространства M_m , то теорема следует теперь из теоремы 1.1 и следующей леммы.

Лемма 1.4. Пусть φ — аффинное преобразование псевдориманова многообразия M . Предположим, что для некоторой точки $q \in M$ отображение $d\varphi_q: M_q \rightarrow M_{\varphi(q)}$ является изометрией. Тогда φ — изометрия многообразия M на себя.

Доказательство. Пусть $p \in M$ и $X, Y \in M_p$. Соединим p с q кривой γ и обозначим через τ параллельный перенос из p в q вдоль γ . Тогда

$$g_p(X, Y) = g_q(\tau X, \tau Y) = g_{\varphi(q)}(d\varphi_q \tau X, d\varphi_q \tau Y).$$

Последнее выражение равно $g_{\varphi(p)}(d\varphi_p X, d\varphi_p Y)$, так как φ , будучи аффинным преобразованием, отображает векторы, параллельные вдоль γ , в векторы, параллельные вдоль $\varphi \cdot \gamma$. Тем самым лемма доказана.

§ 2. Группы изометрий

Пусть M — риманово многообразие и $I(M)$ — множество всех изометрий многообразия M . Пусть $g_1, g_2 \in I(M)$. Композиция отображений $g_1 \circ g_2$ снова является изометрией. Если положить $g_1 g_2 = g_1 \circ g_2$, то $I(M)$ станет группой. Мы будем всегда рассматривать $I(M)$ с компактно-открытой топологией. Последняя определяется следующим образом. Пусть C и U — соответственно компактное и открытое подмножества в M , и пусть

$$W(C, U) = \{g \in I(M) \mid g \cdot C \subset U\}.$$

Компактно-открытая топология в $I(M)$ определяется как самая слабая топология в $I(M)$, для которой все множества $W(C, U)$ открыты. Очевидно, что $I(M)$ — хаусдорфово пространство. Компонента единицы в $I(M)$ будет обозначаться через $I_0(M)$.

Лемма 2.1. *Пространство $I(M)$ имеет счетную базу.*

Доказательство. Так как M — сепарабельное метрическое пространство (гл. I, § 9), то существует счетная база $O_1, \dots, O_i, \dots$ для открытых подмножеств в M . Поскольку M локально компактно, можно предположить, что замыкание $\bar{O}_i$ компактно для каждого i . Пусть $C \subset M$ — компакт, $U \subset M$ — открытое множество и f — элемент из $W(C, U)$. Для каждого $p \in C$ существуют такой индекс i и такой индекс j , что $p \in O_i$, $f(O_i) \subset \subset O_j \subset U$. Можно найти такие покрытия $O_{i_1}, \dots, O_{i_N}$ множества C и $O_{j_1}, \dots, O_{j_N}$ множества $f(C)$, что

$$f(\bar{O}_{i_k}) \subset O_{j_k} \subset U \quad (1 \leq k \leq N).$$

Отсюда следует, что

$$f \in \bigcap_{k=1}^N W(\bar{O}_{i_k}, O_{j_k}) \subset W(C, U).$$

Значит, множество Ω всех конечных пересечений множеств вида $W(\bar{O}_i, O_j)$ образует базу открытых множеств в пространстве $I(M)$. Поскольку Ω счетно, отсюда следует лемма.

Теорема 2.2. *Пусть M — риманово многообразие и (f_n) — последовательность в $I(M)$. Предположим, что существует такая точка $o \in M$, что последовательность $(f_n \cdot o)$ сходится. Тогда существуют элемент $f \in I(M)$ и подпоследовательность (f_{n_v}) последовательности (f_n) , сходящаяся к f в компактно-открытой топологии.*

Сначала мы докажем лемму.

Лемма 2.3. *Предположим, что последовательность (f_n) в $I(M)$ точечно сходится¹⁾ на множестве $A \subset M$. Тогда (f_n) также точечно сходится на $\bar{A}$ (замыкании множества A).*

Доказательство. Пусть $p \in \bar{A}$. Выберем такое $r > 0$, чтобы открытый шар $B_r(p)$ имел компактное замыкание. Пусть задано такое ε , что $0 < \varepsilon < r$. Выберем сначала такую точку $p_1 \in A$, что $d(p, p_1) < \frac{\varepsilon}{3}$, а затем такое целое N , что

$$d(f_n \cdot p_1, f_m \cdot p_1) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для } n, m \geq N.$$

Тогда

$$d(f_n \cdot p, f_m \cdot p) \leq d(f_n \cdot p, f_n \cdot p_1) + d(f_n \cdot p_1, f_m \cdot p_1) + d(f_m \cdot p_1, f_m \cdot p) < \varepsilon \quad (1)$$

для $m, n \geq N$. Значит, все $f_n \cdot p$ ($n \geq N$) лежат внутри шара $B_\varepsilon(f_N \cdot p)$, который, как и $B_r(p)$, имеет компактное замыкание. Поэтому можно выбрать подпоследовательность последовательности $(f_n \cdot p)$, сходящуюся к некоторому пределу p^* . Из (1) видно, что

$$d(f_n \cdot p, p^*) \leq \varepsilon$$

для $n \geq N$, и лемма доказана.

Для доказательства теоремы 2.2 обозначим через S множество точек $q \in M$, для которых последовательность $(f_n \cdot q)$ имеет компактное замыкание. Если (p_i) — последовательность в S и (f_n^*) — подпоследовательность последовательности (f_n) , то можно, используя диагональный процесс, найти подпоследовательность в (f_n^*) , сходящуюся в каждой точке p_i . В силу леммы 2.3, S замкнуто. Докажем теперь, что S открыто. Так как $0 \in S$ и M связно, то отсюда будет следовать, что $S = M$.

Пусть $p^* \in S$. Выберем такое $r > 0$, что шар $B_r(p^*)$ имеет компактное замыкание. Пусть $p \in B_{r/4}(p^*)$, и пусть $(f_n^* \cdot p)$ — некоторая подпоследовательность последовательности $(f_n \cdot p)$. Существует такая подпоследовательность (f_{n_μ}) в (f_n^*) , что последовательность $(f_{n_\mu} \cdot p^*)$ сходится к пределу q^* и что вся последовательность $(f_{n_\mu} \cdot p^*)$ содержится в шаре $B_{r/4}(q^*)$. Тогда подпоследовательность $(f_{n_\mu} \cdot p)$ содержится в шаре $B_{r/2}(q^*)$, который имеет компактное замыкание, так как содержится в каждом из шаров $f_{n_\mu} \cdot B_r(p^*)$. Значит, $(f_n^* \cdot p)$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Итак, доказано, что $S = M$.

¹⁾ То есть для каждого $x \in A$ последовательность $f_n \cdot x$ сходится в M . — Прим. перев.

Многообразие M содержит плотную в нем последовательность точек. Используя диагональный процесс, можно найти подпоследовательность (φ_v) в (f_n) , которая сходится во всех этих точках и, по лемме 2.3, на всем M . Для завершения доказательства теоремы докажем следующую лемму.

Лемма 2.4. Пусть (φ_v) — последовательность в $I(M)$, точечно сходящаяся на M к отображению $f: M \rightarrow M$. Тогда $f \in I(M)$ и $\lim \varphi_v = f$ в компактно-открытой топологии.

Доказательство. Пусть C — компактное подмножество в M и $\varepsilon > 0$. Выберем такие точки $p_1, \dots, p_n$, что каждая точка $p \in C$ отстоит от некоторой p_i меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{3}$. Можно выбрать такое целое N , что

$$d(\varphi_v \cdot p_i, f \cdot p_i) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ для } 1 \leq i \leq n, v > N.$$

Если $p \in C$, то выберем такое p_j , чтобы $d(p, p_j) < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда, поскольку f сохраняет расстояния, имеем для $v > N$

$$d(\varphi_v \cdot p, f \cdot p) \leq d(\varphi_v \cdot p, \varphi_v \cdot p_j) + d(\varphi_v \cdot p_j, f \cdot p_j) + d(f \cdot p_j, f \cdot p) < \varepsilon.$$

Докажем, наконец, что $f \cdot M = M$. Пусть $q \in f \cdot M$. Определим $q' \in M$ равенством $f(q') = q$. Тогда

$$0 = \lim d(q, \varphi_v \cdot q') = \lim d(\varphi_v^{-1} \cdot q, q').$$

Таким образом, последовательность $\varphi_v^{-1} \cdot q$ сходится к q' . Из доказанного мы знаем, что существует такая подпоследовательность (ψ_μ) в (φ_v) , что $(\psi_\mu^{-1} \cdot p)$ сходится для каждой точки $p \in M$. Пусть $p' = \lim (\psi_\mu^{-1} \cdot p)$. Тогда

$$\lim d(\psi_\mu \cdot p', p) = \lim d(p', \psi_\mu^{-1} \cdot p) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$p = \lim \psi_\mu \cdot p' = f \cdot p'.$$

Поскольку точка $p \in M$ произвольна, заключаем отсюда, что $f \cdot M = M$. Из теоремы 11.1 гл. I известно, что f — диффеоморфизм. Итак, лемма доказана.

Теорема 2.5.

(а) Пусть M — риманово многообразие. Компактно-открытая топология в $I(M)$ превращает $I(M)$ в локально компактную топологическую группу преобразований многообразия M .

(б) Пусть $p \in M$, и пусть $\tilde{K}$ — подгруппа в $I(M)$, оставляющая точку p неподвижной. Тогда группа K компактна.

Доказательство. Пусть (f_n) — последовательность в $I(M)$, сходящаяся к элементу $f \in I(M)$. Тогда для каждой точки $p \in M$

$$d(f_n^{-1} \cdot p, f^{-1} \cdot p) = d(p, f_n f^{-1} \cdot p) = d(f \cdot (f^{-1} \cdot p), f_n \cdot (f^{-1} \cdot p)),$$

что сходится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Из леммы 2.4 следует, что $\lim f_n^{-1} = f^{-1}$ в компактно-открытой топологии. Значит, переход к обратному элементу $f \rightarrow f^{-1}$ непрерывен в $I(M)$. Непрерывность умножения доказывается аналогичным образом. Значит, $I(M)$ — топологическая группа. Пусть теперь $\lim f_n = f$ ($f_n \in I(M)$) и $\lim p_n = p$ ($p_n \in M$). Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем такое целое N , что $d(p_n, p) < \varepsilon$ для $n \geq N$. Последовательность $p_N, p_{N+1}, \dots$ вместе с p образует компактное множество C . Если $U = B_\varepsilon(f \cdot p)$, то $f \in W(C, U)$. Пусть N_1 — такое целое число, что $f_n \in W(C, U)$ для $n \geq N_1$. Тогда $d(f_n \cdot p_n, f \cdot p) < \varepsilon$ для $n \geq N_1 N$, так что $I(M)$ — топологическая группа преобразований многообразия M . Покажем, что $I(M)$ локально компактна, а $\tilde{K}$ компактна. Пусть U — открытая относительно компактная окрестность точки p . Тогда $\tilde{K}$ — замкнутое подмножество в $W(\{p\}, U)$, а, в силу теоремы 2.2, $W(\{p\}, U)$ имеет компактное замыкание. На этом доказательство закончено.

§ 3. Римановы глобально симметрические пространства

Пусть M — риманово многообразие с римановой структурой Q . Напомним, что M называется *аналитическим римановым многообразием*, если M и Q аналитичны. Отображение называется *инволютивным*, если его квадрат, но не само отображение, есть тождественное отображение.

Определение. Пусть M — аналитическое¹⁾ риманово многообразие. Многообразие M называется *римановым глобально симметрическим*, если каждая точка $p \in M$ является изолированной неподвижной точкой некоторой инволютивной изометрии s_p многообразия M .

Замечание. Из следующей леммы и леммы 11.2 гл. I очевидно, что существует только одна такая изометрия s_p .

Лемма 3.1. Пусть M — риманово глобально симметрическое пространство. Для каждой точки $p \in M$ существует такая нормальная окрестность N_p точки p , что s_p есть геодезическая симметрия в N_p .

Пусть $A = (ds_p)_p$. Тогда $AM_p \subset M_p$ и $A^2 = I$. Из равенства

$$X = \frac{1}{2} (X - AX) + \frac{1}{2} (X + AX)$$

¹⁾ Предположение аналитичности является удобным. Как показывает предложение 5.5, никакой потери общности при этом не происходит.

видно, что $M_p = V^- + V^+$ (прямая сумма), где $V^\pm = \{X \mid AX = \pm X\}$. Предположим, что $X \neq 0$ принадлежит к V^+ , и рассмотрим геодезическую γ , касающуюся вектора X . Тогда s_p будет оставлять на месте каждую точку геодезической γ . Это противоречит предположению, что p — изолированная неподвижная точка. Итак, $A = -I$, и лемма доказана.

Пусть M — риманово глобально симметрическое пространство. Пусть γ — некоторая геодезическая в M . Если $p \in \gamma$, то кривая $s_p \cdot \gamma$ представляет собой продолжение геодезической γ . Поэтому каждая максимальная геодезическая на M имеет бесконечную длину. Таким образом, M полно и любые две точки $p, q \in M$ можно соединить геодезической длины $d(p, q)$. Если m — средняя точка этой геодезической, то s_m меняет местами p и q . В частности, группа $I(M)$ транзитивно действует на M . Согласно теоремам из § 2, $I(M)$ имеет счетную базу в компактно-открытой топологии и является транзитивной локально компактной топологической группой преобразований многообразия M . Пусть $\tilde{K}$ — подгруппа группы $I(M)$, оставляющая на месте некоторую точку p_0 многообразия M . Тогда $\tilde{K}$ компактна и, в силу теоремы 3.2 гл. II, отображение $g\tilde{K} \rightarrow g \cdot p_0$ ($g \in I(M)$) есть гомеоморфизм пространства $I(M)/\tilde{K}$ на M .

Лемма 3.2. Пусть M — риманово глобально симметрическое пространство. Тогда $I(M)$ обладает аналитической структурой, совместимой с компактно-открытой топологией, причем с этой структурой она является группой Ли преобразований многообразия M .

Замечание. Сформулированные свойства группы $I(M)$ однозначно характеризуют ее аналитическую структуру. Действительно, топологическая группа имеет самое большее одну аналитическую структуру, совместимую с ее топологией, по отношению к которой она является группой Ли (теорема 2.6 гл. II).

Доказательство. Пользуясь введенными выше обозначениями, рассмотрим отображение $\sigma: k \rightarrow (dk)_{p_0}$ группы $\tilde{K}$ в ортогональную группу $O(M_{p_0})$. Пусть $X_1, \dots, X_m$ — ортонормированный базис пространства M_{p_0} , $\{x_1, \dots, x_m\}$ — система нормальных координат относительно этого базиса, действующая в выпуклом нормальном шаре $B_r(p_0)$. Выражение отображения k в координатах $(x_1, \dots, x_m)$ совпадает с выражением отображения $(dk)_{p_0}$ в декартовых координатах на M_{p_0} . Значит, σ непрерывно. Согласно лемме 11.2 гл. I, отображение σ взаимно однозначно, т. е. является гомеоморфизмом. Линейная группа изотропии $K^* = \sigma(\tilde{K})$ есть компактная подгруппа в $O(M_{p_0})$ и поэтому обладает единственной дифференцируемой структурой, совместимой с индуци-

рованной группой $O(M_{p_0})$ топологией, в которой она является подгруппой Ли в $O(M_{p_0})$. Если перенести эту дифференцируемую структуру при помощи σ^{-1} , то $\tilde{K}$ станет компактной группой Ли.

Пусть π — естественное отображение $g \rightarrow g \cdot p_0$ группы $I(M)$ на M . Мы построим сейчас подмножество B в $I(M)$ (некоторое локальное сечение), которое π гомеоморфно отображает на $B_r(p_0)$. Пусть $t \rightarrow p_t$ — геодезическая в $B_r(p_0)$, выходящая из точки p_0 . Для простоты положим $s_{p_t} = s_t$. Отображение $T_t = s_{t/2}s_0$ является изометрией многообразия M и переводит p_0 в p_t . Из соотношения (6) § 1 ясно, что $(dT_t)_{p_0}$ есть параллельный перенос из точки p_0 в p_t вдоль геодезической. Рассмотрим теперь отображение $\psi: B_r(p_0) \rightarrow I(M)$, заданное формулой $\psi(p_t) = T_t$. Отображение ψ , разумеется, взаимно однозначно. Чтобы доказать, что ψ непрерывно, достаточно доказать, что если последовательность $(q_n) \subset M$ сходится к $q \in M$, то соответствующие симметрии s_{q_n} сходятся к s_q в $I(M)$. Если точка p достаточно близка к q , то очевидно, что $(s_{q_n} \cdot p)$ сходится к $s_q \cdot p$. Так как изометрия определяется своим действием на любом открытом множестве, то достаточно, в силу леммы 2.4, доказать, что последовательность $(s_{q_n} \cdot p)$ сходится для каждой точки $p \in M$. Обозначим через S множество точек $p \in M$, для которых последовательность $(s_{q_n} \cdot p)$ сходится. Множество S открыто (лемма 10.1 гл. I) и непусто. Оно также замкнуто (лемма 2.3), так что $S = M$, и непрерывность отображения ψ установлена.

Пусть $B = \psi(B_r(p_0))$. Отображение π является взаимно однозначным на B и $\pi \circ \psi = I$. Значит, π — гомеоморфизм множества B на $B_r(p_0)$. Множество $B\tilde{K} = \{bk \mid b \in B, k \in \tilde{K}\}$ совпадает с полным прообразом $\pi^{-1}(B_r(p_0))$ и поэтому открыто в $I(M)$. Пусть $g \in B\tilde{K}$. Тогда $g = bk$ ($b \in B, k \in \tilde{K}$). Мы имеем $b = \psi(\pi(g))$, так что отображение $(b, k) \rightarrow bk$ есть гомеоморфизм пространства $B \times \tilde{K}$ на $B\tilde{K}$. Поэтому если U — открытое подмножество в $\tilde{K}$, то множество BU открыто в $B\tilde{K}$ и, значит, открыто в $I(M)$. В частности, пусть U — открытая окрестность точки e в $\tilde{K}$, в которой действует система координат $\{y_1, \dots, y_r\}$. Отображение

$$\varphi_e: bu \rightarrow (x_1(\pi(b)), \dots, x_m(\pi(b)), y_1(u), \dots, y_r(u))$$

является гомеоморфизмом множества BU на открытое подмножество в $\mathbf{R}^{m+r}$. Для каждого $x \in I(M)$ отображение $\varphi_x = \varphi_e \circ L_{x^{-1}}$ есть гомеоморфизм множества xBU на открытое подмножество в $\mathbf{R}^{m+r}$. Для доказательства того, что эти гомеоморфизмы дают аналитическую структуру на $I(M)$, достаточно проверить, что отображение $\varphi_x \circ \varphi_e^{-1}$ аналитично на $\varphi_e(BU \cap xBU)$. Этот факт, а также то, что $I(M)$ — группа Ли, будет доказан, если доказать следующее утверждение.

Если $b_1, b_2 \in B$, $u_1, u_2 \in U$ таковы, что

$$b_1 u_1 b_2 u_2 = b u,$$

где $b \in B$, $u \in U$, то координаты $y_\alpha(u)$, $x_i(\pi(b))$ суть аналитические функции от координат $x_j(\pi(b_1))$, $x_k(\pi(b_2))$, $y_\beta(u_1)$, $y_\gamma(u_2)$ ($1 \leq i, j, k \leq m$, $1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq r$).

Пусть $k \in \tilde{K}$. Тогда изометрии ks_0k^{-1} и s_0 оставляют точку p_0 неподвижной и индуцируют одно и то же отображение пространства M_{p_0} . В силу леммы 11.2 гл. I, имеем $ks_0k^{-1} = s_0$. В частности, если q — средняя точка геодезической, соединяющей p_0 с $b_2 \cdot p_0$, то

$$u_1 b_2 u_1^{-1} = u_1 s_q s_0 u_1^{-1} = u_1 s_q u_1^{-1} s_0 = s_q * s_0,$$

где $q^* = u_1 \cdot q$. Значит, $u_1 b_2 u_1^{-1}$ есть элемент b^* множества B , и координаты элемента b^* аналитически зависят от координат элементов u_1 и b_2 . Мы имеем

$$b_1 b^* u_1 u_2 = b u$$

и

$$x_i(\pi(b_1 b^*)) = x_i(\pi(b)) \quad (1 \leq i \leq m).$$

Точка $b_1 b^* \cdot p_0$ определяется по точкам $b_1 \cdot p_0$ и $b^* \cdot p_0$ следующим образом. Пусть γ_1 и γ^* — геодезические в $B_r(p_0)$, соединяющие точку p_0 с $b_1 \cdot p_0$ и $b^* \cdot p_0$ соответственно. Обозначим через Y_1 и Y^* их единичные касательные векторы в точке p_0 . Пусть Y_3 — вектор, полученный из Y^* параллельным переносом вдоль γ_1 . Рассмотрим геодезическую γ_3 , выходящую из $b_1 \cdot p_0$ с касательным вектором Y_3 и имеющую длину $L(\gamma^*)$. Конец геодезической γ_3 есть $b_1 b^* \cdot p_0$. Эта конструкция показывает аналитическую зависимость координат $x_i(\pi(b_1 b^*))$ от $x_j(\pi(b_1))$ и $x_k(\pi(b^*))$ ($1 \leq i, j, k \leq m$). Далее, координаты касательного вектора $d(u(u_1 u_2)^{-1}) \cdot X_i = d(b^{-1} b_1 b^*) \cdot X_i$ в базисе $X_1, \dots, X_m$ аналитически зависят от координат точек b_1, b^* . Поэтому из того, что $\tilde{K}$ — группа Ли, следует, что координаты элемента u аналитически зависят от координат элементов u_1, u_2, b_1, b^* . Отсюда видно, что $I(M)$ — группа Ли. Изложенное выше рассуждение показывает также, что отображение $(g, p) \rightarrow g \cdot p$ есть аналитическое отображение многообразия $B U \times B_r(p_0)$ в M . Значит, $I(M)$ — группа Ли преобразований многообразия M .

Теорема 3.3.

(i) Пусть M — риманово глобально симметрическое пространство и p_0 — некоторая точка в M . Если $G = I_0(M)$ и K — подгруппа группы G , оставляющая точку p_0 неподвижной, то K есть компактная подгруппа связной группы G и отображение $gK \rightarrow g \cdot p_0$ ($g \in G$) является диффеоморфизмом многообразия G/K на M .

(ii) Отображение $\sigma: g \rightarrow s_{p_0} g s_{p_0}$ является инволютивным автоморфизмом группы G , причем K содержится в замкнутой подгруппе K_σ всех неподвижных точек автоморфизма σ и содержит компоненту единицы группы K_σ . Группа K не содержит нормальных делителей группы G , отличных от $\{e\}$.

(iii) Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{k}$ алгебры Ли групп G и K соответственно. Тогда $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid (d\sigma)_e X = X\}$. Если $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid (d\sigma)_e X = -X\}$, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ (прямая сумма). Обозначим через π естественное отображение $g \rightarrow g \cdot p_0$ группы G на M . Тогда $(d\pi)_e$ отображает $\mathfrak{k}$ в $\{0\}$ и изоморфно отображает $\mathfrak{p}$ на M_{p_0} . Если $X \in \mathfrak{p}$, то геодезическая, выходящая из точки p_0 с касательным вектором $(d\pi)_e X$, задается формулой

$$\gamma_{d\pi \cdot X}(t) = \exp tX \cdot p_0 \quad (d\pi = (d\pi)_e).$$

Далее, если $Y \in M_{p_0}$, то $(d \exp tX)_{p_0}(Y)$ есть результат параллельного переноса вектора Y вдоль этой геодезической.

Доказательство. Первая часть (i) следует из предложения 4.3 гл. II. Для доказательства утверждений (ii) и (iii) положим $s_0 = s_{p_0}$. Очевидно, что σ — инволютивный автоморфизм группы $I(M)$ и, следовательно, отображает компоненту единицы G на себя. Если $k \in K$, то отображения k и $s_0 k s_0$ суть изометрии, индуцирующие одно и то же отображение пространства M_{p_0} . Согласно лемме 11.2 гл. I, $s_0 k s_0 = k$ для всех $k \in K$. Отсюда следует, что автоморфизм $(d\sigma)_e$ алгебры $\mathfrak{g}$ тождествен на $\mathfrak{k}$. С другой стороны, если $X \in \mathfrak{g}$ остается неподвижным при автоморфизме $(d\sigma)_e$, то $s_0 \exp tX s_0 = \exp tX$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что $\exp tX \cdot p_0$ есть неподвижная точка преобразования s_0 . Так как p_0 есть изолированная неподвижная точка преобразования s_0 , то имеем $\exp tX \cdot p_0 = p_0$ для всех t , так что $X \in \mathfrak{k}$. Поскольку $I(M)$ и G эффективно действуют на G/K , подгруппа K не содержит нормальных делителей группы G , отличных от $\{e\}$. Тем самым доказано (ii).

Прямое разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ получается из тождества $X = \frac{1}{2}(X + d\sigma \cdot X) + \frac{1}{2}(X - d\sigma \cdot X)$. В доказательстве предложения 4.3 гл. II показано, что $(d\pi)_e$ есть линейное отображение алгебры $\mathfrak{g}$ на M_{p_0} с ядром $\mathfrak{k}$.

Наконец, пусть $X \in \mathfrak{p}$. Положим $p_t = \gamma_{d\pi \cdot X}(t)$ и обозначим, как и раньше, $s_t = s_{p_t}$, $T_t = s_{t/2} s_0$. Мы уже видели, что $(dT_t)_{p_0}$ есть параллельный перенос вдоль геодезической из точки p_0 в p_t . Далее, $s_\tau s_0 s_t = s_{\tau+t}$, так как обе части этого равенства являются изометриями, оставляющими точку $p_{\tau+t}$ неподвижной и индуцирующими одно и то же отображение в касательном пространстве $M_{p_{\tau+t}}$. Отсюда следует, что $T_{2\tau+2t} = T_{2\tau} T_{2t}$ для всех $\tau, t \in \mathbb{R}$. Если t достаточно мало, то изометрия T_t лежит в локальном сечении

B , использованном в доказательстве леммы 3.2. Но π — аналитический диффеоморфизм многообразия B на нормальную окрестность $B_r(p_0)$ и $\pi T_t = p_t$. Поскольку отображение $t \rightarrow p_t$ аналитично, отсюда следует, что $t \rightarrow T_t$ есть однопараметрическая подгруппа. Значит, $T_t = \exp tZ$, где $Z \in \mathfrak{g}$, $t \in \mathbb{R}$. Далее, $\sigma T_t = s_0 s_{t/2} = s_{-t/2} s_0 = T_{-t}$. Таким образом, $d\sigma Z = -Z$, так что $Z \in \mathfrak{p}$. Но $\pi T_t = p_t$, и поэтому $d\pi Z = d\pi X$. Следовательно, $X = Z$, и теорема доказана.

Определение. Пусть G — связная группа Ли и H — замкнутая подгруппа. Пара (G, H) называется *симметрической парой*, если существует такой инволютивный аналитический автоморфизм σ группы G , что $(H_\sigma)_0 \subset H \subset H_\sigma$, где H_σ — множество неподвижных точек автоморфизма σ и $(H_\sigma)_0$ — компонента единицы в H_σ .

Если, кроме того, группа¹⁾ $\text{Ad}_G(H)$ компактна, то пара (G, H) называется *римановой симметрической парой*.

Как обычно, мы рассматриваем G как группу Ли преобразований факторпространства G/H , причем имеется в виду, что каждый элемент $g \in G$ порождает диффеоморфизм $\tau(g): xH \rightarrow gxH$ многообразия G/H на себя.

Предложение 3.4. Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара. Обозначим через π естественное отображение группы G на G/K и положим $o = \pi(e)$. Пусть σ — некоторый аналитический инволютивный автоморфизм группы G , такой, что $(K_\sigma)_0 \subset K \subset K_\sigma$. Для каждой G -инвариантной римановой структуры Q на G/K (такая структура Q существует) многообразие G/K является римановым глобально симметрическим пространством. Геодезическая симметрия s_o удовлетворяет соотношениям

$$s_o \circ \pi = \pi \circ \sigma,$$

$$\tau(\sigma(g)) = s_o \tau(g) s_o \quad (g \in G).$$

В частности, s_o не зависит от выбора структуры Q .

Замечание 1. Мы увидим позже, что риманова связность на многообразии G/K не зависит от выбора структуры Q .

Доказательство. Пусть σ — произвольный аналитический инволютивный автоморфизм группы G , такой, что $(K_\sigma)_0 \subset K \subset K_\sigma$. Для простоты мы будем писать $d\sigma$ и $d\pi$ вместо $(d\sigma)_e$ и $(d\pi)_e$. Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{k}$ алгебры Ли групп G и K соответственно и положим $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma X = -X\}$. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ (прямая сумма). Если $X \in \mathfrak{p}$ и $k \in K$, то $\sigma(\exp \text{Ad}(k) tX) = k \exp(-tX) k^{-1}$, откуда

¹⁾ Здесь под $\text{Ad}_G(H)$ подразумевается подгруппа Ли группы $\text{Ad}_G(G)$, являющаяся образом подгруппы H при гомоморфизме Ad_G . Как в предложении 5.4 гл. II, мы видим, что если группа $\text{Ad}_G(H)$ компактна, то она компактна в обычной матричной топологии.

$d\sigma \text{Ad}(k)X = -\text{Ad}(k)X$. Таким образом, $\mathfrak{p}$ инвариантно относительно группы $\text{Ad}_G(K)$. Отображение $d\pi$ отображает $\mathfrak{g}$ на T_o , касательное пространство к многообразию G/K в точке o , и ядром отображения $d\pi$ является $\mathfrak{k}$. Получающийся в результате изоморфизм пространства $\mathfrak{p}$ на T_o перестановочен с действием группы K , т. е.

$$d\pi \cdot \text{Ad}(k)X = d\tau(k) \cdot d\pi(X) \quad (k \in K, X \in \mathfrak{p}). \quad (1)$$

Действительно, эта формула непосредственно следует из соотношения

$$\pi(\exp \text{Ad}(k)tX) = \pi(k \exp tX k^{-1}) = \tau(k) \pi(\exp tX).$$

Так как $\text{Ad}_G(K)$ — компактная группа в относительной топологии группы $GL(\mathfrak{g})$, то на $\mathfrak{p}$ существует положительно определенная квадратичная форма B , инвариантная относительно $\text{Ad}_G(K)$ ¹⁾. Тогда форма $Q_o = B \circ (d\pi)^{-1}$ на T_o инвариантна относительно всех преобразований $d\tau(k)$ ($k \in K$). Обозначим также через Q_o соответствующую симметрическую билинейную форму на $T_o \times T_o$. Для каждой точки $p \in G/K$ определим билинейную форму Q_p на $(G/K)_p \times (G/K)_p$ формулой

$$Q_p(d\tau(g)X_o, d\tau(g)Y_o) = Q_o(X_o, Y_o) \quad (X_o, Y_o \in T_o),$$

где элемент $g \in G$ выбран так, чтобы $g \cdot o = p$. Инвариантность формы B относительно $\text{Ad}_G(K)$ гарантирует корректность определения формы Q_p . Из того, что каждый $\tau(g)$ ($g \in G$) есть аналитический диффеоморфизм многообразия G/K , следует, что $p \rightarrow Q_p$ является аналитической римановой структурой на G/K , инвариантной относительно группы G . С другой стороны, каждая G -инвариантная риманова структура на G/K получается таким способом из некоторой инвариантной квадратичной формы на $\mathfrak{p}$.

Определим теперь отображение s_o многообразия G/K на себя условием $s_o \circ \pi = \pi \circ \sigma$. Тогда s_o есть инволютивный диффеоморфизм многообразия G/K на себя и $(ds_o)_o = -I$. Для доказательства того, что s_o — изометрия, положим $g \in G$, $p = \tau(g) \cdot o$ и $X, Y \in (G/K)_p$. Тогда векторы $X_o = d\tau(g^{-1})X$, $Y_o = d\tau(g^{-1})Y$ принадлежат пространству T_o . Из формулы $s_o \circ \pi = \pi \circ \sigma$ следует, что для каждого $x \in G$ имеем

$$s_o \circ \tau(g)(xK) = \sigma(gx)K = \sigma(g)\sigma(x)K = (\tau(\sigma(g)) \circ s_o)(xK),$$

так что $s_o \circ \tau(g) = \tau(\sigma(g)) \circ s_o$. Отсюда

$$\begin{aligned} Q(ds_o X, ds_o Y) &= Q(ds_o d\tau(g)X_o, ds_o d\tau(g)Y_o) = \\ &= Q(ds_o X_o, ds_o Y_o) = Q(X_o, Y_o) = Q(X, Y). \end{aligned}$$

¹⁾ См. примечание на стр. 142. — Прим. перев.

Итак, отображение s_o является изометрией и в окрестности точки o должно совпадать с геодезической симметрией. Для произвольной точки $p = \tau(g) \cdot o$ в G/K геодезическая симметрия дается формулой

$$s_p = \tau(g) \circ s_o \circ \tau(g^{-1}).$$

Так как это отображение есть изометрия, то пространство G/K является римановым глобально симметрическим пространством. Доказательство закончено.

Формула $s_o \circ \pi = \pi \circ \sigma$ показывает, что геодезическая симметрия на G/K является одной и той же для всех G -инвариантных метрик.

Выведем теперь некоторые дальнейшие свойства римановой симметрической пары (G, K) . Обозначим через Z центр группы G и через N — множество элементов $n \in G$, для которых $\tau(n)$ является тождественным отображением многообразия G/K . Тогда Z и N — замкнутые нормальные делители в G и $N \subset K$. В силу леммы 5.1 гл. II, группа $K/K \cap Z$ и линейная группа $\text{Ad}_G(K)$ аналитически изоморфны. Значит, $K/K \cap Z$ компактна и, поскольку $K \cap Z \subset N$, группа K/N компактна. Обозначим через $I(G/K)$ группу всех изометрий многообразия G/K (с римановой структурой Q) и через $\tilde{K}$ — подгруппу в $I(G/K)$, оставляющую точку o на месте. Тогда, согласно лемме 3.2 и теореме 2.5, $I(G/K)$ и $\tilde{K}$ являются группами Ли, $\tilde{K}$ компактна.

Рассмотрим теперь (алгебраический) изоморфизм $\beta: gN \rightarrow \tau(g)$ группы G/N в $I(G/K)$. Если последовательность $(g_n N)$ сходится к gN в G/N , то $(g_n x N)$ сходится к gxN для каждого $x \in G$ и поэтому $(g_n x K)$ сходится к gxK в G/K . В силу леммы 2.4, отсюда следует непрерывность отображения β . Ограничение отображения β на K/N является гомеоморфизмом.

Замечание 2. Группа $\beta(G/N)$ есть замкнутая [подгруппа в $I(G/K)$].

Действительно, пусть $K_1 = \beta(K/N)$ и $G_1 = \beta(G/N)$. Тогда K_1 — компактная топологическая подгруппа в $\tilde{K}$. Если перенести на G_1 аналитическую структуру группы G/N при помощи β , то G_1 будет группой Ли преобразований многообразия G/K . Пусть (g_n) — последовательность в G_1 , сходящаяся в $I(G/K)$ к элементу $g \in I(G/K)$. Последовательность $(g_n \cdot o)$ сходится к точке $p = g \cdot o$ в G/K . Выберем такой элемент $g^* \in G_1$, чтобы $g^* \cdot o = p$. Тогда существует локальное сечение в группе G_1 , проходящее через g^* , т. е. такое подмногообразие B^* в G_1 , содержащее g^* , что естественное отображение $x \rightarrow x \cdot o$ группы G_1 на G/K есть диффеоморфизм многообразия B^* на открытую окрестность точки p в G/K . Если n достаточно велико, то существует такой элемент $k_n \in K_1$, что $g_n k_n \in B^*$. Ясно, что последовательность $(g_n k_n)$ в B^* сходится к g^* . Так как K_1 компактна, то можно предположить,

что последовательность (k_n) сходится в K_1 . Поскольку вложения $B^* \rightarrow G_1$ и $K_1 \rightarrow G_1$ непрерывны, последовательности $(g_n k_n)$ и (k_n) сходятся в G_1 . Отсюда следует, что (g_n) сходится в G_1 . Наконец, из непрерывности вложения $G_1 \subset I(G/K)$ следует, что $g \in G_1$, так что G_1 замкнута.

Из теоремы 2.3 гл. II следует, что G_1 обладает единственной аналитической структурой, с которой она является топологической подгруппой Ли G_2 группы $I(G/K)$. Тожественное отображение $G_1 \rightarrow G_2$ непрерывно и поэтому является гомеоморфизмом (следствие 3.3 гл. II) и, значит, аналитическим изоморфизмом (теорема 2.6 гл. II). Это означает, что β есть аналитический изоморфизм группы G/N на замкнутую топологическую подгруппу Ли группы $I(G/K)$.

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{g}}$ и $\tilde{\mathfrak{k}}$ алгебры Ли групп $I(G/K)$ и $\tilde{K}$ соответственно. Из теоремы 3.3 мы получаем такое подпространство $\tilde{\mathfrak{p}} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$, что $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{k}} + \tilde{\mathfrak{p}}$ (прямая сумма) и

$$\tilde{\pi}(\exp X) = \text{Exp } d\tilde{\pi}(X) \quad (X \in \tilde{\mathfrak{p}}), \quad (2)$$

где через $\tilde{\pi}$ обозначено естественное отображение $g \rightarrow g \cdot o$ группы $I(G/K)$ на G/K . Обозначим через $\tilde{\sigma}$ инволютивный автоморфизм $g \rightarrow s_o g s_o$ группы $I(G/K)$, а через π_1 — естественное отображение группы G на G/N . Тогда $\beta \circ \pi_1 = \tau$ и, в силу предложения 3.4,

$$\beta(\pi_1(\sigma(g))) = \tau(\sigma(g)) = \tilde{\sigma}(\tau(g)) \quad (g \in G),$$

так что

$$d\beta \circ d\pi_1 \circ d\sigma = d\tilde{\sigma} \circ d\tau.$$

Следовательно, отображение $d\beta \circ d\pi_1$ отображает $\mathfrak{p}$ на $\tilde{\mathfrak{p}}$. Так как $\tilde{\pi} \circ \beta \circ \pi_1 = \pi$, то из формулы (2) получаем для $X \in \mathfrak{p}$

$$\begin{aligned} \pi(\exp X) &= \tilde{\pi}(\beta(\pi_1(\exp X))) = \tilde{\pi}(\exp d\beta(d\pi_1(X))) = \\ &= \text{Exp}(d\tilde{\pi}(d\beta(d\pi_1(X)))), \end{aligned}$$

откуда

$$\pi(\exp X) = \text{Exp}(d\pi(X)) \quad (X \in \mathfrak{p}). \quad (3)$$

Итак, геодезические в G/K являются орбитами некоторых однопараметрических подгрупп группы G .

Покажем теперь, что при очень общих условиях автоморфизм σ полностью определяется своими неподвижными точками.

Предложение 3.5. Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара. Обозначим через $\mathfrak{k}$ алгебру Ли группы K и через $\mathfrak{z}$ алгебру Ли центра группы G . Допустим, что $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$. Тогда существует в точности один инволютивный аналитический автоморфизм σ группы G , такой, что $(K_\sigma)_0 \subset K \subset K_\sigma$.

Доказательство. Пусть σ_1, σ_2 — два автоморфизма с описанными свойствами. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G обладает прямыми разложениями $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}_i$, где $\mathfrak{p}_i$ — собственное подпространство, отвечающее собственному значению -1 автоморфизма $d\sigma_i$ ($i = 1, 2$). Из того, что форма Киллинга B алгебры $\mathfrak{g}$ инвариантна относительно σ_i , следует, что алгебра $\mathfrak{k}$ ортогональна к $\mathfrak{p}_i$ относительно B ($i = 1, 2$). Пусть $X_1 \in \mathfrak{p}_1$. Тогда существует такой элемент $X_2 \in \mathfrak{p}_2$, что $X_1 = T + X_2$, где $T \in \mathfrak{k}$. Очевидно, T ортогонален к $\mathfrak{k}$. Поскольку $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$, форма B отрицательно определена на $\mathfrak{k}$ (предложение 6.8 гл. II). Значит, $T = 0$ и $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$.

Для дальнейшего изучения симметрических пространств важнее уметь выражать условия симметричности в терминах алгебр Ли, чем в терминах групп. Из теоремы 3.3 видно, что риманово глобально симметрическое пространство порождает пару $(\mathfrak{g}, s)$, где

- (i) $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\mathbf{R}$;
- (ii) s — инволютивный автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$;
- (iii) $\mathfrak{k}$ — множество неподвижных точек автоморфизма s — есть компактно вложенная подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$;
- (iv) $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$, если обозначить через $\mathfrak{z}$ центр алгебры $\mathfrak{g}$.

Определение. Пара $(\mathfrak{g}, s)$, обладающая свойствами (i), (ii), (iii), называется *ортогональной симметрической алгеброй Ли*. Она называется *эффективной*, если, кроме того, имеет место (iv). Пара (G, K) , где G — связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и K — подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\mathfrak{k}$, называется *связанной с ортогональной симметрической алгеброй Ли* $(\mathfrak{g}, s)$.

Замечание 1. Если $\mathfrak{k}$ — компактно вложенная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с центром $\mathfrak{z}$ и $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$, то, в силу доказательства предложения 3.5, существует самое большее один инволютивный автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, множеством неподвижных точек которого является $\mathfrak{k}$.

Замечание 2. Имеется существенное различие между симметрической парой, определенной ранее (перед предложением 3.4), и парой, связанной с ортогональной симметрической алгеброй Ли.

Предложение 3.6. Пусть $(\mathfrak{g}, s)$ — ортогональная симметрическая алгебра Ли, а $\mathfrak{k}$ — множество неподвижных точек автоморфизма s . Пусть (G, K) и $(\tilde{G}, \tilde{K})$ — две пары, связанные с $(\mathfrak{g}, s)$. Предположим, что K и $\tilde{K}$ связны и что $\tilde{G}$ односвязна. Тогда $\tilde{K}$ замкнута и $(\tilde{G}, \tilde{K})$ — риманова симметрическая пара. Если K замкнута в G (это имеет место в случае, когда центр алгебры $\mathfrak{g}$ равен $\{0\}$), то G/K является римановым локально симметрическим пространством для каждой G -инвариантной метрики (такая метрика существует) и $\tilde{G}/\tilde{K}$ есть универсальное накрывающее многообразие для G/K .

Доказательство. Так как $\tilde{G}$ односвязна, то существует аналитический гомоморфизм $\sigma: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$, для которого $(d\sigma)_e = s$. Поскольку s — инволютивный автоморфизм, тем же свойством обладает σ . Группа $\tilde{K}$ есть компонента единицы в группе неподвижных точек автоморфизма σ . В частности, $\tilde{K}$ замкнута в $\tilde{G}$. Пространство $\tilde{G}/\tilde{K}$ односвязно. Действительно, пусть $\gamma(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) — непрерывная замкнутая кривая в $\tilde{G}/\tilde{K}$. Не уменьшая общности, можно предположить, что $\gamma(0) = \gamma(1) = \tilde{\pi}(e)$ (где $\tilde{\pi}$ — естественное отображение группы $\tilde{G}$ на $\tilde{G}/\tilde{K}$). Используя локальные сечения в $\tilde{G}$ (лемма 4.1 гл. II), легко найти в $\tilde{G}$ такую непрерывную кривую $\tilde{\gamma}(t)$ ($0 \leq t \leq 1$), что $\tilde{\pi}(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ для $0 \leq t \leq 1$ ¹). Тогда кривые $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ лежат в $\tilde{K}$ и, поскольку $\tilde{K}$ связна, их можно соединить непрерывной кривой. Полученная при этом замкнутая кривая в $\tilde{G}$ гомотопна в $\tilde{G}$ точке. Отсюда следует, что проекция $\gamma(t)$ также гомотопна точке в $\tilde{G}/\tilde{K}$.

Группы $\text{Ad}_G(K)$ и $\text{Ad}_{\tilde{G}}(\tilde{K})$ совпадают, так как обе они являются аналитическими подгруппами в $\text{Int}(\mathfrak{g})$ и имеют одну и ту же алгебру Ли. Они являются компактными (и поэтому несут на себе относительную топологию группы $GL(\mathfrak{g})$), поскольку $\mathfrak{k}$ компактно вложена в $\mathfrak{g}$. Пространство $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid s \cdot X = -X\}$ инвариантно относительно $\text{Ad}_G(K)$ и обладает положительно определенной квадратичной формой B , инвариантной относительно $\text{Ad}_G(K)$. Как и выше, эта форма порождает $\tilde{G}$ -инвариантную риманову структуру на $\tilde{G}/\tilde{K}$ и, если K замкнута, G -инвариантную риманову структуру на G/K . Пусть φ — такой гомоморфизм группы $\tilde{G}$ на G , что $(d\varphi)_e$ есть тождественное отображение алгебры $\mathfrak{g}$. Обозначим через $K^\natural$ полный прообраз $\varphi^{-1}(K)$. Тогда $\tilde{K}$ есть компонента единицы в $K^\natural$ и $\tilde{G}/\tilde{K}$ является накрывающим пространством (см. Шевалле [2], стр. 89) для $\tilde{G}/K^\natural$. Если обозначить через ψ отображение $g\tilde{K} \rightarrow \varphi(g)K$ многообразия $\tilde{G}/\tilde{K}$ на G/K , то пара $(\tilde{G}/\tilde{K}, \psi)$ является односвязным накрывающим многообразием для G/K (лемма 13.4 гл. I). Далее, ψ — локальная изометрия. Так как $\tilde{G}/\tilde{K}$ глобально симметрично, то G/K является локально симметрическим.

Обозначим через π естественное отображение группы G на G/K . Так как однопараметрические подгруппы в $\tilde{G}$ и G соответствуют друг другу при отображении φ , а геодезические в $\tilde{G}/\tilde{K}$ и G/K соответствуют друг другу при ψ , то из формулы (3) получаем

$$\pi(\exp X) = \text{Exp } d\pi X \quad \text{для } X \in \mathfrak{p}, \quad (4)$$

¹) См. Понтрягин [1], стр. 371. — Прим. перев.

где $\exp$ и Exp относятся к G и G/K соответственно. Соотношение (1) также имеет место и позволяет нам отождествлять пространства $\mathfrak{p}$ и $(G/K)_{\pi(e)}$ в случае, когда это удобно.

Наконец, обозначим через K^* полный прообраз $\text{Ad}_G^{-1}(\text{Ad}_G(K))$. Так как $\text{Ad}_G(K)$ замкнута в $\text{Int}(\mathfrak{g})$, то K^* замкнута в G . Если обозначить через $\mathfrak{k}^*$ алгебру Ли группы K^* , то $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}^*) = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$. Если $\mathfrak{g}$ имеет центр $\{0\}$, то отсюда следует, что $\mathfrak{k}^* = \mathfrak{k}$. Значит, K есть компонента единицы в K^* и поэтому замкнута.

§ 4. Экспоненциальное отображение и кривизна

В этом параграфе мы будем пользоваться следующими обозначениями. Пусть $(\mathfrak{g}, s)$ — ортогональная симметрическая алгебра Ли, $\mathfrak{k}$ — множество неподвижных точек автоморфизма s и $\mathfrak{p}$ — подпространство $\{X \in \mathfrak{g} \mid sX = -X\}$. Для $X \in \mathfrak{g}$ обозначим через T_X ограничение эндоморфизма $(\text{ad } X)^2$ на $\mathfrak{p}$. Тогда $T_X \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$. Предположим, что пара (G, K) связана с $(\mathfrak{g}, s)$ и что K связна и замкнута в G . Пусть π — естественное отображение группы G на G/K , и пусть $o = \pi(e)$. Для $g \in G$ обозначим через $\tau(g)$ отображение $xK \rightarrow gxK$ многообразия G/K на себя. Подпространство $\mathfrak{p}$ будет отождествляться с касательным пространством $(G/K)_o$ при помощи отображения $d\pi$. Пусть Q — некоторая G -инвариантная риманова структура на G/K . Тогда G/K полно и локально симметрично.

Мы опишем сейчас геометрические понятия экспоненциального отображения и кривизны для многообразия G/K в теоретико-групповых терминах.

Теорема 4.1. *Экспоненциальное отображение пространства $\mathfrak{p}$ в G/K не зависит от выбора структуры Q . Его дифференциал дается формулой*

$$d\text{Exp}_X = d\tau(\exp X)_o \circ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T_X)^n}{(2n+1)!} \quad (X \in \mathfrak{p}).$$

Здесь $\mathfrak{p}$ обычным образом рассматривается как многообразие, и касательное пространство к нему в каждой точке отождествляется с самим $\mathfrak{p}$.

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathfrak{p}$. Из формулы (4) § 3 следует, что $\pi(\exp X) = \text{Exp } X$. Поэтому из теоремы 1.7 гл. II получаем

$$\begin{aligned} d\text{Exp}_X(Y) &= d\pi \circ d\exp_X(Y) = d\pi \circ dL_{\exp X} \circ \frac{1 - e^{-\text{ad } X}}{\text{ad } X}(Y) = \\ &= d\tau(\exp X)_o \circ d\pi \circ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\text{ad } X)^m}{(m+1)!}(Y). \end{aligned}$$

Из соотношений $[\mathfrak{f}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{f}$ следует, что вектор $d\pi(\operatorname{ad} X)^m(Y)$ равен $T_X^n(Y)$, если $m = 2n$, и равен 0, если m нечетно. Тем самым теорема доказана.

Теорема 4.2. Обозначим через R тензор кривизны пространства G/K , соответствующий римановой структуре Q . Тогда в точке $o \in G/K$ имеем

$$R_o(X, Y)Z = -[[X, Y], Z] \text{ для } X, Y, Z \in \mathfrak{p}.$$

Доказательство. Вычислим сначала непосредственно кривизну в двумерном направлении, а затем применим результаты из § 12 гл. I для нахождения тензора кривизны.

Предполагая, что $\dim \mathfrak{p} > 1$, рассмотрим двумерное подпространство S в $\mathfrak{p}$. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_m$ — такой ортонормированный базис пространства $\mathfrak{p}$, что X_1 и X_2 лежат в S . Каждый $X \in S$ можно записать в виде $X = x_1 X_1 + x_2 X_2$, где $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Оператор Лапласа Δ на S имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Положим также

$$A_X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_X^n}{(2n+1)!}, \quad v_1 = A_X(X_1), \quad v_2 = A_X(X_2).$$

Если a и b — два вектора в евклидовом векторном пространстве, то обозначим через $a \vee b$ параллелограм, натянутый на a и b , и через $|a \vee b|$ — его площадь.

Пусть N_0 — нормальная окрестность точки 0 в касательном пространстве $\mathfrak{p}$. Подмногообразие $M_S = \operatorname{Exp}(S \cap N_0)$ в $M = G/K$ обладает римановой структурой, индуцированной структурой Q . Кривая в M_S имеет ту же длину независимо от того, рассматривается она как кривая в M_S или в M . Если $p \in M_S$, то единственная геодезическая в $\operatorname{Exp} N_0$, проходящая через 0 и p , является кратчайшей кривой в M_S , соединяющей точки 0 и p . Отсюда следует, что экспоненциальные отображения в точке 0 для многообразий M_S и M совпадают на $S \cap N_0$. Таким образом, если $X \in S \cap N_0$, то векторы $d\tau(\exp X) \cdot v_1$ и $d\tau(\exp X) \cdot v_2$ являются касательными векторами к M_S в точке $\operatorname{Exp} X$. Отношение элементов площади в M_S и $S \cap N_0$ дается поэтому формулой

$$f(X) = \frac{|d\tau(\exp X) v_1 \vee d\tau(\exp X) v_2|}{|X_1 \vee X_2|} = |v_1 \vee v_2|,$$

так как $\tau(\exp X)$ есть изометрия многообразия G/K . Согласно лемме 12.1 гл. I, кривизна многообразия M в направлении плоского сечения S равна

$$K(S) = -\frac{3}{2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) f \right] (0, 0).$$

Обозначим через (A_{ij}) матрицу, выражающую эндоморфизм A_X в базисе $X_1, \dots, X_m$ пространства $\mathfrak{p}$. Тогда $A_X X_j = \sum_i A_{ij} X_i$.

Имеем формулу

$$\begin{aligned} f(X) &= |(A_{11}X_1 + \dots + A_{m1}X_m) \vee (A_{12}X_1 + \dots + A_{m2}X_m)| = \\ &= \{(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})^2 + \sum_{1 < i < j \leq m} (A_{i1}A_{j2} - A_{j1}A_{i2})^2\}^{1/2}, \end{aligned}$$

так как $|A_{i1}A_{j2} - A_{j1}A_{i2}|$ есть площадь проекции параллелограмма $v_1 \vee v_2$ на плоскость, натянутую на X_i, X_j . При вычислении $[\Delta f](0)$ по этому выражению для функции $f(X)$ следует рассматривать только члены второго порядка по x_1 или x_2 . Если $i \neq j$, то A_{ij} содержит только члены второго порядка и выше. Значит,

$$[\Delta f](0) = [\Delta A_{11}A_{22}](0).$$

Матричные элементы T_{ij} эндоморфизма $T_X = (\text{ad}(x_1X_1 + x_2X_2))^2$ имеют второй порядок по x_1 и x_2 . Отсюда следует, что (мы пишем Q вместо Q_0)

$$\begin{aligned} [\Delta f](0) &= \frac{1}{3!} [\Delta(T_{11} + T_{22})](0) = \frac{1}{3!} [\Delta\{Q(T_X X_1, X_1) + \\ &+ Q(T_X X_2, X_2)\}](0) = \frac{1}{3} \{Q(T_{X_1} X_1, X_1) + Q(T_{X_2} X_1, X_1) + \\ &+ Q(T_{X_1} X_2, X_2) + Q(T_{X_2} X_2, X_2)\}. \end{aligned}$$

В этом выражении первый и последний члены равны 0. Два другие члена равны между собой, так как из соотношения инвариантности

$$Q_0(\text{Ad}(k)X, \text{Ad}(k)Y) = Q_0(X, Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{p})$$

следует, что

$$Q_0([Z, X], Y) + Q_0(X, [Z, Y]) = 0 \quad (X, Y \in \mathfrak{p}, Z \in \mathfrak{k}). \quad (1)$$

Итак, мы доказали равенство

$$K(S) = -Q_0(T_{X_1} X_2, X_2) = Q_0(\text{ad}([X_1, X_2]) \cdot X_1, X_2).$$

Для доказательства формулы для тензора R рассмотрим 4-линейную форму:

$$B(X, Y, Z, T) = Q_0((R(X, Y) + \text{ad}[X, Y]) \cdot Z, T) \quad (X, Y, Z, T \in \mathfrak{p}).$$

Из теоремы 12.2 гл. I известно, что

$$B(X_1, X_2, X_1, X_2) = 0, \quad (2)$$

если X_1, X_2 — ортонормальные векторы в $\mathfrak{p}$. Кроме того,

$$B(X, Y, Z, T) = -B(Y, X, Z, T), \quad (3)$$

$$B(X, Y, Z, T) = -B(X, Y, T, Z), \quad (4)$$

$$B(X, Y, Z, T) + B(Y, Z, X, T) + B(Z, X, Y, T) = 0. \quad (5)$$

Здесь мы использовали тождество Якоби и лемму 12.5 из гл. I. Если теперь X, Y — произвольные векторы в $\mathfrak{p}$, то существуют такие ортонормальные векторы X_1, X_2 в $\mathfrak{p}$, что

$$X = x_1 X_1 + x_2 X_2, \quad Y = y_1 X_1 + y_2 X_2 \quad (x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}).$$

Тогда, используя формулы (3) и (4), получим

$$B(X, Y, X, Y) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 B(X_1, X_2, X_1, X_2),$$

откуда

$$B(X, Y, X, Y) = 0 \quad \text{для } X, Y \in \mathfrak{p}.$$

Из леммы 12.4 гл. I можно заключить, что $B \equiv 0$. Тем самым доказана теорема 4.2.

Этот результат показывает, что тензор кривизны не зависит от G -инвариантной римановой структуры Q . В силу леммы 1.2, получаем также

Следствие 4.3. Риманова связность на многообразии G/K одинакова для всех G -инвариантных римановых структур Q на G/K .

§ 5. Локально и глобально симметрические пространства

Пусть M — риманово многообразие, p — точка в M . В общем случае невозможно найти окрестность N точки p , которую можно расширить до полного риманова многообразия $\tilde{M}$. Если, однако, M является локально симметрическим, то это оказывается возможным, причем $\tilde{M}$ можно взять глобально симметрическим. Мы установим также другую связь между локально и глобально симметрическими пространствами. А именно, универсальное накрывающее многообразие полного риманова локально симметрического пространства является глобально симметрическим.

Теорема 5.1. Пусть M — риманово локально симметрическое пространство и p — точка в M . Существуют риманово глобально симметрическое пространство $\tilde{M}$, открытая окрестность N_p точки p в M и изометрия φ окрестности N_p на открытую окрестность точки $\varphi(p)$ в $\tilde{M}$.

Изложенное ниже доказательство разбито на несколько лемм. Обозначим через Q риманову структуру на M и через R — тензор кривизны. Обозначим через $\mathfrak{p}$ касательное пространство M_p . Если A — эндоморфизм пространства $\mathfrak{p}$, то A можно единственным образом продолжить до дифференцирования смешанной тензорной алгебры $\mathfrak{D}(\mathfrak{p})$ над $\mathfrak{p}$, сохраняющего тип тензоров и перестановочного со свертываниями. Если обозначить это продолжение снова через A , то для $X \in M_p$, $\omega \in M_p^*$

$$A(\omega \otimes X) = A\omega \otimes X + \omega \otimes AX.$$

Свертывая и замечая, что A аннулирует скаляры, получаем

$$(A\omega)(X) = -\omega(AX).$$

Отсюда легко следует, что

$$(A \cdot Q_p)(X, Y) = -Q_p(AX, Y) - Q_p(X, AY), \quad (1)$$

$$(A \cdot R_p)(X, Y) = [A, R_p(X, Y)] - R_p(AX, Y) - R_p(X, AY) \quad (2)$$

для $X, Y \in \mathfrak{p}$. Здесь под коммутатором $[E, F]$ двух эндоморфизмов понимается эндоморфизм $EF - FE$.

Лемма 5.2. Обозначим через $\mathfrak{k}$ множество всех эндоморфизмов пространства $\mathfrak{p}$, которые, будучи продолжены вышеуказанным образом в смешанную тензорную алгебру $\mathfrak{D}(\mathfrak{p})$, аннулируют тензоры Q_p и R_p . Тогда $\mathfrak{k}$ является алгеброй Ли относительно операции коммутирования $[A, B] = AB - BA$. Далее, $R_p(X, Y) \in \mathfrak{k}$ для любых $X, Y \in \mathfrak{p}$.

Доказательство. В силу формул (1) и (2), $A \in \mathfrak{k}$ тогда и только тогда, когда

$$Q_p(AX, Y) + Q_p(X, AY) = 0, \quad (3)$$

$$[A, R_p(X, Y)] = R_p(AX, Y) + R_p(X, AY) \quad (4)$$

для всех $X, Y \in \mathfrak{p}$. Условие (3) можно выразить, сказав, что эндоморфизм A кососимметричен по отношению к форме Q_p . Предположим теперь, что $A, B \in \mathfrak{k}$. Тогда

$$\begin{aligned} & Q_p((AB - BA)X, Y) + Q_p(X, (AB - BA)Y) = \\ & = -Q_p(BX, AY) + Q_p(AX, BY) - Q_p(AX, BY) + Q_p(BX, AY) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$Q_p([A, B] \cdot X, Y) + Q_p(X, [A, B] \cdot Y) = 0.$$

Аналогично из формулы (4) и тождества Якоби получаем

$$\begin{aligned} [[A, B], R_p(X, Y)] &= -[[B, R_p(X, Y)], A] - [[R_p(X, Y), A], B] = \\ &= [A, R_p(BX, Y) + R_p(X, BY)] - [B, R_p(AX, Y) + R_p(X, AY)] = \\ &= R_p(ABX, Y) + R_p(BX, AY) + R_p(AX, BY) + R_p(X, ABY) - \\ &\quad - R_p(BAX, Y) - R_p(AX, BY) - R_p(BX, AY) - R_p(X, BAY), \end{aligned}$$

откуда

$$[[A, B], R_p(X, Y)] = R_p([A, B] \cdot X, Y) + R_p(X, [A, B] \cdot Y).$$

Если $X, Y \in \mathfrak{p}$, то эндоморфизм $R_p(X, Y)$ пространства $\mathfrak{p}$ кососимметричен по отношению к Q_p (лемма 12.5 гл. I). Пусть X^* и Y^* — некоторые векторные поля на M , такие, что $X_p^* = X$, $Y_p^* = Y$. Если вообще D_1, D_2 — дифференцирования некоторой алгебры, то и $D_1 D_2 - D_2 D_1$ является ее дифференцированием.

Значит, эндоморфизм

$$R(X^*, Y^*) = \nabla_{X^*} \nabla_{Y^*} - \nabla_{Y^*} \nabla_{X^*} - \nabla_{[X^*, Y^*]}$$

является дифференцированием смешанной тензорной алгебры $\mathfrak{D}(M)$, сохраняющим тип тензоров и перестановочным со свертываниями. Кроме того, $R(fX^*, gY^*) \cdot hZ = fghR(X^*, Y^*) \cdot Z$ для $f, g, h \in C^\infty(M)$ и $Z \in \mathfrak{D}^1(M)$. Отсюда следует, что

$$(R(X^*, Y^*) T)_p$$

для некоторого тензорного поля T зависит только от значений $R_p(X, Y)$ и T_p . Поэтому можно положить

$$R_p(X, Y) \cdot T_p = (R(X^*, Y^*) T)_p.$$

Отображение $T_p \rightarrow R_p(X, Y) \cdot T_p$ есть единственное продолжение эндоморфизма $R_p(X, Y)$ пространства $\mathfrak{p}$ до дифференцирования смешанной тензорной алгебры $\mathfrak{D}(p)$, перестановочного со свертываниями. Поскольку M локально симметрично, то

$$R_p(X, Y) \cdot R_p = ((\nabla_{X^*} \nabla_{Y^*} - \nabla_{Y^*} \nabla_{X^*} - \nabla_{[X^*, Y^*]}) R)_p = 0.$$

Отсюда видно, что $R_p(X, Y) \in \mathfrak{k}$, и лемма доказана.

Рассмотрим теперь прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$. Введем в $\mathfrak{g}$ операцию коммутирования следующим образом:

$$[X_1, X_2] = -R(X_1, X_2) \quad \text{для } X_1, X_2 \in \mathfrak{p}.$$

$$[T, X] = -[X, T] = T \cdot X \quad (\text{образ вектора } X \text{ при } T) \quad \text{для } X \in \mathfrak{p}, T \in \mathfrak{k}.$$

$$[T_1, T_2] = T_1 T_2 - T_2 T_1 \quad \text{для } T_1, T_2 \in \mathfrak{k}.$$

Определение коммутатора $[X_1, X_2]$ подсказано, конечно, теоремой 4.2.

Лемма 5.3. Введенная выше операция коммутирования превращает $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли.

Доказательство. Так как операция коммутирования кососимметрична, то нуждается в проверке только тождество Якоби

$$[Z_1, [Z_2, Z_3]] + [Z_2, [Z_3, Z_1]] + [Z_3, [Z_1, Z_2]] = 0. \quad (5)$$

Если все Z_i принадлежат $\mathfrak{k}$, то (5) есть тождество Якоби для $\mathfrak{k}$. Если $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{k}, Z_3 \in \mathfrak{p}$, то (5) непосредственно следует из определения коммутатора. Если $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{p}, Z_3 \in \mathfrak{k}$, то (5) сводится к (4). Наконец, если все $Z_i \in \mathfrak{p}$, то тождество Якоби есть тождество Бьянки (лемма 12.5 гл. I).

Мы имеем соотношения

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k},$$

которые показывают, что отображение $s: T + X \rightarrow T - X$ ($T \in \mathfrak{t}$, $X \in \mathfrak{p}$) является инволютивным автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$. Множество неподвижных точек автоморфизма s совпадает с $\mathfrak{t}$.

Лемма 5.4. *Пара $(\mathfrak{g}, s)$ является эффективной ортогональной симметрической алгеброй Ли.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{n}$ — идеал алгебры $\mathfrak{g}$, содержащийся в $\mathfrak{t}$. Тогда для $T \in \mathfrak{n}$, $X \in \mathfrak{p}$

$$[T, X] \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{n} = \{0\},$$

откуда $T \cdot X = 0$. Значит, $T = 0$ и $\mathfrak{n} = \{0\}$. В частности, если обозначить через $\mathfrak{z}$ центр алгебры $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$.

Присоединенная группа $\text{Int}(\mathfrak{g})$ имеет алгебру Ли $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. Обозначим через K аналитическую подгруппу в $\text{Int}(\mathfrak{g})$, алгеброй Ли которой является $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$. Каждый элемент группы K оставляет $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{t}$ инвариантными, так что K есть подгруппа Ли прямого произведения $GL(\mathfrak{p}) \times GL(\mathfrak{t})$. Отображения группы $GL(\mathfrak{p}) \times GL(\mathfrak{t})$ на $GL(\mathfrak{p})$ и $GL(\mathfrak{t})$, полученные путем ограничения эндоморфизмов на $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{t}$ соответственно, являются аналитическими гомоморфизмами. Образы $K_{\mathfrak{p}}$ и $K_{\mathfrak{t}}$ группы K при этих отображениях суть аналитические подгруппы в $GL(\mathfrak{p})$ и $GL(\mathfrak{t})$ соответственно. Их алгебры Ли получаются путем ограничения эндоморфизмов из $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ на $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{t}$ соответственно. Поэтому мы видим, что алгебра Ли группы $K_{\mathfrak{p}}$ есть в точности $\mathfrak{t}$, а алгебра Ли группы $K_{\mathfrak{t}}$ есть $\text{ad}_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{t})$. Итак, $K_{\mathfrak{t}} = \text{Int}(\mathfrak{t})$ (как группы Ли).

Каждый автоморфизм A пространства $\mathfrak{p}$ можно однозначно продолжить до сохраняющего тип автоморфизма $\tilde{A}$ смешанной тензорной алгебры $\mathfrak{D}(\mathfrak{p})$ над $\mathfrak{p}$, такого, что $\tilde{A}$ совпадает с $({}^t A)^{-1}$ на двойственном пространстве $\mathfrak{p}^*$. Те автоморфизмы A пространства $\mathfrak{p}$, для которых $Q_{\mathfrak{p}}$ и $R_{\mathfrak{p}}$ инвариантны относительно A , составляют компактную подгруппу Ли в $GL(\mathfrak{p})$ с алгеброй Ли $\mathfrak{t}$. Компонента единицы этой группы должна совпадать с $K_{\mathfrak{p}}$. Значит, группа $K_{\mathfrak{p}}$ компактна, и тем же свойством обладает ее гомоморфный образ $K_{\mathfrak{t}}$.

Пусть (k_n) — последовательность в K . Существует такая подпоследовательность (k_v) в (k_n) , что соответствующие последовательности ограничений на $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{t}$ сходятся. Тогда последовательность (k_v) сходится (в относительной топологии группы $GL(\mathfrak{g})$) к некоторому элементу $k \in K$. В частности, K есть замкнутое подмножество в $GL(\mathfrak{g})$. Согласно теореме 2.10 гл. II, группа Ли K несет на себе относительную топологию группы $GL(\mathfrak{g})$. Итак, K — компактная группа Ли. Отсюда видно, что $\mathfrak{t}$ компактно вложена в $\mathfrak{g}$, и лемма доказана.

Центр $\mathfrak{z}$ алгебры $\mathfrak{g}$ инвариантен относительно s . Значит, $\mathfrak{z} = (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{z}) + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{z})$. Но $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$, так что $\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{p}$. Обозначим

через $\mathfrak{p}'$ ортогональное дополнение к $\mathfrak{z}$ в $\mathfrak{p}$ (по отношению к Q_p). Тогда $[\mathfrak{f}, \mathfrak{p}'] \subset \mathfrak{p}'$, так что $\mathfrak{f} + \mathfrak{p}'$ — идеал алгебры $\mathfrak{g}$, изоморфный алгебре $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. Пусть $c = \dim \mathfrak{z}$. Тогда прямое произведение групп

$$G = \text{Int}(\mathfrak{g}) \times \mathbf{R}^c$$

имеет алгебру Ли $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \times \mathfrak{z}$. Группа Ли K есть компактная подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{f})$. Автоморфизм s алгебры $\mathfrak{g}$ индуцирует автоморфизм σ группы $\text{Int}(\mathfrak{g})$, такой, что

$$\sigma \cdot e^{\text{ad } X} = e^{\text{ad}(s \cdot X)} \quad (X \in \mathfrak{g})$$

(гл. II, § 5). Продолжим σ до автоморфизма группы G , который также будет обозначаться через σ , полагая $\sigma \cdot a = a^{-1}$ для $a \in \mathbf{R}^c$. Тогда K является компонентой единицы в множестве неподвижных точек автоморфизма σ . Итак, (G, K) — риманова симметрическая пара.

Если $X \in \mathfrak{g}$, то обозначим через $X_{\mathfrak{z}}$ составляющую элемента X в $\mathfrak{z}$, соответствующую прямому разложению $\mathfrak{g} = (\mathfrak{f} + \mathfrak{p}') + \mathfrak{z}$. Тогда отображение $X \rightarrow (\text{ad } X, X_{\mathfrak{z}})$ есть изоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ на $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \times \mathfrak{z}$, отображающий $\mathfrak{f}$ на $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{f})$ и такой, что автоморфизмы s и $(d\sigma)_e$ соответствуют друг другу. Таким образом, группу $\text{Ad}_G(K)$ можно рассматривать как группу автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$. Пространство $\mathfrak{p}$ и квадратичная форма Q_p на $\mathfrak{p}$ инвариантны относительно этой группы. отождествляя $\mathfrak{p}$ с $(G/K)_p$, мы видим, что на G/K существует единственная G -инвариантная риманова структура $\tilde{Q}$, такая, что $\tilde{Q}_p = Q_p$. Многообразие G/K с этой римановой структурой является глобально симметрическим (предложение 3.4). Это и есть нужное нам пространство $\tilde{M}$. Действительно, по теореме 4.2 тензор кривизны $\tilde{R}$ многообразия G/K дается формулой

$$\tilde{R}_p(X, Y) \cdot Z = -[[X, Y], Z] \quad (X, Y, Z \in \mathfrak{p}),$$

а по определению коммутирования в $\mathfrak{g}$ имеем

$$-[[X, Y], Z] = -[-R_p(X, Y), Z] = R_p(X, Y) \cdot Z.$$

Отсюда

$$\tilde{R}_p = R_p, \quad \tilde{Q}_p = Q_p$$

и теорема следует из лемм 1.2 и 1.4.

Замечание. В изложенном выше доказательстве группа G была построена при помощи присоединенной группы $\text{Int}(\mathfrak{g})$. Можно было бы немного сократить рассуждения, воспользовавшись теоремой, согласно которой для каждой алгебры Ли $\mathfrak{a}$ над $\mathbf{R}$ существует группа Ли A , алгебра Ли которой изоморфна $\mathfrak{a}$.

Однако эта теорема не доказывается и не используется в настоящей книге¹⁾.

Предложение 5.5. *Риманово локально симметрическое пространство M является аналитическим римановым многообразием.*

Доказательство. В силу теоремы 5.1, существует покрытие $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ многообразия M открытыми шарами $B_\alpha = B_{\rho(\alpha)}(p_\alpha)$, такое, что для каждого α шар $B_{\rho(\alpha)}(p_\alpha)$ есть нормальная окрестность точки p_α , изометричная открытому множеству в римановом глобально симметрическом пространстве. Нам нужно показать, что для любых $\alpha, \beta \in A$ нормальные координаты в точках p_α и p_β аналитически связаны на $B_\alpha \cap B_\beta$. Сделаем следующее предположение о радиусах: $\rho(\alpha) \geq \rho(\beta)$. Тогда если $B_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset$, то шар $B_{\rho(\alpha)}(p_\alpha)$ содержит B_β . Так как риманова структура на M аналитична на $B_{\rho(\alpha)}(p_\alpha)$, то нормальные координаты в точках p_α и p_β аналитически связаны на B_β и, в частности, на $B_\alpha \cap B_\beta$.

В качестве следствия заметим, что предположение аналитичности в определении риманова глобально симметрического пространства можно опустить.

Установим теперь другую связь между локально и глобально симметрическими римановыми пространствами.

Теорема 5.6. *Пусть M — полное односвязное риманово локально симметрическое пространство. Тогда M является римановым глобально симметрическим пространством.*

Доказательство. Пусть $p \in M$, и пусть $B_\rho(p)$ — такая сферическая нормальная окрестность, что геодезическая симметрия s_p является изометрией окрестности $B_\rho(p)$ на себя. Определим отображение Φ многообразия M в M следующим образом. Пусть $q \in M$, и пусть $\gamma(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) — непрерывная кривая, соединяющая p и q . Пусть φ_t — продолжение изометрии s_p вдоль γ в смысле определения из § 11 гл. I, и пусть $\Phi(q) = \varphi_1(q)$. Поскольку M односвязно, из предложения 11.4 гл. I следует, что $\Phi(q)$ не зависит от выбора кривой γ . По той же причине Φ совпадает с φ_1 в некоторой окрестности точки q . Значит, Φ — дифференцируемое отображение многообразия M в M , такое, что $d\Phi_q$ для каждой точки $q \in M$ является изометрией. Так как Φ меняет направление каждой геодезической, выходящей из точки p , то ясно, что $\Phi(M) = M$ и что $\Phi \circ \Phi$ — тождественное отображение. Поскольку Φ инволютивно, оно должно быть взаимно однозначным, и теорема доказана.

¹⁾ По поводу доказательства этой теоремы см. семинар «Софус Ли» [1], стр. 254, а также книгу Понтрягина [1], стр. 423. — Прим. перев.

Следствие 5.7. Пусть M — полное риманово локально симметрическое пространство. Обозначим через g риманову структуру на M и через (M^*, π) — универсальное накрывающее многообразие для M . Тогда M^* с римановой структурой π^*g является римановым глобально симметрическим пространством.

Действительно, M^* удовлетворяет предположениям теоремы 5.6.

§ 6. Компактные группы Ли

Компактную связную группу Ли G всегда можно рассматривать как риманово глобально симметрическое пространство. Отображение $\sigma: (g_1, g_2) \rightarrow (g_2, g_1)$ есть инволютивный автоморфизм прямого произведения $G \times G$. Неподвижные точки автоморфизма σ составляют диагональ G^* в $G \times G$. Пара $(G \times G, G^*)$ есть риманова симметрическая пара, и отображение

$$(g_1, g_2) G^* \rightarrow g_1 g_2^{-1}$$

является диффеоморфизмом факторпространства $G \times G/G^*$ на группу G . Риманова структура на $G \times G/G^*$ является $G \times G$ -инвариантной тогда и только тогда, когда соответствующая риманова структура на G инвариантна относительно правых и левых сдвигов. Поэтому, в силу предложения 3.4, G является римановым глобально симметрическим пространством относительно каждой двухсторонне инвариантной римановой структуры. Естественное отображение группы $G \times G$ на $G \times G/G^*$ превращается в отображение $\pi: G \times G \rightarrow G$, заданное формулой $\pi(g_1, g_2) = g_1 g_2^{-1}$. Вспомня, что геодезическая симметрия s_e определяется условием $s_e \circ \pi = \pi \circ \sigma$, получаем, что $s_e(g) = g^{-1}$ для $g \in G$.

Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G . Тогда прямое произведение $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ есть алгебра Ли группы $G \times G$ и тождество

$$(X, Y) = \left(\frac{1}{2} (X + Y), \frac{1}{2} (X + Y) \right) + \left(\frac{1}{2} (X - Y), -\frac{1}{2} (X - Y) \right)$$

приводит к разложению алгебры $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ на два собственных подпространства автоморфизма $d\sigma$. Так как $\pi(g_1, g_2) = g_1 g_2^{-1}$, то

$$d\pi(X, Y) = X - Y \quad (X, Y \in \mathfrak{g}).$$

Введем следующие обозначения:

$\exp^*$ — экспоненциальное отображение алгебры $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ в $G \times G$;

$\exp$ — экспоненциальное отображение алгебры $\mathfrak{g}$ в G ;

Exp — экспоненциальное отображение пространства $\mathfrak{g}$ в G (здесь G рассматривается как риманово глобально симметрическое пространство).

Тогда из формулы (3) § 3 следует, что

$$\pi(\exp^*(X, -X)) = \text{Exp}(d\pi(X, -X)) \quad (X \in \mathfrak{g}).$$

Значит, $\exp X \cdot (\exp(-X))^{-1} = \text{Exp } 2X$, так что имеем

$$\exp X = \text{Exp } X \quad (X \in \mathfrak{g}).$$

Стало быть, геодезические в G , проходящие через точку e , — это в точности однопараметрические подгруппы. Этот факт можно было бы также доказать, используя формулу (2) из § 9 гл. II, как это было сделано в частном случае, рассмотренном в теореме 6.9 гл. II.

Ортогональная симметрическая алгебра Ли, связанная с парой $(G \times G, G^*)$, имеет вид $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \tau)$, где τ — автоморфизм $(X, Y) \rightarrow (Y, X)$ алгебры $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.

§ 7. Вполне геодезические подмногообразия. Тройные системы Ли

В противоположность римановым многообразиям общего вида глобально симметрические пространства содержат большое количество вполне геодезических подмногообразий. Сейчас мы дадим их описание в терминах алгебр Ли.

Предложение 7.1. Пусть M — риманово многообразие и S — вполне геодезическое подмногообразие в M . Если M локально симметрично, то тем же свойством обладает S .

Доказательство очевидно, так как каждая геодезическая симметрия на S получается из геодезической симметрии на M путем ограничения.

Определение. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\mathbf{R}$, и пусть $\mathfrak{m}$ — подпространство в $\mathfrak{g}$. Подпространство $\mathfrak{m}$ называется *тройной системой Ли*, если для $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$ имеем $[X, [Y, Z]] \in \mathfrak{m}$.

Теорема 7.2. Пусть M — риманово глобально симметрическое пространство. Будем пользоваться обозначениями теоремы 3.3. Отождествим, как обычно, касательное пространство M_{p_0} с подпространством $\mathfrak{p}$ алгебры Ли группы $I(M)$. Пусть $\mathfrak{z}$ — тройная система Ли, содержащаяся в $\mathfrak{p}$. Положим $S = \text{Exp } \mathfrak{z}$. Тогда S обладает естественной дифференцируемой структурой, относительно которой оно является вполне геодезическим подмногообразием в M , удовлетворяющим условию $S_{p_0} = \mathfrak{z}$.

С другой стороны, если S — вполне геодезическое подмногообразие в M и $p_0 \in S$, то подпространство $\mathfrak{z} = S_{p_0}$ пространства $\mathfrak{p}$ является тройной системой Ли.

Доказательство. Предположим сначала, что S — вполне геодезическое подмногообразие, и пусть X, Y — два вектора в касательном пространстве $\mathfrak{z} = S_{p_0}$. Для каждого $t \in \mathbf{R}$ вектор $A = d \text{Exp}_{tY}(X)$ является касательным вектором к S в точке $\text{Exp}(tY)$. Как мы видели раньше, вектор $d\tau(\exp(-tY)) \cdot A$

является M -параллельным вектору A вдоль кривой $\exp tY$ ($t \in \mathbf{R}$). Используя теорему 14.5 гл. I, заключаем отсюда, что $d\tau(\exp(-tY)) \cdot A \in \mathfrak{z}$. В силу теоремы 4.1, это значит, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T_t Y)^n}{(2n+1)!} (X) \in \mathfrak{z}$$

для всех $t \in \mathbf{R}$. Отсюда следует, что $T_Y(X) \in \mathfrak{z}$. Но

$$T_{Y+Z} = T_Y + T_Z + \operatorname{ad} Y \operatorname{ad} Z + \operatorname{ad} Z \operatorname{ad} Y.$$

Сопоставляя это равенство с тождеством Якоби, получаем

$$2[Y, [Z, X]] + [X, [Y, Z]] \in \mathfrak{z} \quad \text{для } X, Y, Z \in \mathfrak{z}. \quad (1)$$

Меняя местами X и Y , получаем соотношение

$$4[X, [Z, Y]] + 2[Y, [X, Z]] \in \mathfrak{z},$$

которое, будучи прибавлено к (1), показывает, что $[X, [Y, Z]] \in \mathfrak{z}$.

С другой стороны, предположим, что $\mathfrak{z}$ — тройная система Ли. В обозначениях теоремы 3.3 $[\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{f}$. Далее, подпространство $[\mathfrak{z}, \mathfrak{z}]$ является подалгеброй в $\mathfrak{f}$. Это следует из тождества

$$[[X, Y], [U, V]] + [U, [V, [X, Y]]] + [V, [[X, Y], U]] = 0$$

и из того, что $\mathfrak{z}$ — тройная система Ли. Отсюда немедленно следует, что подпространство $\mathfrak{g}' = \mathfrak{z} + [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}]$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Обозначим через G' аналитическую подгруппу в G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}'$, через M' — орбиту $G' \cdot p_0$ и через K' — подгруппу группы G' , оставляющую точку p_0 неподвижной. Поскольку тождественное отображение группы G' в G непрерывно, K' есть замкнутая подгруппа в G' . Так как M' находится во взаимно однозначном соответствии $g \cdot p_0 \rightarrow gK'$ с G'/K' , то топологию и дифференцируемую структуру многообразия G'/K' можно перенести на M' . Тогда, в силу предложения 4.4 гл. II, M' будет подмногообразием в M . Далее, $(M')_{p_0} = \mathfrak{z}$. M -геодезические, проходящие через p_0 , имеют вид $\exp tX \cdot p_0$ ($t \in \mathbf{R}$), где X — произвольный вектор из $\mathfrak{p}$. Такая геодезическая касается подмногообразия M' в точке p_0 тогда и только тогда, когда $X \in \mathfrak{z}$. Отсюда следует, что подмногообразие M' в M является геодезическим в точке p_0 . Так как G' — группа, состоящая из изометрий многообразий M и M' , и транзитивно действует на M' , то M' является геодезическим в каждой из своих точек и, значит, вполне геодезическим. Очевидно, $M' = \operatorname{Exp} \mathfrak{z}$, и теорема доказана.

Замечание. Так как подгруппа G' инвариантна относительно автоморфизма $g \rightarrow s_{p_0} g s_{p_0}^s$ группы G , то пара (G', K') является симметрической парой и многообразие $M' = \operatorname{Exp} \mathfrak{z}$ есть риманово глобально симметрическое пространство.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть M — риманово глобально симметрическое пространство, ω — дифференциальная форма на M , инвариантная относительно всех изометрий многообразия M . Показать, что ω замкнута, т. е. $d\omega = 0$. (Указание: использовать формулу $d\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i \wedge \nabla_{X_i} \omega$ из упражнения С. 3 к гл. I.)

2. Сформулировать и доказать обобщение леммы 1.2 на произвольные многообразия с аффинными связностями.

3. Показать, что любые два полных односвязных римановых многообразия M_1, M_2 с одной и той же постоянной кривизной в двумерном направлении изометричны. (Указание: лемма 1.2 дает изометрию между двумя нормальными окрестностями. Метод доказательства теоремы 5.6 дает локальную изометрию многообразия M_1 на M_2 . Затем использовать лемму 13.4 гл. I.)

4. Компактная полупростая группа Ли G обладает такой двусторонне инвариантной римановой структурой Q , что Q_e есть форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G , взятая со знаком минус. Если рассматривать группу G как симметрическое пространство $G \times G/G^*$ (§ 6), то на ней можно ввести двусторонне инвариантную риманову структуру Q^* , отправляясь от формы Киллинга алгебры $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^1$). Показать, что $Q = 2Q^*$.

5. Пусть M — связное локально компактное метрическое пространство. Обозначим через $I(M)$ группу отображений пространства M на себя, сохраняющих расстояния, снабженную компактно-открытой топологией. Пусть H — замкнутая подгруппа группы $I(M)$. Тогда для каждой $p \in M$ орбита $H \cdot p$ замкнута в M .

ЗАМЕЧАНИЯ

§ 1. Изложенный здесь материал принадлежит Э. Картану ([6] и [22], гл. XI) в римановом случае. Что касается аффинного случая, то по поводу локальной теории см. работу Уайтхеда [1], а по поводу глобальной теории см. Номидзу [2], Феденко [1], Розенфельд [2] и Берже [2].

Результаты § 2 [которые в действительности применимы ко всем (сепарабельным) связным локально компактным метрическим пространствам M] принадлежат ван Данцигу и ван дер Вардену [1], см. также Аренс [1].

§ 3. Лемма 3.2 была доказана Э. Картаном ([6], стр. 230) с использованием дифференциальных уравнений. Она была распространена Майерсом и Стинродом [1] на все римановы многообразия. В [16] Э. Картан отмечает тот факт, что геодезические в M являются орбитами однопараметрических подгрупп группы $I(M)$. Это свойство далее исследуется в работе Номидзу [2].

¹⁾ По поводу определения структуры Q^* см. § 5 следующей главы. — Прим. перев.

§ 4. Формула теоремы 4.2 для тензора кривизны симметрического пространства принадлежит Э. Картану [6] и была распространена Номидзу на все редуktивные однородные пространства. Доказательство в тексте взято из работы Хелгасона [2], где дана также формула для дифференциала отображения Exp (теорема 4.1).

§ 5. Связь между локально и глобально симметрическими пространствами не вполне ясна из работ Э. Картана, хотя его обширная статья [10] дает глобальную классификацию. Теорема 5.1 есть частный случай теоремы Номидзу [2] о редуktивных однородных пространствах. Идея доказательства уже использовалась Э. Картаном [6], стр. 225, для похожей задачи построения локально симметрического пространства, тензор кривизны которого удовлетворяет некоторым необходимым условиям, в которых участвует группа голономии (см. введение к этой главе). Теорема 5.6 принадлежит Борелю и Лихнеровичу [1]. Они намечают доказательство, основанное на результатах Эресмана [1], которые применяются к локальной группе локальных изометрий риманова локально симметрического пространства. Амброуз в работе [1] сформулировал и доказал обобщение теоремы 5.6 на произвольные римановы многообразия.

§ 7. Связь между вполне геодезическими подмногообразиями и тройными системами Ли указана в работе Э. Картана [7], стр. 133. См. также Мостов [3].

РАЗЛОЖЕНИЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В предыдущей главе мы видели, что риманово глобально симметрическое пространство M порождает пару $(\mathfrak{I}, s)$, где $\mathfrak{I}$ — алгебра Ли группы изометрий многообразия M и s — инволютивный автоморфизм алгебры $\mathfrak{I}$, множество неподвижных точек которого является компактно вложенной подалгеброй. Настоящая глава посвящена изучению таких пар. В § 1 показано, что они распадаются на три различные категории: компактный тип, некомпактный тип и евклидов тип. Произвольную пару $(\mathfrak{I}, s)$ можно разложить на три пары, принадлежащие указанным выше типам. Поскольку евклидов тип неинтересен, остаются два типа пар — компактный тип и некомпактный тип, причем у обоих этих типов алгебра $\mathfrak{I}$ полупроста. Симметрические пространства, соответствующие этим типам, имеют соответственно положительную и отрицательную кривизну в двумерном направлении. Между двумя типами имеет место замечательная двойственность (§ 2), которая, например, приводит к двум точкам зрения на проблему классификации и, кстати, объясняет формальную аналогию, существующую между сферической тригонометрией и гиперболической тригонометрией.

Важным инвариантом является ранг симметрического пространства M . Он определяется как максимальная размерность плоских вполне геодезических подпространств A в M . В § 6 показано, что каждую геодезическую в M можно сдвинуть в A при помощи изометрии многообразия M . Это означает, что для любых двух точек многообразия M можно говорить об их сложном расстоянии. Последнее является набором $(r_1, \dots, r_l)$ из l действительных чисел (l — ранг многообразия M) и обладает тем свойством, что две пары точек в M переводятся друг в друга при помощи изометрии пространства тогда и только тогда, когда их сложные расстояния одинаковы. Обычное евклидово расстояние положительно. Аналогичным образом набор $(r_1, \dots, r_l)$ должен находиться в фундаментальной области некоторой дискретной группы. [Для некомпактного типа этой группой является группа Вейля W (гл. VII, § 2), для компактного типа группа является более широкой (гл. VII, § 7).]

§ 1. Ортогональные симметрические алгебры Ли

Напомним, что ортогональная симметрическая алгебры Ли — это пара $(\mathfrak{I}, s)$, где

- (i) $\mathfrak{I}$ — алгебра Ли над R .
- (ii) s — инволютивный¹⁾ автоморфизм алгебры $\mathfrak{I}$.

¹⁾ То есть $s \neq I$ и $s^2 = I$.

(iii) Множество неподвижных точек u автоморфизма s является компактно вложенной подалгеброй в $\mathfrak{l}$.

Если, кроме того, $u \cap \mathfrak{z} = \{0\}$, где через $\mathfrak{z}$ обозначен центр алгебры $\mathfrak{l}$, то алгебра $(\mathfrak{l}, s)$ называется *эффективной*. Две ортогональные симметрические алгебры Ли $(\mathfrak{l}_1, s_1)$ и $(\mathfrak{l}_2, s_2)$ называются *изоморфными*, если существует такой изоморфизм φ алгебры $\mathfrak{l}_1$ на $\mathfrak{l}_2$, что $\varphi \circ s_1 = s_2 \circ \varphi$.

Примеры.

(а) Пусть $\mathfrak{l}$ — компактная полупростая алгебра Ли и s — инволютивный автоморфизм алгебры $\mathfrak{l}$. Тогда $(\mathfrak{l}, s)$ — эффективная ортогональная симметрическая алгебра Ли.

(б) Пусть $\mathfrak{l}$ — некомпактная полупростая алгебра Ли, и пусть $\mathfrak{l} = \mathfrak{u} + \mathfrak{e}$ (где $\mathfrak{u}$ — подалгебра) — разложение Картана алгебры $\mathfrak{l}$. Обозначим через s автоморфизм алгебры $\mathfrak{l}$, заданный формулой $s(T + X) = T - X$ ($T \in \mathfrak{u}$, $X \in \mathfrak{e}$). Тогда $(\mathfrak{l}, s)$ — эффективная ортогональная симметрическая алгебра Ли (предложение 7.4 гл. III).

(в) Пусть $\mathfrak{e}$ — конечномерное векторное пространство над $\mathbf{R}$ и пусть $\mathfrak{u}$ — алгебра Ли некоторой компактной подгруппы Ли группы $GL(\mathfrak{e})$. Обозначим через $\mathfrak{l}$ прямую сумму $\mathfrak{l} = \mathfrak{u} + \mathfrak{e}$. Превратим $\mathfrak{l}$ в алгебру Ли, полагая

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= 0, & \text{если } X_1, X_2 \in \mathfrak{e}, \\ [T, X] &= -[X, T] = T \cdot X \text{ (образ вектора } X \text{ при } T), & \text{если } T \in \mathfrak{u}, X \in \mathfrak{e}, \\ [T_1, T_2] &= T_1 T_2 - T_2 T_1, & \text{если } T_1, T_2 \in \mathfrak{u}. \end{aligned}$$

Тогда $\mathfrak{l}$ — алгебра Ли, содержащая $\mathfrak{u}$ в качестве подалгебры. Если предположить, что $\mathfrak{e} \neq \{0\}$, то отображение $s: T + X \rightarrow T - X$ ($T \in \mathfrak{u}$, $X \in \mathfrak{e}$) будет инволютивным автоморфизмом алгебры $\mathfrak{l}$. Пара $(\mathfrak{l}, s)$ является эффективной ортогональной симметрической алгеброй Ли. Доказательство этого утверждения совпадает с доказательством леммы 5.4 главы IV.

Определение. Пусть $(\mathfrak{l}, s)$ — эффективная ортогональная симметрическая алгебра Ли. Пусть $\mathfrak{l} = \mathfrak{u} + \mathfrak{e}$ — разложение алгебры $\mathfrak{l}$ на собственные подпространства автоморфизма s , отвечающие собственным значениям $+1$ и -1 соответственно.

а) Если $\mathfrak{l}$ компактна и полупроста, то говорят, что $(\mathfrak{l}, s)$ — алгебра *компактного типа*.

б) Если $\mathfrak{l}$ некомпактна и полупроста и $\mathfrak{l} = \mathfrak{u} + \mathfrak{e}$ есть разложение Картана алгебры $\mathfrak{l}$, то говорят, что $(\mathfrak{l}, s)$ — алгебра *некомпактного типа*.

(в) Если $\mathfrak{e}$ — абелев идеал в $\mathfrak{l}$, то говорят, что $(\mathfrak{l}, s)$ — алгебра *евклидова типа*.

Определение. Пусть $(\mathfrak{l}, s)$ — ортогональная симметрическая алгебра Ли, и пусть (L, U) — пара, связанная¹⁾ с алгеброй $(\mathfrak{l}, s)$.

¹⁾ См. определение перед предложением 3.6 гл. IV.

В соответствии с типом алгебры $(\mathfrak{l}, s)$ говорят, что (L, U) — пара компактного типа, некомпактного типа или евклидова типа.

Следующая теорема показывает, что каждую эффективную ортогональную симметрическую алгебру Ли можно разложить на три других, которые являются алгебрами компактного, некомпактного и евклидова типа соответственно.

Теорема 1.1. Пусть $(\mathfrak{l}, s)$ — эффективная ортогональная симметрическая алгебра Ли. Тогда в $\mathfrak{l}$ существуют идеалы $\mathfrak{l}_0$, $\mathfrak{l}_-$ и $\mathfrak{l}_+$, обладающие следующими свойствами:

1. $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0 + \mathfrak{l}_- + \mathfrak{l}_+$ (прямая сумма).
2. $\mathfrak{l}_0$, $\mathfrak{l}_-$ и $\mathfrak{l}_+$ инвариантны относительно s и попарно ортогональны по отношению к форме Киллинга алгебры $\mathfrak{l}$.
3. Обозначим через s_0 , s_- и s_+ ограничения автоморфизма s на $\mathfrak{l}_0$, $\mathfrak{l}_-$ и $\mathfrak{l}_+$ соответственно. Пары $(\mathfrak{l}_0, s_0)$, $(\mathfrak{l}_-, s_-)$ и $(\mathfrak{l}_+, s_+)$ суть эффективные ортогональные симметрические алгебры Ли евклидова, компактного и некомпактного типа соответственно.

Доказательство этой теоремы будет разбито на несколько лемм. Обозначим через $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{e}$ собственные подпространства автоморфизма s , отвечающие собственным значениям $+1$ и -1 соответственно. Тогда

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{u} + \mathfrak{e} \text{ (прямая сумма), } [\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] \subset \mathfrak{u}, [\mathfrak{u}, \mathfrak{e}] \subset \mathfrak{e}, [\mathfrak{e}, \mathfrak{e}] \subset \mathfrak{u}. \quad (1)$$

Обозначим через B форму Киллинга алгебры $\mathfrak{l}$. Из того, что B инвариантна относительно всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{l}$ и, в частности, относительно s , следует, что подпространства $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{e}$ ортогональны по отношению к B .

Лемма 1.2. Форма Киллинга B отрицательно определена на $\mathfrak{u}$.

Эта лемма является частным случаем предложения 6.8 гл. II.

Обозначим теперь через U аналитическую подгруппу присоединенной группы $\text{Int}(\mathfrak{l})$ с алгеброй Ли $\text{ad}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{u})$. Вследствие наших предположений U является компактной подгруппой Ли в $GL(\mathfrak{l})$. Значит, она несет на себе относительную топологию группы $GL(\mathfrak{l})$. Поскольку U связна, из соотношений (1) вытекает, что

$$\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{u} \subset \mathfrak{u}, \quad \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{e} \subset \mathfrak{e} \quad \text{для } \mathfrak{u} \in U.$$

Будучи компактной линейной группой, U оставляет инвариантной некоторую положительно определенную симметрическую билинейную форму Q на $\mathfrak{e} \times \mathfrak{e}$. Существуют такой базис $X_1, \dots, X_n$ пространства $\mathfrak{e}$ и такие вещественные числа $\beta_1, \dots, \beta_n$, что

$$Q(X, X) = x_1^2 + \dots + x_n^2,$$

$$B(X, X) = \beta_1 x_1^2 + \dots + \beta_n x_n^2,$$

если $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$. Положим

$$e_0 = \sum_{\beta_i=0} R X_i, \quad e_- = \sum_{\beta_i<0} R X_i, \quad e_+ = \sum_{\beta_i>0} R X_i.$$

Тогда e является прямой суммой подпространств e_0, e_+, e_- ; далее, эти подпространства ортогональны по отношению к Q и B и каждое из них инвариантно относительно s . Если определить эндоморфизм b пространства e формулами $bX_i = \beta_i X_i$ ($1 \leq i \leq n$), то,

$$Q(bX, Y) = B(X, Y)$$

для $X, Y \in e$. Поскольку B и Q инвариантны относительно U эндоморфизм b перестановочен с ограничением каждого элемента $u \in U$ на e . Отсюда следует, что пространства e_0, e_- и e_+ инвариантны относительно U и относительно $\text{ad}_l(u)$.

Лемма 1.3. *Подпространства e_0, e_- и e_+ удовлетворяют следующим соотношениям:*

- (i) $e_0 = \{X \in \mathfrak{l} \mid B(X, Y) = 0 \text{ для всех } Y \in \mathfrak{l}\}$;
- (ii) $[e_0, e] = \{0\}$ и e_0 — абелев идеал в $\mathfrak{l}$;
- (iii) $[e_-, e_+] = \{0\}$.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{n}$ множество, стоящее в правой части равенства (1). Тогда $\mathfrak{n}$ инвариантно относительно s , так что $\mathfrak{n} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{u} + \mathfrak{n} \cap \mathfrak{e}$ (прямая сумма). Но $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{u} = \{0\}$, в силу леммы 1.2, откуда $\mathfrak{n} \subseteq e$. Далее, $\mathfrak{n} \cap e_- = \mathfrak{n} \cap e_+ = \{0\}$, так что $\mathfrak{n} \subseteq e_0$. С другой стороны, если $X \in e_0$, то $B(X, Y) = 0$ для всех $Y \in e_0$ и, значит, для всех $Y \in \mathfrak{l}$. Тем самым доказано (i). Из условия (i) следует, что e_0 — идеал в $\mathfrak{l}$. Но $[e_0, e] \subseteq \mathfrak{u}$ в силу (1). Отсюда вытекает (ii). Для доказательства утверждения (iii) заметим, что $[e_-, e_+] \subseteq \mathfrak{u}$. Поэтому, в силу леммы 1.2, достаточно доказать, что

$$B(\mathfrak{u}, [e_-, e_+]) = 0.$$

Но если $T \in \mathfrak{u}$, $X_{\pm} \in e_{\pm}$, то

$$B(T, [X_-, X_+]) = B([T, X_-], X_+) = 0$$

и лемма доказана.

Положим теперь $\mathfrak{u}_+ = [e_+, e_+]$, $\mathfrak{u}_- = [e_-, e_-]$ и обозначим через $\mathfrak{u}_0$ ортогональное дополнение (относительно B) к подпространству в $\mathfrak{u}$, натянутому на $\mathfrak{u}_+$ и $\mathfrak{u}_-$.

Лемма 1.4. *Подпространства $\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_+$ и $\mathfrak{u}_-$ являются идеалами в $\mathfrak{u}$, ортогональными по отношению к B , и $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 + \mathfrak{u}_- + \mathfrak{u}_+$ (прямая сумма).*

Доказательство. Поскольку $[u, e_+] \subset e_+$, в силу тождества Якоби, имеем $[u_+, u] = [[e_+, e_+], u] \subset u_+$. Аналогично $[u_-, u] \subset u_-$. Пусть теперь $X_{\pm} \in e_{\pm}$, $Y_{\pm} \in e_{\pm}$. Тогда

$$B([X_+, Y_+], [X_-, Y_-]) = B(X_+, [Y_+, [X_-, Y_-]]) = 0,$$

в силу тождества Якоби и леммы 1.3 (iii). Значит, u_+ и u_- ортогональны и сумма $u_- + u_+$ является идеалом в u . Ортогональное дополнение u_0 также является идеалом, и лемма теперь следует из леммы 1.2.

Лемма 1.5. *Имеют место следующие соотношения коммутирования:*

- (i) $[u_0, e_-] = [u_0, e_+] = \{0\}$;
- (ii) $[u_-, e_0] = [u_-, e_+] = \{0\}$;
- (iii) $[u_+, e_0] = [u_+, e_-] = \{0\}$.

Доказательство. (i) Пусть $T \in u_0$, $X, Y \in e_+$. Тогда

$$B([T, X], Y) = B(T, [X, Y]) = 0.$$

Значит, $[u_0, e_+]$ ортогонально к e_+ . Так как B положительно определена на e_+ и так как $[u_0, e_+] \subset e_+$, отсюда следует, что $[u_0, e_+] = \{0\}$. Аналогично $[u_0, e_-] = \{0\}$. Докажем теперь (ii). Имеем $[u_-, e_0] = [[e_-, e_-], e_0] = \{0\}$ в силу леммы 1.3 (ii). Далее, $[u_-, e_+] = [[e_-, e_-], e_+] = \{0\}$ по лемме 1.3 (iii). Последнее утверждение (iii) доказывается таким же способом.

При доказательстве теоремы 1.1 мы будем различать два случая: $e_0 = \{0\}$ и $e_0 \neq \{0\}$. Предположим сначала, что $e_0 \neq \{0\}$. Тогда положим

$$l_0 = u_0 + e_0, \quad l_- = u_- + e_-, \quad l_+ = u_+ + e_+.$$

Алгебра l является прямой суммой подпространств l_0, l_-, l_+ . Эти подпространства инвариантны относительно s и попарно ортогональны по отношению к B . Используя доказанные выше леммы, имеем

$$\begin{aligned} [l_0, l] &= [u_0, l] + [e_0, l] = [u_0, u] + [u_0, e_0] + [u_0, e_+] + \\ &\quad + [u_0, e_-] + [e_0, l] \subset u_0 + e_0 + \{0\} + \{0\} + e_0, \end{aligned}$$

откуда $[l_0, l] \subset l_0$. Далее,

$$\begin{aligned} [l_+, l] &= [u_+, l] + [e_+, l] = \\ &= [u_+, u] + [u_+, e_0] + [u_+, e_-] + [u_+, e_+] + [e_+, u] + [e_+, e_0] + \\ &\quad + [e_+, e_-] + [e_+, e_+] \subset u_+ + \{0\} + \{0\} + e_+ + e_+ + \{0\} + \{0\} + u_+, \end{aligned}$$

откуда $[l_+, l] \subset l_+$. Аналогично $[l_-, l] \subset l_-$, так что подпространства l_0, l_-, l_+ являются идеалами в l . Следовательно, их формы Киллинга получаются из B путем ограничения. Так как B отрицательно определена на l_- , то получаем (предложение 6.6 гл. II),

что $\mathfrak{l}_-$ — полупростая компактная алгебра Ли. Так как B отрицательно определена на $\mathfrak{u}_+$ и положительно определена на $\mathfrak{n}_+$, то $\mathfrak{l}_+$ полупроста и разложение $\mathfrak{l}_+ = \mathfrak{u}_+ + \mathfrak{e}_+$ есть разложение Картана алгебры $\mathfrak{l}_+$ (предложение 7.4 гл. III). Наконец, рассмотрим $\mathfrak{l}_0$. Поскольку центр $\mathfrak{z}_0$ алгебры $\mathfrak{l}_0$ совпадает с центром $\mathfrak{z}$ алгебры $\mathfrak{l}$, то $\mathfrak{u}_0 \cap \mathfrak{z}_0 \subset \mathfrak{u} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$. Для доказательства того, что $\mathfrak{u}_0$ компактно вложена в $\mathfrak{l}_0$, мы используем следующую лемму, которую сообщил автору Хано.

Лемма 1.6. Пусть G_0 — группа Ли и $\mathfrak{g}_0$ — ее алгебра Ли. Предположим, что $\mathfrak{g}_0$ является прямой суммой двух идеалов $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$. Пусть $\mathfrak{k}_i$ — подалгебра в $\mathfrak{g}_i$ ($i = 1, 2$), и пусть $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2$. Тогда $\mathfrak{k}_0$ есть компактно вложенная подалгебра в $\mathfrak{g}_0$ в том и только в том случае, когда $\mathfrak{k}_1$ и $\mathfrak{k}_2$ компактно вложены в $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ соответственно.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно предположить, что G_0 односвязна и является прямым произведением $G_0 = G_1 \times G_2$, где G_i — односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_i$ ($i = 1, 2$). Обозначим через K_i аналитическую подгруппу в G_i с алгеброй Ли $\mathfrak{k}_i$ ($i = 0, 1, 2$). Тогда $K_0 = K_1 \times K_2$. Если обозначить через Z_i центр группы G_i ($i = 0, 1, 2$), то $Z_0 = Z_1 \times Z_2$. Отображение $(k_1(K_1 \cap Z_1), k_2(K_2 \cap Z_2)) \rightarrow k_1 k_2(K_0 \cap Z_0)$ является топологическим изоморфизмом прямого произведения

$$(K_1/K_1 \cap Z_1) \times (K_2/K_2 \cap Z_2) \text{ на } K_0/K_0 \cap Z_0.$$

В силу леммы 5.1 гл. II, группа Ли $K_i/K_i \cap Z_i$ аналитически изоморфна подгруппе Ли $\text{Ad}_{G_i}(K_i)$ в $\text{Int}(\mathfrak{g}_i)$ ($i = 0, 1, 2$). Отсюда непосредственно следует лемма.

Возвращаясь к теореме 1.1, заметим сначала, что существует группа L , алгебра Ли которой изоморфна $\mathfrak{l}$. Действительно, если $s = \dim \mathfrak{z}$, то прямое произведение $L = \text{Int}(\mathfrak{l}) \times \mathbf{R}^s$ имеет в качестве алгебры Ли прямое произведение $\text{ad}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{l}) \times \mathfrak{z}$. Чтобы показать, что эта алгебра Ли изоморфна $\mathfrak{l}$, заметим, что $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{e}$, и обозначим через $\mathfrak{n}'$ ортогональное дополнение (по отношению к Q) к подпространству $\mathfrak{z}$ в $\mathfrak{e}$. Тогда $[\mathfrak{u}, \mathfrak{e}'] \subset \mathfrak{n}'$ и $[\mathfrak{e}', \mathfrak{e}'] \subset \mathfrak{u}$, так что подпространство $\mathfrak{u} + \mathfrak{e}'$ является идеалом в $\mathfrak{l}$, изоморфным $\text{ad}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{l})$.

Теперь из леммы 1.6 следует, что $\mathfrak{u}_0$ компактно вложена в $\mathfrak{l}_0$. Далее, $\mathfrak{n}_0$ — абелев идеал в $\mathfrak{l}_0$, так что $(\mathfrak{l}_0, \mathfrak{s}_0)$ — ортогональная симметрическая алгебра Ли евклидова типа.

Остается рассмотреть случай $\mathfrak{e}_0 = \{0\}$. В этом случае $\mathfrak{u}_0$ — идеал в $\mathfrak{l}$. Значит, форма Киллинга алгебры $\mathfrak{u}_0$ отрицательно определена, так что она компактна и полупроста. Положим

$$\mathfrak{l}_0 = \{0\}, \quad \mathfrak{l}_- = \mathfrak{u}_0 + \mathfrak{u}_- + \mathfrak{e}_-, \quad \mathfrak{l}_+ = \mathfrak{u}_+ + \mathfrak{e}_+, \quad \text{если } \mathfrak{e}_- \neq \{0\};$$

$$\mathfrak{l}_0 = \{0\}, \quad \mathfrak{l}_- = \{0\}, \quad \mathfrak{l}_+ = \mathfrak{u}_0 + \mathfrak{u}_+ + \mathfrak{e}_+, \quad \text{если } \mathfrak{e}_- = \{0\}.$$

В каждом из этих случаев теорема 1.1 легко доказывается.

Следствие 1.7. Предположим, что $X \in \mathfrak{e}$ перестановочен с каждым элементом подалгебры $(\mathfrak{u})$. Тогда $X \in \mathfrak{e}_0$.

Действительно, можно написать $X = X_0 + X_- + X_+$, где $X_0 \in \mathfrak{e}_0$, $X_- \in \mathfrak{e}_-$ и $X_+ \in \mathfrak{e}_+$. Тогда из предположения следует, что $\text{ad}_\Gamma(X_+)$ и $\text{ad}_\Gamma(X_-)$ отображают $\mathfrak{u}$ в $\{0\}$. Значит, $(\text{ad}_\Gamma(X_+))^2 = (\text{ad}_\Gamma(X_-))^2 = 0$ и поэтому $B(X_+, X_+) = B(X_-, X_-) = 0$. Значит, $X_+ = X_- = 0$ и $X \in \mathfrak{e}_0$.

В дальнейшем евклидов тип по большей части будет исключаться из рассмотрения, так как связанные с ним симметрические пространства — это в точности пространства, допускающие накрытие евклидовым пространством.

§ 2. Двойственность

Между компактным и некомпактным типами имеется замечательная и важная двойственность. Пусть (Γ, s) — ортогональная симметрическая алгебра Ли, и пусть $\Gamma = \mathfrak{u} + \mathfrak{e}$, как в формуле (1) § 1. Обозначим через Γ^* подмножество $\mathfrak{u} + i\mathfrak{e}$ комплексной оболочки Γ^C алгебры Γ . С операцией коммутирования, унаследованной от Γ^C , Γ^* является алгеброй Ли над $\mathbf{R}$. Отображение $s^* : T + iX \rightarrow T - iX$ ($T \in \mathfrak{u}$, $X \in \mathfrak{e}$) есть инволютивный автоморфизм алгебры Γ^* . Как сейчас будет показано, (Γ^*, s^*) является ортогональной симметрической алгеброй Ли, которая называется двойственной к алгебре (Γ, s) . Тогда алгебра (Γ, s) является двойственной к (Γ^*, s^*) .

Предложение 2.1. Пусть (Γ, s) — ортогональная симметрическая алгебра Ли. Тогда

(i) пара (Γ^*, s^*) является ортогональной симметрической алгеброй Ли;

(ii) если (Γ, s) — алгебра компактного типа, то (Γ^*, s^*) — алгебра некомпактного типа, и наоборот;

(iii) если алгебра (Γ_1, s_1) изоморфна (Γ_2, s_2) , то (Γ_1^*, s_1^*) изоморфна (Γ_2^*, s_2^*) .

Доказательство. (i) Обозначим через $(\Gamma^C)^{\mathbf{R}}$ алгебру Ли Γ^C , рассматриваемую как алгебра Ли над $\mathbf{R}$. Тогда алгебра Ли $(\Gamma^C)^{\mathbf{R}}$ обладает комплексной структурой J , заданной при помощи умножения на i в Γ^C . Каждый эндоморфизм A пространства Γ или Γ^* однозначно продолжается до линейного преобразования алгебры $(\Gamma^C)^{\mathbf{R}}$, перестановочного с J . При этом группы Ли $GL(\Gamma)$ и $GL(\Gamma^*)$ становятся замкнутыми подгруппами Ли в $GL((\Gamma^C)^{\mathbf{R}})$. Следовательно, присоединенные группы $\text{Int}(\Gamma)$ и $\text{Int}(\Gamma^*)$ являются подгруппами Ли в $GL((\Gamma^C)^{\mathbf{R}})$. Обозначим через U аналитическую подгруппу в $\text{Int}(\Gamma)$ с алгеброй Ли $\text{ad}_\Gamma(\mathfrak{u})$. Группа U компактна и поэтому, в силу следствия 2.9 из гл. II, подалгебра $\mathfrak{u}$ компактно вложена в Γ^* . Для доказательства утверждения (ii) нужно заметить только, что Γ и Γ^* —

вещественные формы алгебры I^C и поэтому их формы Киллинга получаются из формы Киллинга алгебры I^C путем ограничения. Для доказательства утверждения (iii) предположим, что φ — такой изоморфизм алгебры I_1 на I_2 , что $\varphi \circ s_1 = s_2 \circ \varphi$. Тогда φ однозначно продолжается до изоморфизма $\tilde{\varphi}$ алгебры I_1^C на I_2^C . Ограничение изоморфизма $\tilde{\varphi}$ на I_1^* дает требуемый изоморфизм между (I_1^*, s_1^*) и (I_2^*, s_2^*) .

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$. Если I пробегает все компактные вещественные формы алгебры $\mathfrak{g}$ и s пробегает все инволютивные автоморфизмы алгебры I , то I^* пробегает все некомпактные вещественные формы алгебры $\mathfrak{g}$.

Предложение 2.2. Пусть I — компактная полупростая алгебра Ли. Пусть s_1 и s_2 — два инволютивных автоморфизма алгебры I . Обозначим через I_1^* и I_2^* соответствующие вещественные формы алгебры I^C . Тогда s_1 и s_2 сопряжены в группе $\text{Aut}(I)$ тогда и только тогда, когда I_1^* и I_2^* сопряжены при помощи автоморфизма алгебры I^C .

Доказательство. Предположим сначала, что существует такой автоморфизм $\sigma \in \text{Aut}(I)$, что $s_2 = \sigma s_1 \sigma^{-1}$. Пусть $I = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{e}_1$, $I = \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{e}_2$ — прямые разложения алгебры I на собственные подпространства автоморфизмов s_1 и s_2 соответственно. Тогда $\sigma \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2$ и $\sigma \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2$. Обозначим через Σ единственное продолжение автоморфизма σ до (комплексного) автоморфизма алгебры I^C . Поскольку $I_1^* = \mathfrak{u}_1 + i\mathfrak{e}_1$, $I_2^* = \mathfrak{u}_2 + i\mathfrak{e}_2$, очевидно, что $\Sigma \cdot I_1^* = I_2^*$.

Для доказательства обратной (и нетривиальной) части предложения 2.2 мы используем теорему 7.2 гл. III, утверждающую, что два разложения Картана полупростой алгебры Ли обязательно сопряжены при помощи внутреннего автоморфизма. Предположим, что существует такой автоморфизм Σ алгебры I^C , что $\Sigma \cdot I_1^* = I_2^*$. Тогда два разложения Картана $I_2^* = \mathfrak{u}_2 + i\mathfrak{e}_2$ и $I_2^* = \Sigma \cdot \mathfrak{u}_1 + i\Sigma \cdot \mathfrak{e}_1$ сопряжены при помощи внутреннего автоморфизма γ алгебры I_2^* . Обозначим через Γ единственное продолжение автоморфизма γ до автоморфизма алгебры I^C . Тогда алгебра I инвариантна относительно автоморфизма $\Gamma \circ \Sigma$, и автоморфизмы s_2 и s_1 сопряжены при помощи его ограничения на I .

Как показано в гл. IV, на любой компактной группе Ли можно задать структуру риманова глобально симметрического пространства. Мы увидим сейчас, что полученный таким способом подкласс ортогональных симметрических алгебр Ли компактного типа соответствует при нашей двойственности классу ортогональных симметрических алгебр Ли (I, s) некомпактного типа, где I обладает комплексной структурой и s является сопряжением.

Предложение 2.3. Пусть I_0 — компактная полупростая алгебра Ли, и пусть s — автоморфизм $(X, Y) \rightarrow (Y, X)$ прямого

произведения $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0 \times \mathfrak{l}_0$. Тогда $(\mathfrak{l}, s)$ — ортогональная симметрическая алгебра Ли компактного типа. Если обозначить через $(\mathfrak{l}^*, s^*)$ алгебру, двойственную к $(\mathfrak{l}, s)$, то $\mathfrak{l}^*$ изоморфна (как вещественная алгебра Ли) комплексной подалгебре $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$ таким образом, что s^* соответствует сопряжению алгебры $\mathfrak{a}$ по отношению к некоторой компактной вещественной форме алгебры $\mathfrak{a}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{u} = \{(X, X) \mid X \in \mathfrak{l}_0\}$ и $\mathfrak{e} = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{l}_0\}$. Тогда прямое разложение $\mathfrak{l} = \mathfrak{u} + \mathfrak{e}$ есть обычное разложение алгебры $\mathfrak{l}$ на собственные подпространства автоморфизма s . Мы имеем $\mathfrak{l}^* = \mathfrak{u} + i\mathfrak{e}$ и $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{l} + i\mathfrak{l}$. Алгебра $\mathfrak{a} = \mathfrak{u} + i\mathfrak{u}$ есть (комплексная) подалгебра в $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$ и отображение

$$\varphi: (X, X) + i'(Y, -Y) \rightarrow (X, X) + i(Y, Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{l}_0)$$

является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{l}^*$ на $\mathfrak{a}$ (рассматриваемую как вещественная алгебра Ли). Далее, если обозначить через μ сопряжение алгебры $\mathfrak{a}$ относительно $\mathfrak{u}$, то $\varphi \circ s^* = \mu \circ \varphi$. Поскольку $\mathfrak{u}$ — компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{a}$, предложение доказано.

Теорема 2.4. Пусть $(\mathfrak{l}, s)$ — ортогональная симметрическая алгебра Ли компактного типа и $(\mathfrak{l}^*, s^*)$ — двойственная к ней алгебра. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{l}^*$ обладает комплексной структурой в том и только том случае, когда $\mathfrak{l}$ можно записать в виде прямой суммы $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2$, где $\mathfrak{l}_1$ и $\mathfrak{l}_2$ — идеалы в $\mathfrak{l}$, переставляемые автоморфизмом s .

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathfrak{l}^*$ обладает комплексной структурой, которую мы будем обозначать через J , чтобы не путать ее с комплексной структурой алгебры $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$. Тогда J удовлетворяет соотношению $[X, JY] = J[X, Y]$ для $X, Y \in \mathfrak{l}^*$. Так как $\mathfrak{l}^*$ можно рассматривать как полупростую алгебру Ли над $\mathbb{C}$ (относительно комплексной структуры J), то она обладает компактной вещественной формой $\mathfrak{k}$. Тогда имеем прямое разложение

$$\mathfrak{l}^* = \mathfrak{k} + J\mathfrak{k},$$

которое является разложением Картана алгебры $\mathfrak{l}^*$. С другой стороны, имеем разложения

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{u} + \mathfrak{e}, \quad \mathfrak{l}^* = \mathfrak{u} + i\mathfrak{e}$$

на собственные подпространства автоморфизмов s и s^* соответственно. Так как все разложения Картана алгебры $\mathfrak{l}^*$ сопряжены при помощи внутренних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{l}^*$, то существует такой элемент $\sigma \in \text{Int}(\mathfrak{l}^*)$, что $\sigma \cdot \mathfrak{k} = \mathfrak{u}$, $\sigma \cdot (J\mathfrak{k}) = i\mathfrak{e}$. Рассмотрим теперь следующие отображения:

$$\mathfrak{e} \xrightarrow{i} i\mathfrak{e} \xrightarrow{\sigma^{-1}} J\mathfrak{k} \xrightarrow{-J} \mathfrak{k} \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{u},$$

и положим $\gamma(X) = -\sigma J \sigma^{-1} i X$ для $X \in e$. Тогда γ есть взаимно однозначное линейное отображение пространства e на u и обладает следующими свойствами:

$$(a) [\gamma(X), \gamma(Y)] = [X, Y],$$

$$(б) [X, \gamma(Y)] = [\gamma(X), Y],$$

$$(в) \gamma([X, Y]) = [X, Y]$$

для $X, Y \in e$. Последнее свойство проверяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma[\gamma X, Y] &= \sigma J \sigma^{-1} i ([\sigma J \sigma^{-1} i X, Y]) = \sigma J \sigma^{-1} ([\sigma J \sigma^{-1} i X, i Y]) = \\ &= \sigma J [J \sigma^{-1} i X, \sigma^{-1} i Y] = -\sigma [\sigma^{-1} i X, \sigma^{-1} i Y] = [X, Y]. \end{aligned}$$

Свойство (а) доказывается таким же способом, а (б) следует из (в). Определим теперь подмножества I_1 и I_2 в I условиями

$$I_1 = \{X + \gamma(X) \mid X \in e\}, \quad I_2 = \{X - \gamma(X) \mid X \in e\}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

$$(i) I_1 \cap I_2 = \{0\};$$

$$(ii) s \text{ переставляет } I_1 \text{ и } I_2;$$

$$(iii) I_1 \text{ и } I_2 \text{ являются идеалами в } I.$$

Первое утверждение очевидно, потому что из соотношения $X + \gamma(X) = Y - \gamma(Y)$ следует, что $\gamma(X + Y) = Y - X \in e \cap u = \{0\}$. Второе утверждение очевидно, поскольку $s(X + \gamma(X)) = -X + \gamma(X)$. Наконец, доказанные выше свойства (а), (б) и (в) показывают, что I_1 и I_2 — подалгебры в I и $[I_1, I_2] = \{0\}$, откуда следует (iii). Тем самым доказана первая половина теоремы.

З а м е ч а н и е. Отображение $X + \gamma(X) \rightarrow 2\gamma(X)$ является изоморфизмом алгебры I_1 на u .

Для доказательства второй половины теоремы рассмотрим алгебру Ли I_0 , изоморфную обоим алгебрам I_1 и I_2 . Обозначим через I_i изоморфизм алгебры I_i на I_0 ($i = 1, 2$). В дальнейшем будем обозначать через X произвольный элемент в I_1 и через Y — произвольный элемент в I_2 . Обозначим через $\bar{I}$ прямое произведение $I_0 \times I_0$ и через $\bar{s}, s_0$ — автоморфизмы алгебры $\bar{I}$, заданные формулами

$$\bar{s} \cdot (I_1 X, I_2 Y) = (I_1 s Y, I_2 s X),$$

$$s_0 \cdot (I_1 X, I_2 Y) = (I_2 Y, I_1 X).$$

Тогда имеем изоморфизмы

$$(I, s) \xrightarrow{I_0} (\bar{I}, \bar{s}) \xrightarrow{\sigma} (\bar{I}, s_0),$$

где

$$I_0(X + Y) = (I_1 X, I_2 Y),$$

$$\sigma(I_1 X, I_2 Y) = (I_1 X, I_1 s Y).$$

Обозначим через $(\bar{l}^*, \bar{s}^*)$ алгебру, двойственную к $(\bar{l}, \bar{s})$, и через (g, s_0^*) — алгебру, двойственную к $(\bar{l}, s_0)$. Тогда вследствие предложения 2.1 ортогональные симметрические алгебры Ли

$$(l^*, s^*), (\bar{l}^*, \bar{s}^*), (g, s_0^*)$$

все изоморфны между собой. Но, в силу предложения 2.3, алгебра g обладает комплексной структурой. Используя предложение 2.2, получаем отсюда, что $\bar{l}^*$, а значит и l^* , обладает комплексной структурой. Доказательство теоремы закончено.

Пример 1. Факторпространства $SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$ и $SO_0(p, q)/SO(p) \times SO(q)$.

Обозначим через $SO(p, q)$ группу вещественных квадратных матриц с определителем 1, оставляющих инвариантной квадратичную форму

$$-x_1^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2 \quad (p+q > 2).$$

Обозначим через I_n единичную матрицу порядка n и положим

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

Обозначив через ${}^tA$ транспонированную к A матрицу, мы видим, что матрица g с определителем 1 принадлежит к $SO(p, q)$ тогда и только тогда, когда ${}^tgI_{p,q}g = I_{p,q}$. Таким образом, $SO(p, q)$ есть замкнутая подгруппа в $GL(p+q, \mathbb{R})$ и, значит, топологическая подгруппа Ли. Ее алгебра Ли, которую мы обозначим через $\mathfrak{so}(p, q)$, является подалгеброй в $\mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{R})$. Согласно утверждению (2) из § 2 гл. II, имеем

$X \in \mathfrak{so}(p, q)$ тогда и только тогда, когда $e^{sX} \in SO(p, q)$ для всех $s \in \mathbb{R}$.

Но $e^X \in SO(p, q)$ тогда и только тогда, когда ${}^t(e^X) = I_{p,q}e^{-X}I_{p,q}$.

Поскольку ${}^t(e^X) = e^{tX}$, отсюда следует, что

$X \in \mathfrak{so}(p, q)$ тогда и только тогда, когда ${}^tXI_{p,q} + I_{p,q}X = 0$.

Таким образом, $\mathfrak{so}(p, q)$ есть множество матриц

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ {}^tX_2 & X_3 \end{pmatrix},$$

где X_1 и X_3 — кососимметрические матрицы порядков p и q соответственно и X_2 — произвольная матрица с p строками и q столбцами. В частности, алгебра Ли $\mathfrak{so}(n)$ группы $SO(n)$ ($= SO(n, 0)$) состоит из всех кососимметрических матриц порядка n .

Пусть теперь $l = \mathfrak{so}(p+q)$. Обозначим через s ограничение автоморфизма $\sigma_{p,q}: X \rightarrow I_{p,q}XI_{p,q}$ алгебры $\mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{C})$ на l . Тогда (l, s) — ортогональная симметрическая алгебра Ли компактного типа. Если $l = u + e$ — обычное разложение на собственные под-

пространства автоморфизма s , то легко видеть, что

$$u = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_3 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} X_1 \text{ — кососимметрическая матрица порядка } p \\ X_3 \text{ — кососимметрическая матрица порядка } q \end{array} \right\},$$

$$e = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_2 \\ -{}^tX_2 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} X_2 \text{ — произвольная матрица с } p \text{ строками} \\ \text{и } q \text{ столбцами} \end{array} \right\}.$$

Значит, пара $(\mathbf{SO}(p+q), \mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(q))$ связана с алгеброй $(\mathfrak{l}, s)$. Обозначим через $(\mathfrak{l}^*, s^*)$ алгебру, двойственную к $(\mathfrak{l}, s)$. Тогда $\mathfrak{l}^*$ — подалгебра в $\mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{C})$, заданная формулой $\mathfrak{l}^* = u + ie$, а s^* — снова ограничение автоморфизма $\sigma_{p,q}$ на $\mathfrak{l}^*$. Легко проверить, что отображение

$$\begin{pmatrix} X_1 & iX_2 \\ -i{}^tX_2 & X_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ {}^tX_2 & X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iI_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & iX_2 \\ -i{}^tX_2 & X_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iI_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{l}^*$ на $\mathfrak{so}(p, q)$. При этом изоморфизме автоморфизм s^* соответствует опять автоморфизму $X \rightarrow I_{p,q} X I_{p,q}$ алгебры $\mathfrak{so}(p, q)$. Обозначим через $\mathbf{SO}_0(p, q)$ компоненту единицы группы $\mathbf{SO}(p, q)$. Тогда пара $(\mathbf{SO}_0(p, q), \mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(q))$ связана с ортогональной симметрической алгеброй Ли $(\mathfrak{so}(p, q), \sigma_{p,q})$, которая изоморфна алгебре, двойственной к $(\mathfrak{so}(p+q), s)$.

Пример II. Случай $p=1, q=3$.

Обозначим через $\mathbb{Q}$ алгебру кватернионов, через $\mathbb{Q}_+$ — подпространство чисто мнимых кватернионов и через G — мультипликативную группу кватернионов, имеющих норму 1. С каждой парой $x, y \in G$ свяжем эндоморфизм

$$T_{x,y} : u \rightarrow xuy^{-1} \quad (u \in \mathbb{Q})$$

пространства $\mathbb{Q}$ на себя. Поскольку эндоморфизм $T_{x,y}$ сохраняет норму, он принадлежит к группе вращений пространства $\mathbb{Q}$. Так как G связна, то все $T_{x,y}$ принадлежат связной компоненте единицы в группе вращений. Значит, $T_{x,y} \in \mathbf{SO}(4)$. Подпространство $\mathbb{Q}_+$ инвариантно относительно каждого эндоморфизма $T_{x,x}$. Обозначим через τ_x ограничение эндоморфизма $T_{x,x}$ на $\mathbb{Q}_+$. Тогда $\tau_x \in \mathbf{SO}(3)$. Справедливы следующие утверждения:

(а) отображение $x \rightarrow \tau_x$ является аналитическим гомоморфизмом группы G на $\mathbf{SO}(3)$, и его ядро состоит из e и $-e$, где e — единица в алгебре $\mathbb{Q}$;

(б) отображение $(x, y) \rightarrow T_{x,y}$ является аналитическим гомоморфизмом прямого произведения $G \times G$ на $\mathbf{SO}(4)$, и его ядро состоит из (e, e) и $(-e, -e)$.

Проверка утверждений (а) и (б) оставляется читателю. Переходя к алгебрам Ли, получаем изоморфизм φ алгебры $\mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$ на $\mathfrak{so}(4)$. Обозначим через s_0 автоморфизм $(X, Y) \rightarrow (Y, X)$

алгебры $\mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$. Элементарное вычисление с кватернионами показывает, что $\sigma_{1,3}(T_{x,y}) = T_{y,x}(x, y \in G)$. Отсюда получаем, что
(в) ортогональные симметрические алгебры Ли

$$(\mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3), s_0) \quad \text{и} \quad (\mathfrak{so}(4), \sigma_{1,3})$$

изоморфны при помощи φ .

Согласно предложению 2.1 (iii), двойственные к ним алгебры также изоморфны. В силу теоремы 2.4, мы можем заключить, что алгебра Ли $\mathfrak{so}(1, 3)$ обладает комплексной структурой. Так как эта алгебра Ли имеет размерность 6, то она изоморфна полупростой трехмерной комплексной алгебре Ли (рассматриваемой как вещественная алгебра Ли). Такая алгебра должна иметь подалгебру Картана размерности 1 и два ненулевых корня $\alpha, -\alpha$. Поэтому, в силу теоремы 5.4 гл. III, существует самое большее одна трехмерная комплексная полупростая алгебра Ли. С другой стороны, алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ всех комплексных квадратных матриц порядка 2 со следом 0 является такой алгеброй. Поэтому можно заключить, что $\mathfrak{so}(1, 3)$ изоморфна алгебре $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^R$.

§ 3. Кривизна симметрических пространств в двумерном направлении

Как показывает следующая теорема, три класса симметрических пространств можно различить при помощи их кривизны.

Теорема 3.1. Пусть $(\mathfrak{l}, s)$ — ортогональная симметрическая алгебра Ли, и пусть пара (L, U) связана с $(\mathfrak{l}, s)$. Предположим, что U связна и замкнута¹⁾. Пусть Q — произвольная L -инвариантная риманова структура на L/U .

(i) Если (L, U) компактного типа, то кривизна многообразия L/U в двумерном направлении всюду неотрицательна.

(ii) Если (L, U) некомпактного типа, то кривизна многообразия L/U в двумерном направлении всюду неположительна.

(iii) Если (L, U) евклидова типа, то кривизна многообразия L/U в двумерном направлении всюду равна 0.

Доказательство. Касательное пространство к L/U в точке $o = \{U\}$ можно, как обычно, отождествить с $\mathfrak{e}$ — собственным подпространством автоморфизма s , отвечающим собственному значению -1 . Пусть S — двумерное подпространство в $\mathfrak{e}$, и пусть X, Y — ортонормированный базис в S . Тогда, согласно теореме 4.2 гл. IV, кривизна многообразия L/U в направлении сечения S

¹⁾ Для некомпактного типа это предположение всегда удовлетворяется (см. гл. VI). Для компактного типа подгруппа U всегда замкнута, но не обязательно связна (см. гл. VII).

дается формулой

$$K(S) = -Q_o(R(X, Y)X, Y) = +Q_o([X, Y], X, Y).$$

Утверждение (iii) теперь очевидно, так что можно предположить, что $\mathfrak{l}$ полупроста. Как в § 1, обозначим через b эндоморфизм пространства $\mathfrak{e}$, определенный условием

$$Q_o(bX, Y) = B(X, Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{e}),$$

где через B обозначена форма Киллинга алгебры $\mathfrak{l}$. Поскольку $Q_o(bX, Y) = Q_o(X, bY)$, собственные значения $\beta_1, \dots, \beta_n$ эндоморфизма b вещественны. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — соответствующие собственные подпространства эндоморфизма b . Тогда для $i \neq j$ подпространства e_i и e_j ортогональны как по отношению к B , так и по отношению к Q_o . Мы докажем, что $[e_i, e_j] = \{0\}$. Обозначим через $\mathfrak{u}$ алгебру Ли группы U . Тогда b перестановочен с каждым элементом алгебры $\text{ad}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{u})$. Значит, $[\mathfrak{u}, e_i] \subseteq e_i$ для каждого i . Пусть теперь $X_i \in e_i$, $X_j \in e_j$, $T \in \mathfrak{u}$. Тогда $[X_i, X_j] \in \mathfrak{u}$ и

$$B(T, [X_i, X_j]) = B([T, X_i], X_j) = 0.$$

В силу леммы 1.2, форма B отрицательно определена на $\mathfrak{u}$. Следовательно, $[e_i, e_j] = \{0\}$.

Возвратимся теперь к формуле для $K(S)$. Пусть X_i, Y_i ($1 \leq i \leq n$) — составляющие векторов X и Y соответственно в собственных подпространствах e_i . Тогда

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n [X_i, Y_i], \quad [[X_i, Y_i], X] = [[X_i, Y_i], X_i],$$

откуда

$$K(S) = \sum_{i=1}^n Q_o([X_i, Y_i], X_i, Y_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} B([X_i, Y_i], X_i, Y_i)$$

и

$$K(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} B([X_i, Y_i], [X_i, Y_i]). \quad (1)$$

Так как $\beta_i < 0$ или $\beta_i > 0$ ($1 \leq i \leq n$) в случаях (i) и (ii) соответственно, то отсюда следует теорема.

З а м е ч а н и е. Предположим, что $(\mathfrak{l}, \mathfrak{s})$ — алгебра одного из типов (i), (ii) или (iii). Тогда кривизна $K(S)$ в направлении сечения S равна 0 тогда и только тогда, когда S — абелево подпространство в $\mathfrak{e}^1$.

П р и м е р. Как частный случай примера I из § 2 рассмотрим пространства $SO(p+1)/SO(p)$ и $SO_0(p, 1)/SO(p)$, которые соот-

¹⁾ То есть абелева подалгебра в $\mathfrak{l}$, содержащаяся в $\mathfrak{e}$. — Прим. перев.

ветствуют друг другу при двойственности. Здесь линейная группа изотропии в точке o транзитивно действует на множестве двумерных подпространств касательного пространства в точке o . Значит, эти пространства имеют постоянную кривизну в двумерном направлении. В частности, для $p=2$ наши пространства суть двумерная сфера и двумерное неевклидово пространство Лобачевского.

Для сферы $SO(3)/SO(2)$ имеют место формулы

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

для геодезического треугольника с углами A, B, C и сторонами длин a, b, c . Для двумерного пространства Лобачевского $SO_0(2, 1)/SO(2)$ соответствующие формулы имеют вид

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin A} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin B} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin C},$$

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos A.$$

Поскольку $\operatorname{sh} iz = i \sin z$ и $\operatorname{ch} iz = \cos z$, эти две системы формул переходят друг в друга при подстановке $a \rightarrow ia, b \rightarrow ib, c \rightarrow ic$. Двойственность симметрических пространств дает общее объяснение этой формальной аналогии между сферической тригонометрией и неевклидовой тригонометрией.

§ 4. Симметрические пространства с полупростыми группами изометрий

Теорема 4.1. Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара. Предположим, что G полупроста и эффективно действует на факторпространстве $M = G/K$. Пусть Q — некоторая G -инвариантная риманова структура на M , и пусть R — соответствующий тензор кривизны. Тогда

- (i) $G = I_0(M)$ (как группы Ли);
- (ii) линейная подгруппа изотропии группы G в точке $o = \{K\}$ есть подгруппа Ли K^* в $GL(M_o)$, изоморфная группе K . Ее алгебра Ли $\mathfrak{k}^*$ состоит из всех эндоморфизмов пространства M_o , которые, будучи продолжены на смешанную тензорную алгебру над M_o как дифференцирования, перестановочные со свертываниями, аннулируют тензоры Q_o и R_o ;
- (iii) алгебра $\mathfrak{k}^*$ натянута на множество $\{R_o(X, Y) \mid X, Y \in M_o\}$.

Доказательство. Согласно предложению 3.5 гл. IV, существует единственный аналитический инволютивный автоморфизм σ группы G , такой, что $(K_\sigma)_0 \subset K \subset K_\sigma$. Здесь через K_σ обозначено множество неподвижных точек автоморфизма σ и через

$(K_\sigma)_0$ — компонента единицы группы K_σ . Пусть s_o — геодезическая симметрия многообразия G/K относительно точки o . Тогда, как доказано в гл. IV (предложение 3.4),

$$\sigma(g) = s_o g s_o \quad (g \in G). \quad (1)$$

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ — прямое разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G на собственные подпространства автоморфизма $(d\sigma)_e$, отвечающие собственным значениям $+1$ и -1 соответственно. Обозначим через Z центр группы G . Согласно лемме 5.1 гл. II, группа $\text{Ad}_G(K)$ аналитически изоморфна группе $K/K \cap Z$, которая равна K , так как G эффективна. Таким образом, группа K компактна и изоморфна линейной группе изотропии K^* . Пусть $G' = I_0(M)$, и пусть K' — (компактная) подгруппа группы G' , оставляющая точку o на месте. Согласно замечанию 2 после предложения 3.4 гл. IV, группа G есть замкнутая подгруппа в G' . Значит, $\mathfrak{g}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}'$ группы G' . Обозначим через $\tilde{\sigma}$ автоморфизм $g \rightarrow s_o g s_o$ группы G' . Пусть

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{k}' + \mathfrak{p}'$$

— разложение алгебры $\mathfrak{g}'$ на собственные подпространства автоморфизма $(d\tilde{\sigma})_e$, где $\mathfrak{k}'$ — алгебра Ли группы K' . Тогда $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}'$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$. Применим теперь теорему 1.1, пользуясь введенными там обозначениями, к паре $(\mathfrak{g}', (d\tilde{\sigma})_e)$, которая является эффективной ортогональной симметрической алгеброй Ли. Подпространство $(\mathfrak{p}')_0$ является абелевым идеалом в $\mathfrak{g}'$ и $\mathfrak{g}$ (лемма 1.3). Поскольку $\mathfrak{g}$ полупроста, $(\mathfrak{p}')_0 = \{0\}$. Значит, $(\mathfrak{k}')_0$ есть идеал алгебры $\mathfrak{g}'$, содержащийся в $\mathfrak{k}'$. Таким образом, $(\mathfrak{k}')_0 = \{0\}$ и $[\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'] = \mathfrak{k}'$. Так как $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ и $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$, то отсюда следует, что $\mathfrak{k}' = \mathfrak{k} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$, чем доказано (i). Далее, соотношение $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{k}$, в силу формулы для тензора кривизны (теорема 4.2 гл. IV), эквивалентно утверждению (iii). Наконец, для доказательства утверждения (ii) обозначим через $\tilde{\mathfrak{k}}$ алгебру Ли всех эндоморфизмов пространства M_o , которые, будучи продолжены на смешанную тензорную алгебру над M_o в качестве дифференцирований, перестановочных со свертываниями, аннулируют тензоры Q_o и R_o . Тогда $\mathfrak{k} \subset \tilde{\mathfrak{k}}$ и пространство $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{k}} + \mathfrak{p}$ является алгеброй Ли, если положить коммутатор $[T, X]$ для $T \in \tilde{\mathfrak{k}}$, $X \in \mathfrak{p}$ равным $T \cdot X$ (образ вектора X при эндоморфизме T). Как при доказательстве равенства $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{k}'$, видим, что $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \tilde{\mathfrak{k}}$. Значит, $\mathfrak{k} = \tilde{\mathfrak{k}}$, откуда следует (ii).

О п р е д е л е н и е. Пусть M — риманово глобально симметрическое пространство. Тогда M называется пространством *компактного типа* или *некомпактного типа* в соответствии с типом римановой симметрической пары $(I_0(M), K)$, где K — подгруппа изотропии группы $I_0(M)$ в некоторой точке многообразия M . Если

$(\mathfrak{g}, \theta)$ — соответствующая ортогональная симметрическая алгебра Ли, то говорят, что пространство M связано с $(\mathfrak{g}, \theta)$.

Предложение 4.2. Пусть M — односвязное риманово глобально симметрическое пространство. Тогда M является прямым произведением

$$M = M_0 \times M_- \times M_+,$$

где M_0 — евклидово пространство, M_- и M_+ — римановы глобально симметрические пространства компактного и некомпактного типа соответственно.

Доказательство. Пусть $G = I_0(M)$, и пусть K — подгруппа изотропии в некоторой точке o многообразия M . Тогда $M = G/K$. Обозначим через $(\tilde{G}, \varphi)$ универсальную накрывающую группу группы G и через $\tilde{K}$ — компоненту единицы группы $\varphi^{-1}(K)$. Тогда, если обозначить через ψ отображение $g\tilde{K} \rightarrow \varphi(g)K$ пространства $\tilde{G}/\tilde{K}$ на G/K , то пара $(\tilde{G}/\tilde{K}, \psi)$ является накрывающим многообразием для G/K . Поскольку M односвязно, $M = \tilde{G}/\tilde{K}$.

Обозначим через s инволютивный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G (и $\tilde{G}$), соответствующий автоморфизму $g \rightarrow s_0 g s_0$ группы G . Тогда $(\mathfrak{g}, s)$ — эффективная ортогональная симметрическая алгебра Ли. Разложим алгебру $\mathfrak{g}$ в соответствии с теоремой 1.1. Пусть $\tilde{G} = G_0 \times G_- \times G_+$ — соответствующее разложение группы $\tilde{G}$. Если $\tilde{K} = K_0 \times K_- \times K_+$ — разложение, индуцированное на $\tilde{K}$, то пространства $M_0 = G_0/K_0$, $M_- = G_-/K_-$ и $M_+ = G_+/K_+$ обладают требуемыми свойствами.

§ 5. Обозначения

Чтобы избежать многократного объяснения обозначений, мы отметим сейчас некоторые соглашения, которые останутся в силе для последующих глав настоящей книги.

Символом $\mathfrak{g}_0$ будет обозначаться произвольная полупростая алгебра Ли над $\mathbf{R}$, а буквой $\mathfrak{g}$ — ее комплексная оболочка. Пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ — некоторое разложение Картана алгебры $\mathfrak{g}_0$ ($\mathfrak{k}_0$ — подалгебра), и пусть u — компактная вещественная форма $\mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{p}_0$ алгебры $\mathfrak{g}$. Обозначим через B форму Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$. Ее ограничения на $\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$ и $u \times u$ суть формы Киллинга алгебр $\mathfrak{g}_0$ и u соответственно. Обозначим через σ и τ сопряжения алгебры $\mathfrak{g}$ относительно форм $\mathfrak{g}_0$ и u соответственно и положим $\theta = \sigma\tau = \tau\sigma$. Тогда θ — инволютивный автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$. Подпространства алгебры $\mathfrak{g}_0$ всегда будут отмечаться индексом 0 внизу. Соответствующее подпространство алгебры $\mathfrak{g}$ всегда будет обозначаться той же буквой, но без значка. В соответствии с этим

соглашением через $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{p}$ обозначаются собственные подпространства автоморфизма θ . Если e_0 — подпространство в $\mathfrak{p}_0$, то подпространство ie_0 в $i\mathfrak{p}_0$ будет часто обозначаться через e_* .

Присоединенные группы $\text{Int}(\mathfrak{g}_0)$, $\text{Int}(\mathfrak{u})$ являются группами эндоморфизмов пространств $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{u}$, которые, однако, можно продолжить до эндоморфизмов пространства $\mathfrak{g}$. Алгебры Ли групп $\text{Int}(\mathfrak{g}_0)$ и $\text{Int}(\mathfrak{u})$ будут отождествляться с подалгебрами $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{u}$ алгебры $\mathfrak{g}^R$. Аналитическая подгруппа в $\text{Int}(\mathfrak{g}_0)$, алгеброй Ли которой является $\mathfrak{f}_0$, будет обозначаться через K^* . Тогда K^* компактна и является подгруппой Ли в $\text{Int}(\mathfrak{u})$. В следующей главе мы увидим, что $K^* = \text{Int}(\mathfrak{g}_0) \cap \text{Int}(\mathfrak{u})$. Все три группы: K^* , $\text{Int}(\mathfrak{g}_0)$, $\text{Int}(\mathfrak{u})$, являются замкнутыми топологическими подгруппами Ли в $GL(\mathfrak{g}^R)$.

Пусть (G, K_1) и (U, K_2) — римановы симметрические пары, связанные с ортогональными симметрическими алгебрами Ли $(\mathfrak{g}_0, \theta)$ и $(\mathfrak{u}, \theta)$ соответственно. Вообще говоря, пространство G/K_1 (и аналогично U/K_2) обладает многими G -инвариантными римановыми структурами, не пропорциональными друг другу. Однако всем этим структурам отвечает одна и та же риманова связность. Поэтому мы будем всегда считать (если не оговорено противное), что на G/K_1 задана однозначно определенная G -инвариантная риманова структура, индуцированная ограничением формы Киллинга B на $\mathfrak{p}_0 \times \mathfrak{p}_0$. Аналогично на пространстве U/K_2 будет рассматриваться однозначно определенная U -инвариантная риманова структура, индуцированная ограничением формы — B на $i\mathfrak{p}_0 \times i\mathfrak{p}_0$.

§ 6. Ранг симметрического пространства

Определение. Риманово многообразие называется *плоским*, если его тензор кривизны тождественно равен 0.

Определение. Пусть M — риманово глобально симметрическое пространство. *Рангом* пространства M называется максимальная размерность плоского вполне геодезического подмногообразия в M .

Предложение 6.1. Пусть M — риманово глобально симметрическое пространство компактного или некомпактного типа. Пусть o — некоторая точка в M . Как обычно, отождествим касательное пространство M_o с подпространством $\mathfrak{p}_0$ (или $i\mathfrak{p}_0$) алгебры Ли группы $I(M)$. Пусть $\mathfrak{z}_0$ — тройная система Ли, содержащаяся в M_o . Тогда вполне геодезическое подмногообразие $S = \text{Exp } \mathfrak{z}_0$ (с дифференцируемой структурой, определенной в теореме 7.2 гл. IV) является плоским в том и только том случае, когда $\mathfrak{z}_0$ — абелево подпространство.

Доказательство. Как мы видели в § 7 гл. IV, многообразие S является глобально симметрическим и может быть

представлено в виде $S = G'/K'$, где G' — аналитическая подгруппа группы $I(M)$, инвариантная относительно автоморфизма $g \rightarrow s_0 g s_0$ группы $I(M)$. Тензор кривизны многообразия S дается формулой из теоремы 4.2 гл. IV. Эта формула была выведена в предположении, что группа изотропии связна. Однако переход от группы K' к ее компоненте единицы сводится лишь к переходу от многообразия S к накрывающему S многообразию, которое локально изометрично многообразию S . Теперь предложение непосредственно следует из формулы (1) § 3.

Теорема 6.2. Пусть M — риманово глобально симметрическое пространство компактного или некомпактного типа. Обозначим через l ранг пространства M и через A и A' — два плоских вполне геодезических подмногообразия многообразия M размерности l .

(i) Пусть $q \in A$, $q' \in A'$. Тогда существует такой элемент $x \in I_0(M)$, что $x \cdot A = A'$, $x \cdot q = q'$.

(ii) Пусть $X \in M_q$. Тогда существует такой элемент $k \in I_0(M)$, что $k \cdot q = q$ и $dk(X) \in A_q$.

(iii) Многообразия A и A' являются замкнутыми топологическими подпространствами в M .

Доказательство этой теоремы мы начнем с некоторых общих замечаний о вполне геодезических подмногообразиях. Пусть M — некоторое многообразие, S — связное подмногообразие. Пусть X и Y — такие векторные поля на M , что $X_s, Y_s \in S_s$ для каждого $s \in S$. Тогда из предложения 3.2 гл. I легко следует, что семейства $s \rightarrow X_s$ ($s \in S$) и $s \rightarrow Y_s$ ($s \in S$) являются векторными полями на S . Обозначим эти векторные поля через $\bar{X}$ и $\bar{Y}$. Из предложения 3.3 гл. I следует, что $[X, Y]_s \in S_s$ для всех $s \in S$ и $[X, Y] = [\bar{X}, \bar{Y}]$.

Предположим теперь, что многообразие M связно и обладает римановой структурой g . Обозначим через $\bar{g}$ индуцированную риманову структуру на S . Обозначим через ∇ и $\bar{\nabla}$ соответствующие римановы связности. Пусть X, Y, Z — такие векторные поля на M , что $X_s, Y_s, Z_s \in S_s$ для всех $s \in S$. Тогда из формулы (2) § 9 гл. I заключаем, что

$$g(X, \nabla_Z(Y))(s) = \bar{g}(\bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{Z}}(\bar{Y}))(s). \quad (1)$$

Предположим теперь, что S является вполне геодезическим. Тогда, в силу теоремы 14.5 гл. I, $\nabla_Z(Y)_s \in S_s$ ($s \in S$). Поэтому из равенства (1) вытекает, что

$$\bar{\nabla}_{\bar{Z}}(\bar{Y}) = (\nabla_Z(Y))^- . \quad (2)$$

Обозначим через R и $\bar{R}$ тензоры кривизны многообразий M и S соответственно. Тогда, в силу (2), имеем

$$\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y}) \cdot \bar{Z} = (R(X, Y) \cdot Z)^- \quad (3)$$

и кривизна в направлении двумерного подпространства пространства S_s у многообразий M и S одна и та же.

После этих предварительных замечаний вернемся к доказательству теоремы 6.2. Пусть q — некоторая точка в плоском вполне геодезическом подпространстве A пространства M . Как обычно, отождествим касательное пространство M_q с подпространством алгебры Ли $\mathfrak{l}$ группы $I(M)$. Пусть X и Y — два вектора в касательном пространстве A_q . В силу предшествующих замечаний, кривизна многообразия M в точке q в направлении плоского сечения, натянутого на векторы X и Y , равна 0. Применяя формулу (1) из § 3, получаем отсюда, что $[X, Y] = 0$, где коммутатор берется в алгебре Ли $\mathfrak{l}$. В силу предложения 6.1, A_q является максимальным абелевым подпространством в M_q . Обозначим через G' аналитическую подгруппу группы $I(M)$, соответствующую подалгебре A_q алгебры $\mathfrak{l}$. Обозначим через K' подгруппу в G' , оставляющую точку q неподвижной. Вполне геодезическое подмногообразие $\text{Exp}_q(A_q)$ из предложения 6.1 совпадает с орбитой $G' \cdot q$, дифференцируемая структура на которой взята с многообразия G'/K' . Рассмотрим автоморфизм $\sigma: g \rightarrow s_q g s_q$ группы $I(M)$, где через s_q обозначена симметрия пространства M относительно q . Тогда $M_q = \{X \in \mathfrak{l} \mid d\sigma(X) = -X\}$, так что $\sigma(g) = g^{-1}$ для $g \in G'$. Это соотношение имеет место также на замыкании подгруппы G' , абелева алгебра Ли которого содержится, следовательно, в M_q . С другой стороны, эта алгебра Ли содержит A_q , так как G' является подгруппой Ли своего замыкания. В силу максимальной подпространства A_q , подгруппа G' замкнута и, следовательно, несет на себе относительную топологию группы $I(M)$. Значит, группа K' является замкнутой подгруппой подгруппы изотропии группы $I(M)$ в точке q и поэтому компактна. Применяя теперь предложение 4.4 гл. II, получаем, что подмногообразие $\text{Exp}_q(A_q)$ есть замкнутое топологическое подпространство многообразия M . Тождественное отображение многообразия A в это подмногообразие является поэтому непрерывным и, в силу леммы 14.1 главы I, дифференцируемым. Значит, можно утверждать, что $\text{Exp}_q(A_q)$ и A совпадают как подмногообразия многообразия M . Тем самым доказано (iii), а утверждения (i) и (ii) сведены к следующей лемме (обозначения см. в § 5).

Лемма 6.3. Пусть $\mathfrak{a}_*$ и $\mathfrak{a}'_*$ — два максимальных абелевых подпространства в $\mathfrak{p}_*$. Тогда

(i) существует элемент $H \in \mathfrak{a}_*$, централизатор которого в $\mathfrak{p}_*$ совпадает с $\mathfrak{a}_*$;

- (ii) существует такой элемент $k \in K^*$, что $k \cdot \mathfrak{a}_* = \mathfrak{a}'_*$;
 (iii) $\mathfrak{p}_* = \bigcup_{k \in K^*} k \cdot \mathfrak{a}_*$.

Доказательство. Пусть $P_* = \exp \mathfrak{p}_*$. Тогда $\text{Int}(u) = P_* K^*$, так как геодезические $\exp tX$ ($t \in \mathbb{R}$) покрывают многообразие $\text{Int}(u)/K^*$, когда X изменяется в $\mathfrak{p}_*$. Обозначим через $\tilde{\theta}$ инволютивный автоморфизм группы $\text{Int}(u)$, соответствующий ограничению автоморфизма θ на u . Тогда

$$\tilde{\theta}((\exp X)k) = (\exp(-X))k,$$

откуда

$$P_* = \{g\tilde{\theta}g^{-1} \mid g \in \text{Int}(u)\}.$$

Следовательно, P_* компактно и замкнуто в $\text{Int}(u)$.

Обозначим через A_* замыкание множества $\exp \mathfrak{a}_*$ в $\text{Int}(u)$. Тогда A_* — тор, содержащийся в P_* . Поскольку $\tilde{\theta}(a) = a^{-1}$ для каждого $a \in A_*$, алгебра Ли подгруппы A_* содержится в $\mathfrak{p}_*$. Будучи абелевой, эта алгебра Ли должна совпадать с $\mathfrak{a}_*$. Выберем такой $H \in \mathfrak{a}_*$, чтобы однопараметрическая подгруппа $\exp tH$ ($t \in \mathbb{R}$) была плотной в A_* ¹). Тогда централизатор элемента H в $\mathfrak{p}_*$ есть $\mathfrak{a}_*$.

Для доказательства утверждения (iii) возьмем произвольный элемент $X \in \mathfrak{p}_*$. Функция $k \rightarrow B(H, k \cdot X)$ есть непрерывная функция на компактной группе K_* и принимает минимальное значение в некоторой точке $k = k_0$. Поэтому для $T \in \mathfrak{k}_0$ имеем

$$\left\{ \frac{d}{dt} B(H, (\exp tT)k_0 \cdot X) \right\}_{t=0} = 0.$$

Это равенство можно записать в виде

$$B(H, [T, k_0 \cdot X]) = 0.$$

Следовательно, $B([k_0 \cdot X, H], T) = 0$ для всех $T \in \mathfrak{k}_0$. Поскольку $[k_0 \cdot X, H] \in \mathfrak{k}_0$, отсюда следует, что $[k_0 \cdot X, H] = 0$ и, в силу (i), что $k_0 \cdot X \in \mathfrak{a}_*$. Тем самым доказано (iii).

Наконец, применяя (iii) к $\mathfrak{a}'_*$, получаем такой $k \in K^*$, что $H \in k \cdot \mathfrak{a}'_*$. Каждый элемент из $k \cdot \mathfrak{a}'_*$ перестановочен с H . Поскольку $\mathfrak{a}_*$ — централизатор элемента H в $\mathfrak{p}_*$, отсюда следует, что $k \cdot \mathfrak{a}'_* \subseteq \mathfrak{a}_*$. Доказательство леммы закончено.

Дадим теперь два других приложения леммы 6.3.

Теорема 6.4. Пусть G — связная компактная группа Ли. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G и через $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{t}'$ — две максимальные абелевы подалгебры в $\mathfrak{g}$. Тогда

¹) Существование такого элемента H вытекает из теоремы Кронекера; см. Бурбаки [4], гл. VII, § 1. — Прим. перев.

- (i) существует элемент $H \in \mathfrak{t}$, централизатор которого в $\mathfrak{g}$ совпадает с $\mathfrak{t}$;
- (ii) существует такой элемент $g \in G$, что $\text{Ad}(g)\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$.
- (iii) $\mathfrak{g} = \bigcup_{g \in G} \text{Ad}(g)\mathfrak{t}$.

Доказательство. Группу G можно записать в виде $G \times G/G^*$, где G^* — диагональ в $G \times G$. Если G полупроста, то пара $(G \times G, G^*)$ есть риманова симметрическая пара компактного типа с инволютивным автоморфизмом $\sigma: (x, y) \rightarrow (y, x)$ группы $G \times G$. В этом случае теорема 6.4 является частным случаем леммы 6.3. Если G не полупроста, то нужно несколько усилить лемму 6.3. В доказательстве леммы 6.3 не была использована полупростота алгебры $\mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_*$, а форму B можно заменить любой отрицательно определенной билинейной формой Q на $\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}$, удовлетворяющей условию инвариантности

$$Q(X, [Y, Z]) = Q([X, Y], Z)$$

для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{u}$. В случае римановой симметрической пары $(G \times G, G^*)$ такая билинейная форма Q существует ввиду компактности группы G . Значит, теорема 6.4 справедлива для любой связной компактной группы Ли G .

Теорема 6.5. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ — две подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда существует такой автоморфизм¹⁾ σ алгебры $\mathfrak{g}$, что $\sigma\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$.

Доказательство. Каждая подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ определяет компактную вещественную форму $\mathfrak{u}$ алгебры $\mathfrak{g}$, такую, что $i\mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{u}$ (теорема 6.3 гл. III). Обозначим через $\mathfrak{u}_1$ и $\mathfrak{u}_2$ компактные вещественные формы алгебры $\mathfrak{g}$, полученные таким способом из $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ соответственно. Тогда существует автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, переводящий $\mathfrak{u}_1$ в $\mathfrak{u}_2$. Поэтому, не уменьшая общности, можно допустить, что $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2$. Тогда подпространства $i\mathfrak{h}_1^*$ и $i\mathfrak{h}_2^*$ являются максимальными абелевыми подалгебрами в $\mathfrak{u}_1$. Согласно теореме 6.4, эти подалгебры сопряжены при помощи некоторого элемента $\sigma \in \text{Int}(\mathfrak{u}_1)$. Но σ однозначно продолжается до автоморфизма алгебры $\mathfrak{g}$, и подалгебры $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ переводятся друг в друга этим автоморфизмом.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В § 2 было показано, что алгебра $\mathfrak{so}(1, 3)$ изоморфна $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^R$. Выразить этот изоморфизм в явном виде, например

¹⁾ На самом деле из доказательства теоремы видно, что в качестве σ можно взять внутренний автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$. — Прим. перев.

при помощи стереографической проекции сферы S^2 на комплексную плоскость.

2. Пусть G — связная группа Ли, содержащая компактную подгруппу размерности, большей или равной 1, и имеющая центр $\{e\}$. Показать, что G обладает такой подгруппой H , что (G, H) — симметрическая пара.

3. Сформулировать и доказать свойство единственности для разложения из теоремы 1.1.

4. Пусть M — риманово глобально симметрическое пространство, $I(M)$ — его группа изометрий. Доказать, что (i) M — пространство компактного типа тогда и только тогда, когда группа $I(M)$ полупроста и компактна; (ii) M — пространство некомпактного типа тогда и только тогда, когда алгебра Ли группы $I(M)$ полупроста и не содержит ненулевых компактных идеалов.

ЗАМЕЧАНИЯ

Результаты § 1—4 по большей части принадлежат Э. Картану [16].

Сопряженность максимальных торов [или, точнее, теорема 6.4 (iii)] была впервые доказана Г. Вейлем [1], гл. IV, теорема 1. Простое доказательство, данное здесь, принадлежит Ханту [2], причем это доказательство применимо и к лемме 6.3, впервые доказанной Э. Картаном в [10]. Теорема о сопряженности подалгебр Картана (теорема 6.5) была обобщена и усилена Шевалле [6], гл. VI, § 4, теорема 4.

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА НЕКОМПАКТНОГО ТИПА

В предыдущей главе мы имели дело с аналогиями между двумя типами симметрических пространств и с их общими свойствами. Теперь мы будем изучать каждый из этих типов отдельно, причем начнем с некомпактного типа.

В § 1 показывается, что для заданной некомпактной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ над $\mathbf{R}$ существует единственное риманово глобально симметрическое пространство M некомпактного типа, такое, что $I(M)$ имеет алгебру Ли $\mathfrak{g}_0$. Это пространство M диффеоморфно евклидову пространству. § 2 содержит доказательство теоремы о сопряженности максимальных компактных подгрупп, принадлежащей Э. Картану. В последующих параграфах рассматриваются вопросы, связанные с разложением Ивасава $G = KAN$ полупростой связной группы Ли G на подгруппу K , алгебра Ли которой является максимальной компактной подалгеброй алгебры Ли группы G , абелеву группу A и нильпотентную группу N . Группа N отдельно изучается в § 4. Особенно поучительным является доказательство теоремы 4.7, принадлежащее Хариш-Чандра.

§ 1. Разложение полупростой группы Ли

Пусть $\mathfrak{g}_0$ — некомпактная полупростая алгебра Ли над $\mathbf{R}$, и пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ — разложение Картана алгебры $\mathfrak{g}_0$. Отображение $\theta: T + X \rightarrow T - X$ ($T \in \mathfrak{k}_0$, $X \in \mathfrak{p}_0$) является инволютивным автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}_0$, и пара $(\mathfrak{g}_0, \theta)$ есть ортогональная симметрическая алгебра Ли некомпактного типа. Напомним, что пара (G, K) называется связанной с алгеброй $(\mathfrak{g}_0, \theta)$, если G — связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_0$, а K — подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\mathfrak{k}_0$. Такая пара, по определению, является парой некомпактного типа. Эта пара называется римановой симметрической парой, если K замкнута, $\text{Ad}_G(K)$ компактна и существует такой инволютивный аналитический автоморфизм $\tilde{\theta}$ группы G , что $(K_{\tilde{\theta}})_0 \subset K \subset K_{\tilde{\theta}}$. Этот автоморфизм $\tilde{\theta}$ обязательно является единственным и $d\tilde{\theta} = \theta$ (предложение 3.5 гл. IV). Наконец, риманово глобально симметрическое пространство называется пространством некомпактного типа, если пара $(I_0(M), H)$ есть пара некомпактного типа, где H — подгруппа изотропии группы $I_0(M)$ в некоторой точке $o \in M$.

Теорема 1.1. Сохраняя введенные обозначения, предположим, что (G, K) — некоторая пара, связанная с $(\mathfrak{g}_0, \theta)$. Тогда

(i) подгруппа K связна, замкнута и содержит центр Z группы G . Далее, K компактна тогда и только тогда, когда центр Z конечен;

(ii) существует инволютивный аналитический автоморфизм $\tilde{\theta}$ группы G , множество неподвижных точек которого совпадает с K и дифференциал которого в точке e равен θ . Пара (G, K) является римановой симметрической парой;

(iii) отображение $\varphi: (X, k) \rightarrow (\exp X)k$ является диффеоморфизмом многообразия $\mathfrak{p}_0 \times K$ на группу G , и отображение Exp является диффеоморфизмом пространства $\mathfrak{p}_0$ на глобально симметрическое пространство G/K .

Обозначим через Ad и ad присоединенные представления группы G и алгебры $\mathfrak{g}_0$ соответственно. Прежде чем переходить к теореме 1.1, докажем простую лемму.

Лемма 1.2. Пусть (X_i) — базис пространства $\mathfrak{p}_0$, ортонормированный по отношению к B , и пусть (T_α) — базис пространства $\mathfrak{k}_0$, ортонормированный по отношению к $-B$. В базисе (X_i) , (T_α) алгебры $\mathfrak{g}_0$ эндоморфизм $\text{ad } X$ ($X \in \mathfrak{p}_0$) выражается симметрической матрицей, а $\text{ad } T$ ($T \in \mathfrak{k}_0$) выражается кососимметрической матрицей.

Доказательство. Мы можем написать

$$\text{ad } X (X_j) = \sum_{\alpha} a_{\alpha j} T_{\alpha}, \quad \text{ad } X (T_{\alpha}) = \sum_j a_{j\alpha} X_j$$

для подходящих вещественных чисел $a_{\alpha j}$, $a_{k\alpha}$. Здесь

$$a_{\alpha j} = -B([X, X_j], T_{\alpha}) = B(X_j, [X, T_{\alpha}]) = a_{j\alpha},$$

так что $\text{ad } X$ выражается симметрической матрицей. Аналогично имеем

$$\text{ad } T (X_j) = \sum_k b_{kj} X_k, \quad \text{ad } T (T_{\alpha}) = \sum_{\beta} c_{\beta\alpha} T_{\beta},$$

где b_{kj} и $c_{\beta\alpha}$ — вещественные числа. Здесь

$$b_{kj} = B([T, X_j], X_k) = -B(X_j, [T, X_k]) = -b_{jk},$$

$$c_{\beta\alpha} = -B([T, T_{\alpha}], T_{\beta}) = B(T_{\alpha}, [T, T_{\beta}]) = -c_{\beta\alpha},$$

так что $\text{ad } T$ выражается кососимметрической матрицей.

Переходя теперь к доказательству теоремы 1.1, обозначим через K_0 компоненту единицы группы K . Тогда, согласно предложению 3.6 гл. IV, K_0 замкнута в G , факторпространство G/K_0 является римановым локально симметрическим и $\pi(\exp X) = \text{Exp } X$ для $X \in \mathfrak{p}_0$, если обозначить через π естественное отображение группы G на G/K_0 . Значит, G/K_0 полно и, следовательно, Exp

отображает $\mathfrak{p}_0$ на G/K_0 . Отсюда следует, что φ отображает $\mathfrak{p}_0 \times K_0$ на G . Для доказательства того, что φ взаимно однозначно на $\mathfrak{p}_0 \times K$, предположим, что $X_1, X_2 \in \mathfrak{p}_0, k_1, k_2 \in K$, причем

$$(\exp X_1) k_1 = (\exp X_2) k_2. \quad (1)$$

Применяя Ad к этому соотношению, получим

$$e^{\text{ad } X_1} \circ \text{Ad}(k_1) = e^{\text{ad } X_2} \circ \text{Ad}(k_2). \quad (2)$$

Разложение $m = po$ невырожденной матрицы m , где p — симметрическая положительно определенная, а o — ортогональная матрица, является единственным. Поэтому из формулы (2) следует, что

$$e^{\text{ad } X_1} = e^{\text{ad } X_2},$$

$$\text{Ad}(k_1) = \text{Ad}(k_2).$$

Экспоненциальное отображение является взаимно однозначным на множестве симметрических матриц. Значит, $\text{ad } X_1 = \text{ad } X_2$ и $X_1 = X_2$, поскольку $\mathfrak{g}_0$ имеет центр $\{0\}$. Из формулы (1) следует, что $k_1 = k_2$, так что φ взаимно однозначно на $\mathfrak{p}_0 \times K$. Так как мы доказали, что $\varphi(\mathfrak{p}_0 \times K_0) = \varphi(\mathfrak{p}_0 \times K)$, то заключаем отсюда, что $K_0 = K$. Обозначим теперь, как обычно, через K^* аналитическую подгруппу в $\text{Int}(\mathfrak{g}_0)$ с алгеброй Ли $\mathfrak{k}_0$. Тогда пара $(G, \text{Ad}^{-1}(K^*))$ связана с $(\mathfrak{g}_0, \theta)$. Из доказанного выше следует, что группа $\text{Ad}^{-1}(K^*)$ связна. Так как ее алгеброй Ли является $\mathfrak{k}_0$, она должна совпадать с K . Значит, $Z \subset K$. Поскольку $K^* = K/Z$ компактна, а группа Z дискретна (§ 2 гл. II), то группа K компактна тогда и только тогда, когда Z конечна.

Автоморфизм θ алгебры $\mathfrak{g}_0$ индуцирует автоморфизм Θ универсальной накрывающей группы $\tilde{G}$ группы G , такой, что $d\Theta = \theta$. Неподвижные точки автоморфизма Θ составляют подгруппу $\tilde{K}$, которая, по доказанному, должна содержать центр $\tilde{Z}$ группы $\tilde{G}$. Ядро накрывающего отображения группы $\tilde{G}$ на G является дискретным нормальным делителем N в $\tilde{G}$ и поэтому должно содержаться в $\tilde{Z}$. Тогда автоморфизм $\tilde{\theta}$ группы $G = \tilde{G}/N$, индуцированный автоморфизмом Θ , превращает (G, K) в риманову симметрическую пару. Используя (i), видим, что множество неподвижных точек автоморфизма $\tilde{\theta}$ совпадает с K .

Поскольку φ взаимно однозначно, отображение Exp есть взаимно однозначное дифференцируемое отображение пространства $\mathfrak{p}_0$ на G/K . Для доказательства того, что оно регулярно (и, значит, является диффеоморфизмом), достаточно показать, в силу формулы для $d\text{Exp}_X$ (теорема 4.1 гл. IV), что

$$\det \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T_X)^n}{(2n+1)!} \right) \neq 0 \quad \text{для } X \in \mathfrak{p}_0. \quad (3)$$

Соотношения

$$\begin{aligned} B(T_X Y, Z) &= B(Y, T_X Z), \\ B(T_X Y, Y) &= -B([X, Y], [X, Y]) \geq 0, \end{aligned}$$

справедливые для $X, Y, Z \in \mathfrak{p}_0$, показывают, что эндоморфизм T_X является симметрическим и положительно определенным по отношению к B . Отсюда очевидно, что имеет место (3).

Остается только доказать, что φ всюду регулярно. Касательный вектор общего вида к $\mathfrak{p}_0 \times K$ в точке (X, k) является парой $(Y, dL_k \cdot T)$, где $Y \in \mathfrak{p}_0$, $T \in \mathfrak{k}_0$ и через L_x обозначен левый сдвиг на элемент x группы.

Поскольку

$$\varphi(X + tY, k) = \exp(X + tY) k = k \exp(\operatorname{Ad}(k^{-1})(X + tY))$$

и

$$\varphi(X, k \exp tT) = (\exp X) k (\exp tT),$$

из теоремы 1.7 гл. II следует, что

$$d\varphi_{(X, k)}(Y, dL_k \cdot T) = dL_{(\exp X) k} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\operatorname{ad} X'}}{\operatorname{ad} X'} (Y') + T \right), \quad (4)$$

где $X' = \operatorname{Ad}(k^{-1})X$, $Y' = \operatorname{Ad}(k^{-1})Y$. Составляющая вектора $(1 - e^{-\operatorname{ad} X'}) (\operatorname{ad} X')^{-1}(Y')$ в пространстве $\mathfrak{p}_0$ равна

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T_{X'})^n}{(2n+1)!} (Y')$$

и, в силу формулы (3), обращается в 0 только при $Y' = 0$. Следовательно, правая часть формулы (4) обращается в 0 только при $T = Y = 0$. Отсюда видно, что φ регулярно, и доказательство теоремы 1.1 закончено.

Следствие 1.3. Пусть M и M' — два римановых глобально симметрических пространства некомпактного типа, таких, что группы $I(M)$ и $I(M')$ имеют одну и ту же алгебру Ли $\mathfrak{g}_0$. Как обычно (гл. V, § 5), предположим, что римановы структуры на M и M' порождены формой Киллинга алгебры $\mathfrak{g}_0$. Тогда M и M' изометричны.

Действительно, пространства M и M' строятся по двум разложениям Картана алгебры $\mathfrak{g}_0$. Если эти разложения Картана совпадают, то следствие вытекает из теоремы 1.1. Далее, любые два разложения Картана алгебры $\mathfrak{g}_0$ сопряжены при помощи внутреннего автоморфизма σ алгебры $\mathfrak{g}_0$. При помощи σ легко установить изометрию между M и M' .

Если алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ проста (или, более общим образом, если все ее простые сомножители некомпактны), то по теореме 4.1 гл. V пространство $M = \operatorname{Int}(\mathfrak{g}_0)/K^*$ является единственным римановым глобально симметрическим пространством, для которого

$I(M)$ имеет алгебру Ли $\mathfrak{g}_0$. Для компактных полупростых алгебр Ли положение является совершенно иным, как мы увидим в следующей главе.

Пусть $\mathfrak{z}_0$ — тройная система Ли, содержащаяся в $\mathfrak{p}_0$. Тогда, в силу теоремы 7.2 гл. IV и теоремы 1.1, $\text{Exp } \mathfrak{z}_0$ есть замкнутое вполне геодезическое подмногообразие в G/K . Поэтому можно применить теорему 14.6 гл. I и получить следующее обобщение теоремы 1.1.

Теорема 1.4. *В обозначениях теоремы 1.1 пусть $\mathfrak{z}_0$ — тройная система Ли, содержащаяся в $\mathfrak{p}_0$, и пусть $\mathfrak{t}_0$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{z}_0$ в $\mathfrak{p}_0$. Снабдим $S_0 = \text{exp } \mathfrak{z}_0$ и $T_0 = \text{exp } \mathfrak{t}_0$ относительной топологией группы G . Тогда G допускает топологическое разложение*

$$G = S_0 \cdot T_0 \cdot K.$$

Доказательство. В силу теоремы 14.6 гл. I, отображение $(X, Y) \rightarrow \tau(\text{exp } X) \cdot \text{Exp } Y$ ($X \in \mathfrak{z}_0$, $Y \in \mathfrak{t}_0$) есть непрерывное взаимно однозначное отображение пространства $\mathfrak{z}_0 \times \mathfrak{t}_0$ на G/K . Каждое ограниченное множество в M является образом ограниченного множества в $\mathfrak{z}_0 \times \mathfrak{t}_0$ (следствие 13.2 (i) гл. I). Значит, это отображение является гомеоморфизмом. Если сформулировать этот факт в терминах группы G и использовать теорему 1.1, то получится наша теорема.

§ 2. Максимальные компактные подгруппы и их сопряженность

Символы $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{p}_0$, G и K будут иметь тот же смысл, что в § 1.

В главе III было доказано, что все разложения Картана полупростой алгебры Ли над $\mathbf{R}$ сопряжены при помощи внутренних автоморфизмов. Используя результаты из дифференциальной геометрии, мы докажем теперь более сильную теорему, а именно докажем, что все максимальные компактно вложенные подалгебры полупростой алгебры Ли над $\mathbf{R}$ сопряжены при помощи внутренних автоморфизмов. Следовательно, каждая максимальная компактно вложенная подалгебра $\mathfrak{l}$ полупростой алгебры Ли $\mathfrak{l}$ входит в некоторое разложение Картана, и ее ортогональное дополнение $\mathfrak{e}$ по отношению к форме Киллинга алгебры $\mathfrak{l}$ удовлетворяет соотношению $[\mathfrak{e}, \mathfrak{e}] \subset \mathfrak{u}$.

Теорема 2.1. *Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара некомпактного типа. Пусть K_1 — некоторая компактная подгруппа в G . Тогда существует такой элемент $x \in G$, что $x^{-1}K_1x \subset K$.*

Доказательство. Соотношение $x^{-1}K_1x \subset K$ означает, что xK является неподвижной точкой при действии группы K_1 на фактор-

пространстве G/K . Так как пространство G/K есть односвязное риманово многообразие отрицательной кривизны, то существование такой точки обеспечивается теоремой 13.5 гл. I.

Теорема 2.2.

(i) Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара некомпактного типа. Тогда K обладает единственной максимальной компактной подгруппой K' , и эта подгруппа является максимальной компактной в G .

(ii) Все максимальные компактные подгруппы связной полупростой группы Ли G связны и сопряжены при помощи внутренних автоморфизмов группы G .

(iii) Пусть K' — некоторая максимальная компактная подгруппа связной полупростой группы Ли G . Тогда существует такое подмногообразие E в G , диффеоморфное евклидову пространству, что отображение $(e, k) \rightarrow ek$ является диффеоморфизмом многообразия $E \times K'$ на G .

Доказательство. Группа $\text{Ad}_G(K)$ компактна и имеет алгебру Ли $\mathfrak{k}_0$. Значит, $\mathfrak{k}_0$ — компактная алгебра Ли. Согласно предложению 6.6 гл. II, $\mathfrak{k}_0$ можно записать в виде прямой суммы $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_s + \mathfrak{k}_a$, где $\mathfrak{k}_s$ и $\mathfrak{k}_a$ — полупростой и абелев идеалы соответственно. Обозначим через K_s и K_a соответствующие аналитические подгруппы в K . Группа K_a является прямым произведением $K_a = T \times V$ аналитических подгрупп T, V группы G , где T — тор, а V аналитически изоморфна евклидову пространству. Положим теперь

$$K' = K_s T = \{kt \mid k \in K_s, t \in T\}.$$

Вследствие теоремы 6.9 гл. II группа K_s , а значит и группа K' , компактна. Элементы групп K' и V перестановочны друг с другом. Группа $K' \cap V$ есть компактная подгруппа евклидовой группы V и, значит, $K' \cap V = \{e\}$. Отсюда следует, что $K = K' \times V$ (прямое произведение) и что K' — единственная максимальная компактная подгруппа в K . Сопоставляя это с теоремой 2.1, видим, что каждая компактная подгруппа группы G сопряжена некоторой подгруппе в K' . Отсюда следуют предложения (i) и (ii).

Рассмотрим теперь множество

$$E = \{(\exp X) v \mid X \in \mathfrak{p}_0, v \in V\}.$$

Так как $\mathfrak{p}_0 \times V$ есть подмногообразие в $\mathfrak{p}_0 \times K$, то из теоремы 1.1 следует, что E является подмногообразием в G , диффеоморфным евклидову пространству. Наконец, отображения

$$\begin{aligned} ((\exp X) v, k) &\rightarrow (\exp X, vk) \rightarrow (\exp X) kv, \\ E \times K' &\rightarrow (\exp \mathfrak{p}_0) \times K \rightarrow G \end{aligned}$$

дают нужный нам диффеоморфизм многообразия $E \times K'$ на G .

§ 3. Разложение Ивасава

Это разложение получается путем комбинации разложения Картана полупростой алгебры Ли и разложения ее комплексной оболочки на корневые подпространства.

Лемма 3.1. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{g}_k$ — некоторая компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$, и пусть η — сопряжение алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{g}_k$. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, инвариантная относительно η . Обозначим через Δ множество ненулевых корней алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{h}$ и положим $\mathfrak{h}^* = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}H_\alpha$. Тогда

$$(i) \mathfrak{h}^* \subset i\mathfrak{g}_k;$$

(ii) существует такой вектор $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, что для всех $\alpha \in \Delta$

$$E_\alpha - E_{-\alpha}, i(E_\alpha + E_{-\alpha}) \in \mathfrak{g}_k,$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha.$$

Доказательство. Форма Киллинга B алгебры $\mathfrak{g}$ отрицательно определена на $\mathfrak{g}_k \times \mathfrak{g}_k$ и, кроме того,

$$B(X, \eta X) < 0 \text{ для } X \neq 0 \text{ в } \mathfrak{g}.$$

Для каждого $\alpha \in \Delta$ можно определить комплексную линейную функцию α^η на $\mathfrak{h}$ формулой

$$\alpha^\eta(H) = \overline{\alpha(\eta \cdot H)} \quad (H \in \mathfrak{h}),$$

где черта означает переход к сопряженному комплексному числу. Тогда для $Y \in \mathfrak{g}^\alpha$, $H \in \mathfrak{h}$ получаем

$$[\eta H, \eta Y] = \eta[H, Y] = \overline{\alpha(H)} \eta Y = \alpha^\eta(\eta H) \eta Y,$$

откуда видно, что $\alpha^\eta \in \Delta$. Далее, если $H \in \mathfrak{h}$, то

$$B(\eta H_\alpha, H) = \overline{B(H_\alpha, \eta H)} = \overline{\alpha(\eta H)} = \alpha^\eta(H) = B(H_{\alpha^\eta}, H),$$

так что

$$\eta H_\alpha = H_{\alpha^\eta}.$$

Отсюда видно, что $\mathfrak{h}^*$ инвариантно относительно η . Поскольку $H = \frac{1}{2}(H + \eta H) + \frac{1}{2}(H - \eta H)$, существует прямое разложение $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}^+ + \mathfrak{h}^-$, где $\eta(H) = \pm H$ для $H \in \mathfrak{h}^\pm$. Здесь $\mathfrak{h}^+ = \{0\}$. Действительно, если $H \neq 0$ лежит в $\mathfrak{h}^+$, то $B(H, H) = B(H, \eta H) < 0$, а это противоречит тому, что форма B на $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$ положительно определена (теорема 4.4 гл. III). Тем самым доказаны утверждение (i) и равенство $\alpha^\eta = -\alpha$.

Для доказательства утверждения (ii) мы превратим двойственное к $\mathfrak{h}^*$ пространство в упорядоченное векторное простран-

ство. Так как каждый корень $\alpha \in \Delta$ принимает на $\mathfrak{h}^*$ вещественные значения, то Δ станет упорядоченным множеством. Обозначим через Δ^+ множество положительных корней. Поскольку $\alpha(H_\alpha) > 0$, для каждого $\alpha \in \Delta^+$ можно выбрать такой вектор $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, что

$$B(E_\alpha, \eta E_\alpha) = -\frac{2}{\alpha(H_\alpha)}.$$

Так как $\alpha^\eta = -\alpha$, то легко видеть, что $\eta E_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ для $\alpha \in \Delta^+$. Положим $E_{-\alpha} = -\eta E_\alpha$ для $\alpha \in \Delta^+$. Тогда $\eta E_\alpha = -E_{-\alpha}$ для всех $\alpha \in \Delta$ и, следовательно, элементы $E_\alpha - E_{-\alpha}$ и $i(E_\alpha + E_{-\alpha})$ принадлежат $\mathfrak{g}_k$ для каждого $\alpha \in \Delta$. Наконец,

$$B(H, [E_\alpha, E_{-\alpha}]) = B([H, E_\alpha], E_{-\alpha}) = \frac{2\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)}.$$

Из того, что элемент $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ пропорционален H_α (теорема 4.2 гл. III), следует, что $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{g}_0$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbf{R}$ и что $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$, как обычно, — разложение Картана алгебры $\mathfrak{g}_0$. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная оболочка алгебры $\mathfrak{g}_0$. Положим $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{p}_0$ и обозначим через σ и τ сопряжения алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{u}$ соответственно. Автоморфизм $\sigma\tau$ алгебры $\mathfrak{g}$ будет обозначаться через θ . Обозначим через ad присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$.

Обозначим через $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ максимальное абелево подпространство в $\mathfrak{p}_0$. Пусть $\mathfrak{h}_0$ — некоторая максимальная абелева подалгебра алгебры $\mathfrak{g}_0$, содержащая $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$. Существование подалгебры $\mathfrak{h}_0$ следует из леммы Цорна. Если $X \in \mathfrak{h}_0$ и $Y \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$, то

$$[X - \theta X, Y] = [X, Y] - \theta[X, \theta Y] = [X, Y] + \theta[X, Y] = 0 + 0 = 0.$$

Поскольку $X - \theta X \in \mathfrak{p}_0$, отсюда следует, ввиду максимальной подпространства $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$, что $X - \theta X \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$. Таким образом, $\theta\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}_0$, откуда получаем прямое разложение $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0$. Очевидно, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0$. Положим $\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}_0} = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0$. Обозначим через $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}$, $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{p}$ подпространства в $\mathfrak{g}$, порожденные подпространствами $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}_0}$, $\mathfrak{k}_0$ и $\mathfrak{p}_0$ соответственно.

Лемма 3.2. Алгебра $\mathfrak{h}$ является подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} + i\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}_0}$.

Очевидно, что $\mathfrak{h}$ — максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{g}$. Далее, эрмитова форма $B_\tau(X, Y) = -B(X, \tau Y)$ на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ положительно определена и для $Z \in \mathfrak{u}$ имеет место соотношение

$$B_\tau([Z, X], Y) + B_\tau(X, [Z, Y]) = 0.$$

Если подпространство V алгебры $\mathfrak{g}$ инвариантно относительно $\text{ad } Z$, то ортогональное дополнение $V^\perp$ (по отношению к B_τ) также

инвариантно и $\mathfrak{g} = V + V^\perp$ (прямая сумма). Значит, $\text{ad } Z$ — полупростой эндоморфизм. Таким образом, $\text{ad } H$ является полупростым, если $H \in \mathfrak{h}_\mathfrak{f} \cup \mathfrak{h}_\mathfrak{p}$. Так как $\text{ad } H_1$ и $\text{ad } H_2$ перестановочны для $H_1 \in \mathfrak{h}_\mathfrak{f}$, $H_2 \in \mathfrak{h}_\mathfrak{p}$, то эндоморфизм $\text{ad } (H_1 + H_2)$ является полупростым и $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана.

Вследствие своего определения подалгебра $\mathfrak{h}$ инвариантна относительно σ и θ . Значит, она инвариантна и относительно τ . По лемме 3.1, $\mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{h} \cap (i\mathfrak{u})$. Но из $\theta\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ следует, что $\mathfrak{h} \cap (i\mathfrak{u}) = \mathfrak{h} \cap (i\mathfrak{f}_0) + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}_0 = i\mathfrak{h}_{\mathfrak{f}_0} + \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$. Теперь утверждение леммы вытекает из того, что $\dim \mathfrak{h}^* = \dim \mathfrak{h}_0$.

Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbf{R}$, а W — подпространство в V . Обозначим через $V^\wedge$ и $W^\wedge$ двойственные к ним пространства и предположим, что $V^\wedge$ и $W^\wedge$ превращены в упорядоченные векторные пространства. Говорят, что эти упорядочения *совместимы* (Хариш-Чандра [10], стр. 195), если элемент $\lambda \in V^\wedge$ положителен, при условии, что его ограничение $\bar{\lambda}$ на W положительно. Совместимые упорядочения можно, например, построить следующим образом. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — такой базис пространства V , что $X_1, \dots, X_m$ составляют базис в W . Тогда лексикографические упорядочения пространств $W^\wedge$ и $V^\wedge$ по отношению к этим базисам совместимы.

Выберем теперь совместимые упорядочения в пространствах, двойственных к $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ и $\mathfrak{h}^*$ соответственно. Так как каждый корень $\alpha \in \Delta$ принимает вещественные значения на $\mathfrak{h}^*$, то при этом получается упорядочение множества Δ . Обозначим через Δ^+ множество положительных корней. Для каждого $\alpha \in \Delta$ линейные функции α^τ , α^σ и α^θ , определенные формулами

$$\alpha^\tau(H) = \overline{\alpha(\tau H)}, \quad \alpha^\sigma(H) = \overline{\alpha(\sigma H)}, \quad \alpha^\theta(H) = \alpha(\theta H) \quad (H \in \mathfrak{h}),$$

также являются элементами множества Δ . Корень α тождественно равен 0 на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \alpha^\theta$. Разделим положительные корни на следующие два класса:

$$P_+ = \{\alpha \mid \alpha \in \Delta^+, \alpha \neq \alpha^\theta\}, \\ P_- = \{\alpha \mid \alpha \in \Delta^+, \alpha = \alpha^\theta\}.$$

Лемма 3.3.

- (i) Если $\alpha \in P_+$, то $-\alpha^\theta \in P_+$, $\alpha^\sigma \in P_+$, $\alpha^\tau = -\alpha$.
- (ii) Если $\beta \in P_-$, то $\beta^\theta = \beta$, $\beta^\sigma = -\beta$, $\beta^\tau = -\beta$ и $\mathfrak{g}^\beta + \mathfrak{g}^{-\beta} \subset \mathfrak{f}$.

Доказательство. Ограничения корней α и α^θ на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ дают в сумме 0. Из совместимости упорядочений следует, что $\alpha^\theta < 0$. Поскольку α^σ и α совпадают на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$, то $\alpha^\sigma \in P_+$. Соотношения $\alpha^\tau = -\alpha$, $\beta^\tau = -\beta$ были установлены в процессе доказательства леммы 3.1. Из соотношения $\beta^\theta = \beta$ вытекает, что $H_\beta \in \mathfrak{f} \cap \mathfrak{h}^* = i\mathfrak{h}_{\mathfrak{f}_0}$, откуда $\beta^\sigma = -\beta$. Так как $\theta\mathfrak{g}^\beta = \mathfrak{g}^\beta$, $\theta^2 = I$ и

$\dim(\mathfrak{g}^\beta) = 1$, то ясно, что $\theta Z = -Z$ или $\theta Z = Z$ для каждого $Z \in \mathfrak{g}^\beta$. Если $\theta Z = -Z$, то $Z \in \mathfrak{g}$. Для $H \in \mathfrak{h}_p$ имеем равенство $[H, Z] = \beta(H)Z = 0$. Поскольку $\mathfrak{h}_p$ — максимальное абелево подпространство в $\mathfrak{p}$, отсюда следует, что $Z = 0$ и $\mathfrak{g}^\beta \subset \mathfrak{k}$. Аналогично $\mathfrak{g}^{-\beta} \subset \mathfrak{k}$.

Теорема 3.4. Пусть $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in P_+} \mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{n}$, $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{h}_{p_0} + \mathfrak{n}_0$. Тогда $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{n}_0$ — нильпотентные алгебры Ли, $\mathfrak{z}_0$ — разрешимая алгебра Ли и

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{h}_{p_0} + \mathfrak{n}_0 \text{ (прямая сумма векторных пространств).}$$

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in P_+$. Если $\alpha + \beta \in \Delta$, то $\alpha + \beta \in P_+$ и $\mathfrak{n}$ есть, очевидно, нильпотентная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Значит, $\mathfrak{n}_0$ — нильпотентная подалгебра в $\mathfrak{g}_0$. Из соотношения $[\mathfrak{n}_0 + \mathfrak{h}_{p_0}, \mathfrak{n}_0 + \mathfrak{h}_{p_0}] \subset \mathfrak{n}_0$ видно, что $\mathfrak{h}_{p_0} + \mathfrak{n}_0$ — разрешимая алгебра Ли. Для доказательства того, что сумма $\mathfrak{k}_0 + \mathfrak{h}_{p_0} + \mathfrak{n}_0$ является прямой, предположим, что $T \in \mathfrak{k}_0$, $H \in \mathfrak{h}_{p_0}$ и $X \in \mathfrak{n}_0$ таковы, что $T + H + X = 0$. Применяя θ , получаем $T - H + \theta X = 0$, откуда $2H + X - \theta X = 0$. Согласно лемме 3.3,

$$\theta X \in \sum_{\alpha \in P_+} \mathfrak{g}^{-\alpha}.$$

Из того, что сумма $\mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha$ является прямой, вытекает, что $H = 0$ и $X - \theta X = 0$. Но $\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{n}_0 = \{0\}$, откуда $X = T = 0$.

Пусть теперь $X \in \mathfrak{g}_0$. Из равенства $X = \frac{1}{2}(X + \sigma X)$ следует, что X можно записать в виде

$$X = H + \sum_{\alpha \in \Delta} (X_\alpha + \sigma X_\alpha),$$

где $H \in \mathfrak{h}_0$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ для каждого $\alpha \in \Delta$. Если α или $-\alpha$ принадлежит к P_- , то $X_\alpha + \sigma X_\alpha \in \mathfrak{k}_0$, в силу леммы 3.3. Если $\alpha \in P_+$, то $X_\alpha + \sigma X_\alpha \in \mathfrak{n}_0$ по той же самой лемме. Наконец, если $-\alpha \in P_+$, то $\tau(X_\alpha + \sigma X_\alpha) \in \mathfrak{g}^{-\alpha} + \mathfrak{g}^{\alpha\theta} \subset \mathfrak{n}$ по лемме 3.3. Следовательно,

$$\begin{aligned} X_\alpha + \sigma X_\alpha &= \{(X_\alpha + \sigma X_\alpha) + \tau(X_\alpha + \sigma X_\alpha)\} - \\ &\quad - \tau(X_\alpha + \sigma X_\alpha) \in \mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_0, \end{aligned}$$

откуда $X_\alpha + \sigma X_\alpha \in \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{n}_0$. Тем самым теорема доказана.

Лемма 3.5. Существует такой базис (X_i) алгебры $\mathfrak{g}$, что матрицы, выражающие элементы алгебры $\text{ad}(\mathfrak{g})$, обладают следующими свойствами:

(i) матрицы из $\text{ad} \mathfrak{u}$ являются косоэрмитовыми;

(ii) матрицы из $\text{ad } \mathfrak{n}$ являются нижними треугольными с нулями на диагонали;

(iii) матрицы из $\text{ad } \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ являются диагональными матрицами с вещественными элементами.

Доказательство. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ — корни из Δ^+ , расположенные в порядке возрастания. Пусть $H_1, \dots, H_l$ — базис пространства $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$, ортонормированный по отношению к B_τ . Выберем такие $E_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$, что $B_\tau(E_{\alpha_i}, E_{\alpha_i}) = 1$ ($i = 1, 2, \dots$). Поскольку $\tau E_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}^{-\alpha_i}$, векторы $\dots, \tau E_{\alpha_2}, \tau E_{\alpha_1}, H_1, \dots, H_l, E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}, \dots$ составляют ортонормированный базис пространства $\mathfrak{g}$. Этот базис обладает свойствами (i), (ii) и (iii).

Обозначим через $\mathfrak{m}_0$ централизатор подалгебры $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ в $\mathfrak{k}_0$. Обозначим через $\mathfrak{l}_0$ и $\mathfrak{q}_0$ ортогональные дополнения к $\mathfrak{m}_0$ в $\mathfrak{k}_0$ и к $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ в $\mathfrak{p}_0$ соответственно. Слово «ортогональные» относится здесь к положительно определенной форме B_τ . Обозначим через $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{q}$ подпространства алгебры $\mathfrak{g}$, порожденные подпространствами $\mathfrak{m}_0$, $\mathfrak{l}_0$ и $\mathfrak{q}_0$ соответственно.

Лемма 3.6. Прямые разложения

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{l}_0 + \mathfrak{m}_0 + \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} + \mathfrak{q}_0,$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \mathfrak{m} + \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}} + \mathfrak{q}$$

ортогональны по отношению к B_τ и инвариантны относительно θ . Далее, если $X_\alpha \neq 0$ — произвольный элемент из $\mathfrak{g}^\alpha$ ($\alpha \in \Delta$), то

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}} + \sum_{\alpha \in P_-} (\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha}),$$

$$\mathfrak{l} = \sum_{\alpha \in P_+} C(X_\alpha + \theta X_\alpha),$$

$$\mathfrak{q} = \sum_{\alpha \in P_+} C(X_\alpha - \theta X_\alpha).$$

Доказательство. Каждый элемент $X \in \mathfrak{g}$ можно записать в виде

$$X = H^* + \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha X_\alpha \quad (H^* \in \mathfrak{h}, c_\alpha \in C).$$

Отсюда

$$[H, X] = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha(H) X_\alpha \quad (1)$$

для каждого $H \in \mathfrak{h}$. Значит, X перестановочен с $H \in \mathfrak{h}$ тогда и только тогда, когда $c_\alpha \alpha(H) = 0$ для всех $\alpha \in \Delta$. Отсюда следует, что $\mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in P_-} (\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha})$ является централизатором подалгебры $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$

в $\mathfrak{g}$. Поскольку $\mathfrak{m}$ — централизатор подалгебры $\mathfrak{h}_p$ в $\mathfrak{f}$, отсюда получается выражение для $\mathfrak{m}$.

Чтобы доказать формулу для $\mathfrak{l}$, возьмем $H \in \mathfrak{h}_f$, $\alpha \in P_+$ и $\beta \in P_-$ или $-\beta \in P_-$. Тогда, применяя теорему 4.2 гл. III, получаем соотношения

$$-B_\tau(X_\alpha + \theta X_\alpha, H) = B(X_\alpha, \tau H) + B(\theta X_\alpha, \tau H) = 0,$$

$$-B_\tau(X_\alpha + \theta X_\alpha, X_\beta) = B(X_\alpha, \tau X_\beta) + B(\theta X_\alpha, \tau X_\beta) = 0,$$

так как $\tau X_\beta \in \mathfrak{g}^{-\beta}$, $\theta X_\alpha \in \mathfrak{g}^{\alpha^0}$ и $\alpha^0 + \beta \neq 0$. Отсюда следует, что

$$\sum_{\alpha \in P_+} \mathcal{C}(X_\alpha + \theta X_\alpha) \subset \mathfrak{l}.$$

Точно таким же способом доказывается включение

$$\sum_{\alpha \in P_+} \mathcal{C}(X_\alpha - \theta X_\alpha) \subset \mathfrak{q}.$$

Пусть теперь α — фиксированный элемент из P_+ , и пусть $c \in \mathcal{C}$ определено равенством $\theta X_{-\alpha} = c X_{-\alpha\theta}$. Тогда

$$X_\alpha = \frac{1}{2}(X_\alpha + \theta X_\alpha) + \frac{1}{2}(X_\alpha - \theta X_\alpha) \in \mathfrak{l} + \mathfrak{q};$$

$$\begin{aligned} X_{-\alpha} &= \frac{1}{2}(\theta X_{-\alpha} + \theta(\theta X_{-\alpha})) + \frac{1}{2}(\theta(\theta X_{-\alpha}) - \theta X_{-\alpha}) = \\ &= \frac{1}{2}c(X_{-\alpha\theta} + \theta X_{-\alpha\theta}) - \frac{1}{2}c(X_{-\alpha\theta} - \theta X_{-\alpha\theta}) \in \mathfrak{l} + \mathfrak{q}. \end{aligned}$$

Следовательно, определенный выше элемент X принадлежит $\mathfrak{m} + \mathfrak{h}_p + \sum_{\alpha \in P_+} \mathcal{C}(X_\alpha + \theta X_\alpha) + \sum_{\alpha \in P_+} \mathcal{C}(X_\alpha - \theta X_\alpha)$, и лемма доказана.

Из формулы (1) непосредственно вытекает

Следствие 3.7. Если $H \in \mathfrak{h}_p$ и $\alpha(H) \neq 0$ для всех $\alpha \in P_+$, то централизатор элемента H в $\mathfrak{g}$ равен $\mathfrak{h}_p + \mathfrak{m}$.

§ 4. Нильпотентные группы Ли

Мы начнем с того, что установим некоторые факты, относящиеся к экспоненциальному отображению для нильпотентных групп Ли. Эти факты мы применим к более детальному изучению нильпотентной алгебры Ли, возникающей в разложении Ивасава.

Пусть L — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{l}$. Обозначим через $T(\mathfrak{l})$ тензорную алгебру над алгеброй $\mathfrak{l}$, рассматриваемой как векторное пространство. Обозначим через $X \rightarrow \bar{X}$ тождественное отображение пространства $\mathfrak{l}$ в $T(\mathfrak{l})$. Не обязательно обозначать умножение в $T(\mathfrak{l})$ специальным символом. Если $M = (m_1, \dots, m_n)$ — положительный целочисленный n -набор, то обозначим через

$\bar{X}(M)$ коэффициент при $t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}$ в произведении $\frac{1}{|M|!} (t_1 \bar{X}_1 + \dots + t_n \bar{X}_n)^{|M|}$, где $X_1, \dots, X_n$ — базис алгебры $\mathfrak{l}$ и $|M| = m_1 + \dots + m_n$. Элемент вида $\sum a_{e_1 \dots e_n} \bar{X}_1^{e_1} \dots \bar{X}_n^{e_n}$ будет называться *каноническим многочленом*. Как и раньше, обозначим через J двусторонний идеал в $T(\mathfrak{l})$, порожденный множеством всех элементов вида $\bar{X}\bar{Y} - \bar{Y}\bar{X} - ([X, Y])$ ($X, Y \in \mathfrak{l}$). Факторалгебра $T(\mathfrak{l})/J$ есть универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{l})$ алгебры $\mathfrak{l}$. Пусть $X(M)$ — образ элемента $\bar{X}(M)$ при каноническом отображении алгебры $T(\mathfrak{l})$ на $U(\mathfrak{l})$. Как было доказано раньше, элементы $X(M)$ составляют базис алгебры $U(\mathfrak{l})$. Из следствия 1.10 гл. I получаем следующее утверждение: каждому элементу $\bar{X}(M)$ соответствует единственный канонический многочлен $\bar{R}_M$, такой, что

$$\bar{X}(M) \equiv \bar{R}_M \pmod{J}.$$

Предположим теперь, что алгебра $\mathfrak{l}$ нильпотентна. Обозначим через $\mathcal{C}^{m-1}\mathfrak{l}$ последний ненулевой член убывающего центрального ряда $\mathcal{C}^0\mathfrak{l} \supset \mathcal{C}^1\mathfrak{l} \supset \dots$. Базис $X_1, \dots, X_n$ алгебры $\mathfrak{l}$ называется *совместимым* с убывающим центральным рядом, если существуют такие целые числа $r_0 = 1 < r_1 < \dots < r_m = n + 1$, что элементы $X_{r_i}, X_{r_i+1}, \dots, X_{r_{i+1}-1}$ составляют базис подпространства, дополнительного к $\mathcal{C}^{i+1}\mathfrak{l}$ в $\mathcal{C}^i\mathfrak{l}$ ($0 \leq i \leq m-1$). Положим

$$\omega(\bar{X}_i) = p,$$

если X_i лежит в $\mathcal{C}^{p-1}\mathfrak{l}$, но не лежит в $\mathcal{C}^p\mathfrak{l}$. В частности, $\omega(\bar{X}_i) = m$, если $X_i \in \mathcal{C}^{m-1}\mathfrak{l}$. Положим также

$$\omega(c\bar{X}_{i_1} \dots \bar{X}_{i_r}) = \sum_{k=1}^r \omega(\bar{X}_{i_k}), \quad d(c\bar{X}_{i_1} \dots \bar{X}_{i_r}) = r,$$

где c — любое вещественное число, отличное от 0. Число ω мы будем называть *весом*, а d — *степенью*. Члены, входящие в $\bar{X}(M)$, все имеют один и тот же вес, который будет обозначаться через $\omega(M)$.

Лемма 4.1. Пусть L — нильпотентная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{l}$. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — базис алгебры $\mathfrak{l}$, совместимый с убывающим центральным рядом

$$\mathcal{C}^0\mathfrak{l} \supset \mathcal{C}^1\mathfrak{l} \supset \dots \supset \mathcal{C}^m\mathfrak{l} = \{0\}, \quad \mathcal{C}^{m-1}\mathfrak{l} \neq \{0\},$$

алгебры $\mathfrak{l}$. Определим константы C_{MN}^P формулами

$$X(M)X(N) = \sum_P C_{MN}^P X(P).$$

Обозначим через $[k]$ n -набор $(\delta_{k1}, \dots, \delta_{kn})$. Тогда

$$C_{MN}^{[k]} = 0 \quad \text{для всех } k \ (1 \leq k \leq n),$$

если $|M| + |N| > m$.

Доказательство. Рассмотрим структурные константы c_{ij}^k , определенные формулами

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k X_k \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Мы имеем

$$\omega(\bar{X}_k) = \omega(\bar{X}_i) + \omega(\bar{X}_j), \quad \text{если } c_{ij}^k \neq 0. \quad (1)$$

Пусть теперь M и N — некоторые положительные целочисленные n -наборы. Тогда $\bar{R}_M$ получается из $\bar{X}(M)$ при помощи конечного числа подстановок

$$\bar{X}_i \bar{X}_j \rightarrow \bar{X}_j \bar{X}_i + \sum_{k=1}^n c_{ij}^k \bar{X}_k + u \quad (u \in J) \quad (2)$$

и приведения по $\text{mod } J$. Из формулы (1) следует, что каждый член в $\bar{R}_M$ имеет вес $\omega(M)$. Далее, имеем

$$\bar{R}_M \bar{R}_N \equiv \bar{R}_{MN} \quad \text{mod } J,$$

где $\bar{R}_{MN}$ — однозначно определенный канонический многочлен. Этот многочлен получается из $\bar{R}_M \bar{R}_N$ при помощи конечного числа подстановок вида (2) и приведения по $\text{mod } J$. Отсюда следует, что каждый член в $\bar{R}_{MN}$ имеет вес $\omega(M) + \omega(N)$. С другой стороны,

$$\bar{R}_M \bar{R}_N \equiv \sum_P C_{MN}^P \bar{R}_P \quad \text{mod } J \quad (3)$$

и, следовательно,

$$\bar{R}_{MN} = \sum_P C_{MN}^P \bar{R}_P. \quad (4)$$

Очевидно, различные элементы $\bar{X}_1^{e_1} \dots \bar{X}_n^{e_n} \in T(1)$ линейно независимы. Как было замечено раньше, каждый член в $\bar{R}_P$ имеет вес $\omega(P)$. Поэтому из равенства (4) можно заключить, что если $C_{MN}^P \neq 0$, то каждый член в $\bar{R}_P$ имеет вес $\omega(M) + \omega(N)$.

Предположим теперь, что $|M| + |N| > m$. Тогда $\omega(M) + \omega(N) > m$. Если бы число $C_{MN}^{[k]}$ было отлично от нуля, то элемент $\bar{X}_k$ имел бы вес $\omega(M) + \omega(N) > m$. Поскольку $\mathcal{C}^m \mathfrak{I} = \{0\}$, это невозможно, и лемма доказана.

Определение. Пусть V и W — два конечномерных векторных пространства над полем K . Полиномиальной функцией на V

называется функция P , которую можно представить в виде $P = p(f_1, \dots, f_n)$, где каждая f_i — линейная функция на V со значениями в K и p — многочлен (с коэффициентами из K). Отображение $\varphi: V \rightarrow W$ называется *полиномиальным отображением*, если $P \circ \varphi$ есть полиномиальная функция на V для любой полиномиальной функции P на W .

Предположим, что в пространствах V и W выбраны базисы. Тогда отображение $\varphi: V \rightarrow W$ является полиномиальным отображением в том и только том случае, когда координаты вектора $\varphi(X) \in W$ суть многочлены p_i от координат вектора $X \in V$. Наивысшая степень многочленов p_i есть число, не зависящее от выбора базисов. Это число мы будем называть *степенью* полиномиального отображения φ .

Теорема 4.2. Пусть L — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{l}$. Необходимым и достаточным условием нильпотентности алгебры $\mathfrak{l}$ является существование такого полиномиального отображения $P: \mathfrak{l} \times \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{l}$, что

$$\exp X \exp Y = \exp P(X, Y) \quad \text{для } X, Y \in \mathfrak{l}. \quad (5)$$

В этом случае P имеет степень, не превосходящую $\dim \mathfrak{l}$.

Доказательство. Предположим сначала, что группа L нильпотентна. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — базис алгебры $\mathfrak{l}$, совместимый с убывающим центральным рядом. Сопоставив лемму 4.1 со следствием 2.7 гл. III, видим, что $C_{MN}^{[k]} = 0$ для всех $k = 1, \dots, n$, если только $|M| + |N| > \dim \mathfrak{l}$. Обозначая канонические координаты при помощи индексов внизу, мы получаем соотношение (14) из § 1 гл. II:

$$(xy)_k = \sum_{M, N} C_{MN}^{[k]} x^M y^N,$$

где $x^M = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, и т. д. Поэтому можно утверждать, что существуют такие n многочленов $P_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ ($1 \leq i \leq n$) степени, не превосходящей n , и такое число $a > 0$, что

$$\begin{aligned} \exp(x_1 X_1 + \dots + x_n X_n) \exp(y_1 X_1 + \dots + y_n X_n) = \\ = \exp(P_1 X_1 + \dots + P_n X_n) \end{aligned} \quad (6)$$

для $|x_i| < a$, $|y_i| < a$, $1 \leq i \leq n$. Однако из следующей леммы вытекает, что соотношение (6) имеет место для всех x_i и всех y_i . Значит, условие теоремы необходимо.

Лемма 4.3. Пусть M и N — аналитические многообразия, причем M связно. Пусть φ и ψ — два аналитических отображения многообразия M в N . Предположим, что $\varphi(p) = \psi(p)$ для всех p из некоторого открытого подмножества в M . Тогда $\varphi(p) = \psi(p)$ для всех $p \in M$.

Доказательство. Пусть $q \in M$. Мы скажем, что φ и ψ имеют одинаковые частные производные в точке q , если: (1) $\varphi(q) = \psi(q)$; (2) для любых систем координат $\{x_1, \dots, x_m\}$ и $\{y_1, \dots, y_n\}$ в окрестностях точек q и $\varphi(q)$ соответственно выражения отображений φ и ψ в этих координатах имеют одинаковые частные производные (всех порядков) в точке $(x_1(q), \dots, x_m(q))$. Пусть M' — подмножество в M , состоящее из всех таких точек $q \in M$, что φ и ψ имеют в точке q одинаковые частные производные. Тогда M' , очевидно, замкнуто в M . Но M' также открыто в M , так как частные производные аналитической функции в точке определяют разложение этой функции в степенной ряд. В силу связности многообразия M , имеем $M' = M$, что и требовалось.

Для доказательства второй половины теоремы 4.2 предположим, что (5) имеет место для некоторого полиномиального отображения $P: \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$. Пусть N_0 — такая звездная открытая окрестность точки 0 в $\mathbb{I}$, что отображение $\exp$ является диффеоморфизмом окрестности N_0 на некоторую окрестность N_e точки e в L . Пусть $\{x_1, \dots, x_n\}$ — система канонических координат на N_e . Пусть $X, Y \in \mathbb{I}$, причем $X \in N_0$. Тогда

$$\exp X \exp tY = \exp (X + tZ_t) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (7)$$

где $Z_t = Z_0 + tZ_1 + t^2Z_2 + \dots$ и каждый Z_i имеет вид $Z_i = Q_i(X, Y)$, где Q_i — полиномиальное отображение пространства $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ в $\mathbb{I}$. Из равенства

$$X + tZ_t - (X + tZ_0) = O(t^2)$$

следует, что

$$\left\{ \frac{d}{dt} f(\exp(X + tZ_t)) \right\}_{t=0} = \left\{ \frac{d}{dt} f(\exp(X + tZ_0)) \right\}_{t=0},$$

где f — одна из координатных функций x_i . Используя (7), получаем

$$[dL_{\exp X}(Y)f](\exp X) = \left\{ \frac{d}{dt} f(\exp(X + tZ_0)) \right\}_{t=0}.$$

С другой стороны, из теоремы 1.7 гл. II известно, что

$$\left\{ \frac{d}{dt} f(\exp(X + tZ_0)) \right\}_{t=0} = \left[\left\{ dL_{\exp X} \circ \frac{1 - e^{-\text{ad } X}}{\text{ad } X} (Z_0) \right\} f \right](\exp X).$$

Поскольку $Z_0 = Q_0(X, Y)$, из этих двух равенств получается

$$\frac{\text{ad } X}{1 - e^{-\text{ad } X}}(Y) = Q_0(X, Y),$$

где X достаточно мал, Y произволен. Если $|x| < 2\pi$, то имеется

абсолютно сходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, удовлетворяющий равенству

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} x^{n-1} \right) = 1, \quad (8)$$

в котором бесконечно много коэффициентов $a_n \neq 0$. Равенство (8) сводится просто к бесконечной системе уравнений для коэффициентов a_n . Если X достаточно мал, то ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\operatorname{ad} X)^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} (\operatorname{ad} X)^{n-1}$ сходятся абсолютно¹⁾ и их можно почленно перемножить. Поэтому соотношение (8) останется верным, если заменить в нем x на $\operatorname{ad} X$. Отсюда следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\operatorname{ad} X)^n (Y) = Q_0(X, Y).$$

Так как бесконечно многие коэффициенты a_n отличны от 0, то мы видим, что эндоморфизм $\operatorname{ad} X$ нильпотентен. Значит, алгебра $\mathfrak{l}$ нильпотентна.

Следствие 4.4. Пусть L — связная нильпотентная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{l}$. Тогда экспоненциальное отображение является регулярным отображением алгебры $\mathfrak{l}$ на L .

Если $X \in \mathfrak{l}$, то эндоморфизм $\operatorname{ad} X$ нильпотентен и существует поэтому такой базис алгебры $\mathfrak{l}$, что соответствующая матрица, выражающая $\operatorname{ad} X$, имеет нули на главной диагонали и ниже ее. Следовательно,

$$\det \left(\frac{1 - e^{-\operatorname{ad} X}}{\operatorname{ad} X} \right) \neq 0.$$

В силу теоремы 1.7 гл. II, это значит, что $\exp$ регулярно всюду на $\mathfrak{l}$. С другой стороны, теорема 4.2 показывает, что $\exp(\mathfrak{l})$ есть подгруппа в L , которая, в силу регулярности отображения $\exp$, является открытой подгруппой. Открытая подгруппа всегда замкнута и, в силу связности группы L , имеем $\exp(\mathfrak{l}) = L$.

¹⁾ Пусть $|\cdot|$ — некоторая норма в конечномерном векторном пространстве V над $\mathbf{R}$. Если A — эндоморфизм пространства V , то положим $\|A\| = \sup \frac{|Ax|}{|x|}$. Если A_n ($n=0, 1, \dots$) — эндоморфизмы пространства V , то ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\|$.

Замечание. Это следствие можно доказать также более прямым путем, не используя теоремы 4.2. Если $I \neq \{0\}$, то центр I отличен от $\{0\}$ и факторалгебра $I/\mathfrak{c}$ снова нильпотентна и имеет размерность, меньшую, чем $\dim I$. Следствие 4.4 можно доказать теперь по индукции. Детали оставляем читателю.

Пусть N — нильпотентный эндоморфизм конечномерного векторного пространства V над R . Положим $\log(1+N) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{N^n}{n}$ (конечная сумма). Ясно, что эндоморфизмы $\log(1+N)$ и $e^N - 1$ также нильпотентны.

Лемма 4.5.

$$\log e^N = N, \quad e^{\log(1+N)} = 1 + N.$$

Доказательство. Пусть x — вещественное число, и пусть коэффициенты $a_{m,n}$ определены равенством

$$\left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} x^r \right)^n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} x^m \quad \text{для всех } x. \quad (9)$$

Если $|\exp x - 1| < 1$, то

$$\begin{aligned} x &= \log((\exp x - 1) + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} x^r \right)^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} x^m \right). \end{aligned}$$

Согласно теореме Вейерштрасса о двойных рядах, можно изменить порядок суммирования, откуда получаем, что

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} a_{m,n} \right) x^m. \quad (10)$$

Если A — эндоморфизм пространства V , то ряд $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} A^r$ абсолютно сходится. Соотношение (9) остается верным, если заменить x на A . Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} N^r \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} N^m.$$

Поскольку N нильпотентен, ряды в действительности являются конечными и порядок суммирования можно изменить. Из равенства (10) следует, что

$$\log e^N = N.$$

Второе соотношение можно доказать таким же способом.

Рассмотрим теперь разложение Ивасава $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} + \mathfrak{n}_0$ произвольной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ над $\mathbf{R}$. Пусть G — связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_0$, и пусть K , $A_{\mathfrak{p}}$ и N — аналитические подгруппы группы G с алгебрами $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ и $\mathfrak{n}_0$ соответственно. Мы докажем сейчас два результата относительно группы N , которые будут использоваться в гл. X. Мы сохраняем обозначения § 3. Кроме того, положим

$$D(H) = \prod_{\alpha \in P_+} \operatorname{sh} \frac{\alpha(H)}{2} \quad \text{для } H \in \mathfrak{h}_0$$

и обозначим через $\mathfrak{h}'_0$ множество точек $H \in \mathfrak{h}_0$, для которых $D(H) \neq 0$. Обозначим через Ad присоединенное представление группы G и через ad — присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}_0$.

Лемма 4.6. Пусть H — элемент из $\mathfrak{h}'_0$. Тогда отображение $\varphi: n \rightarrow \operatorname{Ad}(n)H - H$ является аналитическим диффеоморфизмом группы N на $\mathfrak{n}_0$.

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{n}_0$. Тогда $\operatorname{Ad}(\exp X)H - H = e^{\operatorname{ad} X}H - H \in \mathfrak{n}_0$, так как $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{n}_0] \subset \mathfrak{n}_0$. Поскольку $\exp$ отображает $\mathfrak{n}_0$ на N (следствие 4.4), ясно, что $\varphi(N) \subset \mathfrak{n}_0$. Докажем теперь, что φ взаимно однозначно. Предположим, что $n_1, n_2 \in N$ таковы, что $\operatorname{Ad}(n_1)H - H = \operatorname{Ad}(n_2)H - H$. Существует такой элемент $X \in \mathfrak{n}_0$, что $\exp X = n_2^{-1}n_1$. Тогда $e^{\operatorname{ad} X}H = H$, откуда по лемме 4.5 следует, что $\operatorname{ad} X(H) = 0$ или, что равносильно, $\operatorname{ad} H(X) = 0$. Так как $\alpha(H) \neq 0$ для каждого $\alpha \in P_+$, то мы видим, что ограничение эндоморфизма $\operatorname{ad} H$ на $\mathfrak{n}_0$ невырождено. Следовательно, $X = 0$ и $n_2 = n_1$.

Докажем теперь, что $\varphi(N) = \mathfrak{n}_0$. Если это не так, то пусть Z — такой элемент алгебры $\mathfrak{n}_0$, что $Z \notin \varphi(N)$. Тогда $Z = \sum_{\alpha \in P_+} c_{\alpha} X_{\alpha}$, где c_{α} — комплексные числа, не все равные нулю. Пусть β — наименьший корень в P_+ , для которого $c_{\beta} \neq 0$. Мы можем предположить, что элемент Z выбран в $\mathfrak{n}_0 \setminus \varphi(N)$ таким образом, чтобы корень β был наибольшим из возможных. Поскольку эндоморфизм $\operatorname{ad} H$ невырожден на $\mathfrak{n}_0$, существует такой элемент $Z_1 \in \mathfrak{n}_0$, что $[H, Z_1] = Z$. Если $n_1 = \exp Z_1$, то

$$\operatorname{Ad}(n_1)(H + Z) - H \equiv [Z_1, H] + Z \pmod{\sum_{\alpha > \beta} \mathfrak{g}^{\alpha}},$$

откуда

$$\operatorname{Ad}(n_1)(H + Z) - H = Z', \quad \text{где } Z' \in \mathfrak{n}_0 \cap \sum_{\alpha > \beta} \mathfrak{g}^{\alpha}.$$

В силу выбора элемента Z , существует такой элемент $n' \in N$, что $\operatorname{Ad}(n')H - H = Z'$. Отсюда следует, что $\operatorname{Ad}(n)H - H = Z$, если $n = n_1^{-1}n'$. Это противоречие показывает, что $\varphi(N) = \mathfrak{n}_0$.

Наконец, для доказательства того, что отображение φ регулярно, вычислим его дифференциал $d\varphi_n$ в произвольной точке $n \in N$. Каждый касательный вектор из N_n имеет вид $dL_n X$, где $X \in \mathfrak{n}_0$ и через L_n , как обычно, обозначен левый сдвиг на элемент n . Из равенства

$$\begin{aligned} \varphi(n \exp tX) &= \text{Ad}(n) e^{\text{ad } tX} H - H = \\ &= \text{Ad}(n) H - H + \text{Ad}(n) \left(t[X, H] + \frac{t^2}{2} [X, [X, H]] + \dots \right) \end{aligned}$$

следует, что

$$d\varphi_n(dL_n X) = -\text{Ad}(n) \text{ad } H(X) \quad (X \in \mathfrak{n}_0). \quad (11)$$

Так как эндоморфизмы $\text{Ad}(n)$ и $\text{ad } H$ оба невырождены на $\mathfrak{n}_0$, то отсюда следует регулярность отображения φ , и лемма доказана.

Теорема 4.7. Пусть $H \in \mathfrak{h}'_0$. Тогда отображение

$$\psi: X \rightarrow \exp(-H) \exp(H+X)$$

является аналитическим диффеоморфизмом пространства $\mathfrak{n}_0$ на N .

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{n}_0$. Тогда по лемме 4.6 $H+X = \text{Ad}(n)H$ для некоторого $n \in N$ и поэтому $\psi(X) = \exp(-H) \times \exp(H+X) = \exp(-H) n \exp H n^{-1} \in N$. Докажем теперь, что ψ взаимно однозначно. Если это не так, то выберем такие $X_1, X_2 \in \mathfrak{n}_0$, что $X_1 \neq X_2$ и $\psi(X_1) = \psi(X_2)$. По лемме 4.6 существуют такие элементы $n_1, n_2 \in N$, что $\text{Ad}(n_i)H - H = X_i$ ($i=1, 2$). Пусть $n = n_2^{-1}n_1$, и пусть $X \in \mathfrak{n}_0$ определен формулой $\text{Ad}(n)H - H = X$. Тогда из равенства $\psi(X_1) = \psi(X_2)$ следует, формула $\exp(\text{Ad}(n_1)H) = \exp(\text{Ad}(n_2)H)$, откуда $\exp(H+X) = \exp H$. Имеем $X = \sum_{\alpha \in P_+} a_\alpha X_\alpha$, где a_α — комплексные числа, не все равные 0. Пусть β — наименьший корень в P_+ , такой, что $a_\beta \neq 0$, и пусть $\mathfrak{g}(\beta) = \sum_{\alpha > \beta} \mathfrak{g}^\alpha$. Тогда для $H' \in \mathfrak{h}'_0$ имеем

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\exp(H+X))H' &= e^{\text{ad}(H+X)}H' \equiv \\ &\equiv H' + [X, H'] + \frac{1}{2!} [H, [X, H']] + \dots \equiv \\ &\equiv H' + \frac{e^{\text{ad } H} - 1}{\text{ad } H} ([X, H']) \equiv \\ &\equiv H' + a_\beta \beta(H) \frac{1 - e^{\beta(H)}}{\beta(H)} X_\beta \mod \mathfrak{g}(\beta). \end{aligned}$$

Значит, $\text{Ad}(\exp(H+X))H' \neq H'$, что противоречит равенству $\exp(H+X) = \exp H$.

Найдем теперь дифференциал $d\psi_X$ в произвольной точке $X \in \mathfrak{n}_0$. Поскольку ψ является композицией трех отображений, а именно $\psi = L_{\exp(-H)} \circ \exp \circ L_H$, то

$$d\psi_X = dL_{\exp(-H)} \circ d\exp_{(H+X)} \circ dL_H.$$

Используя формулу для $d\exp_Z$ (теорема 1.7 гл. II), получаем

$$d\psi_X(Y) = dL_{\psi(X)} \circ \frac{1 - e^{-\operatorname{ad}(H+X)}}{\operatorname{ad}(H+X)}(Y) \quad (Y \in \mathfrak{n}_0). \quad (12)$$

Ограничение эндоморфизма $\operatorname{ad}(H+X)$ на $\mathfrak{n}_0$ является эндоморфизмом пространства $\mathfrak{n}_0$. Продолжим этот эндоморфизм до эндоморфизма D пространства $\mathfrak{n}$. Если записать D в базисе X_α ($\alpha \in P_+$) пространства $\mathfrak{n}$, то получим треугольную матрицу с элементами $\alpha(H)$ ($\alpha \in P_+$) на диагонали. Отсюда следует, что

$$\det \left(\frac{1 - e^{-D}}{D} \right) = \prod_{\alpha \in P_+} \frac{1 - e^{-\alpha(H)}}{\alpha(H)} \neq 0,$$

так как $H \in \mathfrak{h}'_0$. Тем самым доказана регулярность отображения ψ .

Пусть теперь $V = \psi(\mathfrak{n}_0)$, и пусть U — множество таких $X \in \mathfrak{n}_0$, что $\exp X \in V$. Из регулярности отображения ψ следует, что V открыто в N . Значит, U открыто в $\mathfrak{n}_0$. Для доказательства теоремы остается показать, что $U = \mathfrak{n}_0$. Отображение $\zeta: X \rightarrow (\exp X)\psi^{-1}$ ($X \in U$) есть аналитическое отображение многообразия U на $\mathfrak{n}_0$. Так как $\psi \circ \zeta = \exp$, то дифференциал $d\zeta_X$ получается из формулы (12)

$$d\zeta_X(Y) = \frac{\operatorname{ad}(H + \zeta(X))}{1 - \exp(-\operatorname{ad}(H + \zeta(X)))} \circ \frac{1 - \exp(\operatorname{ad} X)}{\operatorname{ad} X}(Y), \quad (13)$$

где $X \in U$, $Y \in \mathfrak{n}_0$. Фиксируем теперь $X \in U$ и обозначим через T множество таких $t \in \mathbf{R}$, что $tX \in U$. Обозначим через T_0 компоненту множества T , содержащую 0. Рассмотрим теперь кривую $Z(t)$ в $\mathfrak{n}_0$, заданную формулой

$$Z(t) = \zeta(tX) \quad (t \in T_0).$$

Имеем $\frac{dZ(t)}{dt} = d\zeta_{tX}(X)$ и, используя равенство (13), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \frac{\operatorname{ad}(H + Z(t))}{1 - \exp(-\operatorname{ad}(H + Z(t)))} X \quad (t \in T_0).$$

Ограничение эндоморфизма $1 - \operatorname{Ad}((\exp H \exp tX)^{-1})$ на $\mathfrak{n}_0$ есть (для каждого $t \in \mathbf{R}$) эндоморфизм $D(t)$ пространства $\mathfrak{n}_0$. Если $t \in T_0$, то $D(t)$ совпадает с $1 - \exp(-\operatorname{ad}(H + Z(t)))$. Если продолжить $D(t)$ ($t \in \mathbf{R}$) на $\mathfrak{n}$ и записать его матрицей в базисе X_α ($\alpha \in P_+$), то получится треугольная матрица с диагональными элементами

$1 - e^{-\alpha(H)}$ ($\alpha \in P_+$). Значит, $\det D(t) = \prod_{\alpha \in P_+} (1 - e^{-\alpha(H)}) \neq 0$, так что $D(t)$ обладает обратным эндоморфизмом. Пусть $|\cdot|$ — некоторая норма в $\mathfrak{g}_0$, и пусть $\|D(t)^{-1}\| = \sup \frac{|D(t)^{-1}(Z)|}{|Z|}$, где Z пробегает $\mathfrak{n}_0$. Тогда, очевидно,

$$\frac{d}{dt} |Z(t)| \leq \left| \frac{dZ(t)}{dt} \right|,$$

$$|\operatorname{ad}(H + Z(t))X| = |\operatorname{ad}X(H) + \operatorname{ad}X(Z(t))| \leq p(1 + |Z(t)|)$$

для всех $t \in T_0$, где p — положительная константа. Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt} |Z(t)| \leq p \|D(t)^{-1}\| (1 + |Z(t)|) \quad (t \in T_0).$$

Множество T_0 является открытым интервалом. Для доказательства того, что $U = \mathfrak{n}_0$, достаточно для произвольного X доказать, что $T_0 = \mathbb{R}$. Если это не так, то пусть t_0 — один из концов интервала T_0 . Тогда $t_0 \notin T_0$ и, не уменьшая общности, можно считать, что $t_0 > 0$. Существует такая константа M , что $p \|D(t)^{-1}\| \leq M$ для $0 \leq t < t_0$. В результате получается неравенство

$$\frac{d}{dt} |Z(t)| \leq M(1 + |Z(t)|) \quad (0 \leq t < t_0),$$

из которого путем последовательного интегрирования выводим, что

$$|Z(t)| \leq e^{Mt} - 1 + M \frac{(tM)^n}{n!} \max_{0 \leq s \leq t} |Z(s)| \quad (0 \leq t < t_0).$$

При $n \rightarrow \infty$ получаем

$$|Z(t)| \leq e^{Mt} \quad (0 \leq t < t_0).$$

Пусть (t_k) — последовательность, сходящаяся к t_0 снизу. Тогда последовательность $Z(t_k)$ ограничена. Переходя в случае нужды к подпоследовательности последовательности (t_k) , можно допустить, что $Z(t_k)$ сходится к некоторому элементу $Z \in \mathfrak{n}_0$. Тогда

$$\exp t_0 X = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(Z(t_k)) = \psi(Z) \in V,$$

откуда $t_0 \in T_0$. Это противоречие доказывает теорему.

Следствие 4.8. Предположим, что $H \in \mathfrak{h}'_0$ и $h = \exp H$. Тогда отображение $\xi: \mathfrak{n} \rightarrow h^{-1}\mathfrak{n}h$ является аналитическим диффеоморфизмом многообразия N на себя.

Это утверждение непосредственно следует из последних двух результатов. Действительно, $\xi = \psi \circ \varphi$.

Замечание. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ играет незначительную роль в трех последних результатах. В соответствии с этим их можно обобщить.

§ 5. Разложения в целом

Теорема 5.1. Пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{h}_{p_0} + \mathfrak{n}_0$ — разложение Ивасава полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ над $\mathbf{R}$. Пусть G — некоторая связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_0$, и пусть K, A_p, N — аналитические подгруппы группы G с алгебрами Ли $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{h}_{p_0}$ и $\mathfrak{n}_0$ соответственно. Тогда отображение

$$\Phi: (k, a, n) \rightarrow kan \quad (k \in K, a \in A_p, n \in N)$$

является аналитическим диффеоморфизмом многообразия $K \times A_p \times N$ на G .

Группы A_p и N односвязны.

Мы начнем с доказательства общей леммы (Хариш-Чандра [4], стр. 213), которая будет также полезна в дальнейшем.

Лемма 5.2. Пусть U — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{u}$. Предположим, что $\mathfrak{u}$ разложена в прямую сумму $\mathfrak{u} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{h}$ — подалгебры алгебры $\mathfrak{u}$ (не обязательно идеалы). Пусть M и N — аналитические подгруппы группы U с алгебрами Ли $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно. Тогда отображение $\alpha: (m, h) \rightarrow mh$ ($m \in M, h \in N$) многообразия $M \times N$ в U всюду регулярно.

Доказательство. Как обычно, обозначим через L_x левый сдвиг на элемент группы x . Касательный вектор к кривой $x \exp tX$ в точке x равен $dL_x(X)$. отождествим группы N и M соответственно с подгруппами (e, N) и (M, e) прямого произведения $M \times N$. Далее, касательное пространство $(M \times N)_{(m, h)}$ отождествляется с прямой суммой $M_m + N_h$ ($m \in M, h \in N$).

Пусть $Y \in \mathfrak{m}, Z \in \mathfrak{h}$. Тогда

$$\alpha(m \exp tY, h) = mh \exp(t \operatorname{Ad}(h^{-1})Y) \quad (t \in \mathbf{R}),$$

$$\alpha(m, h \exp tZ) = mh \exp tZ.$$

Отсюда следует, что

$$d\alpha_{(m, h)}(dL_m Y, dL_h Z) = dL_{mh}(\operatorname{Ad}(h^{-1})Y + Z). \quad (1)$$

Предположим теперь, что $\operatorname{Ad}(h^{-1})Y + Z = 0$. Тогда $Y + \operatorname{Ad}(h)Z = 0$. Поскольку $\operatorname{Ad}(h)Z \in \mathfrak{h}$, то $Y = Z = 0$. Тем самым лемма доказана.

Пусть G_0 — присоединенная группа алгебры $\mathfrak{g}_0$. Как обычно, отождествим $\operatorname{ad}(\mathfrak{g}_0)$ и $\mathfrak{g}_0$. Пусть K_0, A_0, N_0 и S_0 — аналитические подгруппы группы G_0 с алгебрами Ли $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{h}_{p_0}, \mathfrak{n}_0$ и $\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{h}_{p_0} + \mathfrak{n}_0$ соответственно. Сначала мы докажем теорему 5.1 для группы G_0 . Элементы группы G_0 являются эндоморфизмами пространства $\mathfrak{g}_0$. Продолжим их на комплексную алгебру $\mathfrak{g}$. В базисе (X_i) алгебры $\mathfrak{g}$, построенном в лемме 3.5, элементы группы K_0 представляются унитарными матрицами, группа A_0 состоит из положительных

диагональных матриц, а элементы группы N_0 представляются нижними треугольными матрицами с диагональными элементами, равными 1. Но если треугольная матрица с положительными диагональными элементами унитарна, то она должна быть единичной матрицей. Отсюда следует, что отображение

$$(k, a, n) \rightarrow kan \quad (k \in K_0, a \in A_0, n \in N_0)$$

многообразия $K_0 \times A_0 \times N_0$ в G_0 взаимно однозначно. Группа A_0 , очевидно, является односвязной замкнутой подгруппой в G_0 . Из следствия 4.4 и леммы 4.5 непосредственно вытекает, что экспоненциальное отображение для матриц дает аналитический диффеоморфизм алгебры Ли всех нижних треугольных матриц с нулями на диагонали на группу Ли всех нижних треугольных матриц с диагональными элементами, равными 1. Отсюда следует, что N_0 есть замкнутая односвязная подгруппа в G_0 . Множество $A_0N_0 = \{an \mid a \in A_0, n \in N_0\}$ является подгруппой в G_0 . Так как a является диагональю матрицы an и так как A_0 замкнута в G_0 , то очевидно, что группа A_0N_0 есть замкнутая подгруппа в G_0 и, следовательно, аналитическая подгруппа в G_0 . Но по лемме 5.2 отображение $(a, n) \rightarrow an$ является диффеоморфизмом группы $A_0 \times N_0$ на A_0N_0 . Значит, $\dim A_0N_0 = \dim S_0$. Очевидно, $A_0N_0 \subset S_0$. Поэтому $A_0N_0 = S_0$.

Рассмотрим теперь риманово глобально симметрическое пространство $M = G_0/K_0$. Пусть R — подгруппа, состоящая из тех элементов группы G_0 , которые оставляют неподвижной каждую точку из M . Тогда мы знаем (замечание 2 предложения 3.4 гл. IV), что факторгруппа G_0/R является замкнутой подгруппой группы $I(M)$ всех изометрий многообразия M . Естественное отображение группы G_0 на G_0/R отображает S_0 на некоторую подгруппу S_* в G_0/R . Из того, что S_0 замкнута в G_0 , а R компактна, следует, что S_* замкнута в G_0/R и, значит, является замкнутой подгруппой группы $I(M)$. Обозначим через p точку в M , представляемую смежным классом $\{K_0\}$. Ясно, что $\dim S_* = \dim M$, так что, в силу леммы 4.1 гл. II, орбита $S_* \cdot p$ является открытым подмножеством в M . Но, будучи орбитой замкнутой подгруппы группы $I(M)$, $S_* \cdot p$ является замкнутым подмножеством в M (теорема 2.2 гл. IV)¹⁾. Значит, $S_* \cdot p = M$. В терминах группы G_0 этот результат означает, что каждый $g \in G_0$ можно записать в виде $g = sk$, где $s \in S_0$, $k \in K_0$. Переходя к обратным элементам, получаем, что каждый элемент $g_1 \in G_0$ можно записать в виде $g_1 = k_1s_1$ ($k_1 \in K_0$, $s_1 \in S_0$). Поэтому $(k, a, n) \rightarrow kan$ есть взаимно однозначное и регулярное отображение «на» группы $K_0 \times A_0 \times N_0$ в G_0 , т. е. является диффеоморфизмом.

1) Или по предложению 4.4 гл. II.

Для доказательства теоремы 5.1 в полной общности обозначим через π естественное отображение группы G на G_0 . Ядром гомоморфизма π является центр Z группы G . Поскольку Z дискретен, (G, π) есть накрывающая группа группы G_0 . Компоненты единицы групп $\pi^{-1}(A_0)$ и $\pi^{-1}(N_0)$ совпадают с A_p и N соответственно. Группы A_0 и N_0 односвязны и имеют накрывающие группы (A_p, π) и (N, π) . Значит, $A_p \cap Z = N \cap Z = \{e\}$ и A_p и N односвязны. Если положить $\tilde{K} = \pi^{-1}(K_0)$, то, очевидно, $G = \tilde{K}A_pN$, причем каждый элемент g можно однозначно записать в виде $g = kan$ ($k \in \tilde{K}$, $a \in A_p$, $n \in N$). Здесь a и n непрерывно зависят от g , так как π гомеоморфно отображает A_p на A_0 и N на N_0 . Значит, k непрерывно зависит от g . Следовательно, A_pN и KA_pN замкнуты в G . Регулярность отображения Φ вытекает из двукратного применения леммы 5.2: сначала к подгруппам A_p и N группы A_pN , а затем к подгруппам K и A_pN группы G . Значит, KA_pN открыто и замкнуто в G , откуда $G = KA_pN$. Тем самым доказательство теоремы 5.1 закончено.

Предложение 5.3. В обозначениях теоремы 5.1 положим $S = A_pN$, $P = \exp \mathfrak{p}_0$. Тогда S есть замкнутая разрешимая подгруппа в G , а P — замкнутое подмногообразие в G . Обозначим через $\tilde{\theta}$ автоморфизм группы G , для которого $d\tilde{\theta} = \theta$. Тогда отображение

$$\psi: s \longrightarrow \tilde{\theta}(s)s^{-1} \quad (s \in S)$$

является диффеоморфизмом группы S на P .

Доказательство. Недоказанным остается только последнее утверждение. Каждый элемент $g \in G$ можно записать в виде $g = rk$, $r \in P$, $k \in K$. Тогда $\tilde{\theta}(g) = r^{-1}k$, так что $\tilde{\theta}(g)g^{-1} = r^{-2} \in P$. В частности, $\psi(S) \subset P$. Отображение ψ взаимно однозначно. Действительно, если $\tilde{\theta}(s_1)s_1^{-1} = \tilde{\theta}(s_2)s_2^{-1}$ ($s_1, s_2 \in S$), то $\tilde{\theta}(s_2^{-1}s_1) = s_2^{-1}s_1$. Значит $s_2^{-1}s_1 \in K \cap S = \{e\}$, откуда $s_1 = s_2$. Далее, $\psi(S) = P$. Действительно, если задан элемент $p \in P$, то существует единственный $X \in \mathfrak{p}_0$, такой, что $p = \exp X$. По теореме 5.1 существуют единственные элементы $k \in K$ и $s \in S$, такие, что $\exp \frac{1}{2}X = ks^{-1}$. Тогда $p = \tilde{\theta}(s)s^{-1}$, что нам и нужно. Построенное отображение $\psi^{-1}: p \longrightarrow s$ дифференцируемо, так как оно составлено из отображений

$$p \xrightarrow{\exp^{-1}} X \longrightarrow \frac{X}{2} \longrightarrow \exp \frac{X}{2} \longrightarrow s.$$

§ 6. Комплексный случай

В дальнейшем нам будет удобно иметь разложение Ивасавы (теоремы 3.4 и 5.1), установленное для случая, когда рассматриваемая полупростая алгебра Ли обладает комплексной структурой.

Предположим, что $\mathfrak{g}_0$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbf{R}$ с комплексной структурой J . Это значит просто (гл. III, § 6), что существует эндоморфизм J пространства $\mathfrak{g}_0$, для которого

$$J^2 = -I,$$

$$(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_0} X) J = J \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_0} X \quad (X \in \mathfrak{g}_0).$$

Как показано в § 6 гл. III, множество $\mathfrak{g}_0$ можно рассматривать как алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ над $\mathbf{C}$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ получается из $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ путем ограничения основного поля до $\mathbf{R}$, иными словами, $(\tilde{\mathfrak{g}}_0)^{\mathbf{R}} = \mathfrak{g}_0$. Пусть $\mathfrak{c}$ — некоторая компактная вещественная форма полупростой алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}_0$. Тогда

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{c} + J\mathfrak{c}$$

есть разложение Картана алгебры $\mathfrak{g}_0$ (следствие 7.5 гл. III). Поэтому можно провести конструкцию из § 3 для $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{c}$ и $\mathfrak{p}_0 = J\mathfrak{c}$. Максимальное абелево подпространство $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ имеет вид $J\mathfrak{a}_0$, где $\mathfrak{a}_0$ — максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{c}$. Тогда $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{a}_0 + J\mathfrak{a}_0$ есть максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{g}_0$. Поскольку $J\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}_0$, алгебра Ли $\mathfrak{h}_0$ обладает комплексной структурой, унаследованной от $\mathfrak{g}_0$. Соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{h}_0$ над $\mathbf{C}$ является подалгеброй Картана в $\tilde{\mathfrak{g}}_0$. Обозначим через $\tilde{\Delta}$ множество ненулевых корней алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ по отношению к $\tilde{\mathfrak{h}}_0$. В соответствии с употреблявшимися раньше обозначениями, положим

$$(\tilde{\mathfrak{h}}_0)^* = \sum_{\alpha \in \tilde{\Delta}} \mathbf{R} H_\alpha.$$

В силу леммы 3.1, $(\tilde{\mathfrak{h}}_0)^* = J\mathfrak{a}_0$. Предположим теперь, что пространство, двойственное к (вещественному) векторному пространству $J\mathfrak{a}_0$, превращено в упорядоченное векторное пространство. Обозначим через $(\tilde{\Delta})^+$ множество положительных корней из $\tilde{\Delta}$ по отношению к этому упорядочению. Положим

$$\tilde{\mathfrak{n}}_+ = \sum_{\alpha \in (\tilde{\Delta})^+} \tilde{\mathfrak{g}}_0^\alpha \text{ и } \mathfrak{n}_+ = (\tilde{\mathfrak{n}}_+)^{\mathbf{R}}.$$

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + i\mathfrak{g}_0$ — комплексная оболочка вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$. Продолжим J до ($\mathbf{C}$ -линейного) эндоморфизма пространства $\mathfrak{g}$. Алгебра $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + i\mathfrak{h}_0$ является подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}$ (лемма 3.2). Обозначим через Δ множество ненулевых корней

алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{h}$ и, как раньше, положим

$$\mathfrak{h}^* = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} H_{\alpha}.$$

Тогда, согласно лемме 3.2, $\mathfrak{h}^* = J\mathfrak{a}_0 + i\mathfrak{a}_0$. Очевидно, двойственное пространство к $\mathfrak{h}^*$ можно превратить в упорядоченное векторное пространство таким образом, чтобы упорядочения в пространствах, двойственных к $(\tilde{\mathfrak{h}}_0)^*$ и $\mathfrak{h}^*$, были совместимы. Обозначим через Δ^+ множество положительных по отношению к этому упорядочению корней из Δ . В § 3 мы разбили множество Δ^+ на два подмножества P_- и P_+ , где P_- содержит в точности те корни из Δ^+ , которые тождественно равны 0 на $\mathfrak{h}_{p_0}$.

Лемма 6.1. В рассматриваемом случае $\Delta^+ = P_+$, так что P_- пусто.

Доказательство. Равенство $J[X, Y] = [JX, Y]$ имеет место для всех $X, Y \in \mathfrak{g}_0$ и, значит, для всех $X, Y \in \mathfrak{g}$, поскольку J является $\mathbb{C}$ -линейным. Пусть теперь α — ненулевой корень алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$. Выберем ненулевой вектор $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}$. Пусть $H \in \mathfrak{h}$. Из равенства $[H, X_{\alpha}] = \alpha(H) X_{\alpha}$ следует, что $[H, JX_{\alpha}] = \alpha(H) JX_{\alpha}$. Значит, $JX_{\alpha} = c X_{\alpha}$, где c — комплексное число. С другой стороны, $J\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ и $\alpha(JH) X_{\alpha} = [JH, X_{\alpha}] = [H, JX_{\alpha}] = c\alpha(H) X_{\alpha}$. Значит, $\alpha(JH) = c\alpha(H)$ для всех $H \in \mathfrak{h}$. Из этого равенства видно, что α не может тождественно равняться 0 на пространстве $J\mathfrak{a}_0$ (играющем роль пространства $\mathfrak{h}_{p_0}$). Тем самым лемма доказана.

Лемма 6.2. Положим $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^{\alpha}$. Тогда $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{n}_+$.

Доказательство. Пусть $\gamma \in (\tilde{\Delta})^+$ и $Z_{\gamma} \neq 0$ в $\tilde{\mathfrak{g}}_0^{\gamma}$. Тогда $[H, Z_{\gamma}] = \gamma(H) Z_{\gamma}$ для всех $H \in \mathfrak{h}_0$. Если продолжить γ до $\mathbb{C}$ -линейной функции γ^* на $\mathfrak{h}$, то получим равенство $[H, Z_{\gamma}] = \gamma^*(H) Z_{\gamma}$ для всех $H \in \mathfrak{h}$. Значит, $\gamma^* \in \Delta$ и, в силу совместимости упорядочений, $\gamma^* \in \Delta^+$. Отсюда $Z_{\gamma} \in \mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{n}_+ \subset \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_0$. С другой стороны, число элементов множества Δ^+ в два раза больше числа элементов множества $(\tilde{\Delta})^+$. Отсюда следует, что

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n}_+ = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{n} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_0.$$

Тем самым лемма доказана. Теперь можно переформулировать теоремы 3.4 и 5.1 (в упрощенных обозначениях).

Теорема 6.3. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ — алгебра Ли $\mathfrak{g}$, рассматриваемая как алгебра Ли над $\mathbb{R}$. Пусть J — комплексная структура на $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, соответствующая умножению на i в алгебре $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{u}$ — некоторая компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$ — некоторая максимальная абелева

подалгебра в $\mathfrak{u}$. Тогда алгебра $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + i\mathfrak{a}$ является подалгеброй Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть Δ — множество ненулевых корней алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{h}$, и пусть Δ^+ — множество положительных корней по отношению к некоторому упорядочению множества Δ . Если обозначить через $\mathfrak{n}_+$ пространство $\sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha$, рассматриваемое как вещественное подпространство в $\mathfrak{g}^R$, то имеет место следующее прямое разложение:

$$\mathfrak{g}^R = \mathfrak{u} + J\mathfrak{a} + \mathfrak{n}_+.$$

Пусть G_c — некоторая связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}^R$, и пусть U , A^* и N_+ — аналитические подгруппы группы G_c с алгебрами Ли $\mathfrak{u}$, $J\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{n}_+$ соответственно. Тогда отображение

$$(u, a, n) \rightarrow uan \quad (u \in U, a \in A^*, n \in N_+)$$

является аналитическим диффеоморфизмом многообразия $U \times A^* \times N_+$ на G_c . Группы A^* и N_+ односвязны.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть G — связная полупростая группа Ли, алгебра Ли которой обладает комплексной структурой. Показать, что G имеет конечный центр.

2. (Обозначения см. в § 2 главы V.) Группа $SO(p) \times SO(2)$ является максимальной компактной подгруппой в $SO_0(p, 2)$. Вывести из теоремы 1.1, что универсальная накрывающая группа группы $SO_0(p, 2)$ имеет бесконечный центр ($p \geq 1$).

3. Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, и пусть G — полупростая аналитическая подгруппа в $GL(V)$. Тогда (см. Хариш-Чандра [2]):

- (i) G имеет конечный центр;
- (ii) каждый непрерывный гомоморфизм группы G на себя является аналитическим изоморфизмом;
- (iii) в утверждениях (i) и (ii) предположение полупростоты группы G нельзя опустить.

4. Пусть A — некоторое множество изометрий полного односвязного риманова многообразия M отрицательной кривизны. Тогда

(i) Множество точек, неподвижных относительно A , если оно непусто, образует связное вполне геодезическое подмногообразие многообразия M (обобщение см. у Кобаяси [3]).

(ii) Предположим, что M — риманово глобально симметрическое пространство некомпактного типа, $M = G/K$ ($G = I_0(M)$), и что A — замкнутая связная подгруппа группы K с алгеброй

Ли $\mathfrak{a}$. Показать, что множеством неподвижных точек подгруппы A является $\text{Exp } \mathfrak{b}$, где

$$\mathfrak{b} = \{X \in \mathfrak{p}_0 \mid \text{Ad}_G(\exp(-X))\mathfrak{a} \subset \mathfrak{k}_0\}.$$

(iii) Показать, что множество $\mathfrak{b}$ в (ii) можно записать в виде

$$\mathfrak{b} = \{X \in \mathfrak{p}_0 \mid [RX, \mathfrak{a}] = \{0\}\}.$$

5. Пусть M — риманово глобально симметрическое пространство некомпактного типа, o — некоторая точка в M . Обозначим через σ автоморфизм $g \rightarrow s_0 g s_0$ группы $I_0(M)$. Допустим, что на $I_0(M)$ задана псевдориманова структура, индуцированная формой Киллинга. Тогда отображение

$$p \rightarrow g\sigma(g^{-1}) \quad (g \cdot o = p)$$

есть диффеоморфизм многообразия M на замкнутое вполне геодезическое подмногообразие S в $I_0(M)$. При этом отображении действие элемента $x \in I_0(M)$ на M соответствует диффеоморфизму $s \rightarrow xs\sigma(x^{-1})$ многообразия S .

ЗАМЕЧАНИЯ

§ 1—2. Большая часть изложенных здесь результатов принадлежит Э. Картану [10]; см. также Мостов [1, 3]. Теорему 1.4 впервые доказал Мостов в [3]. Его доказательство несколько отличается от данного в тексте и, как и многие результаты той же работы, основано на вложении $\varphi: gK \rightarrow \text{Ad}_G(g\sigma(g^{-1}))$ многообразия G/K в пространство P положительно определенных симметрических матриц. Пространство P само является римановым глобально симметрическим. Действительно, $P = GL(n, \mathbb{R})/O(n)$. Дальнейшее изучение этого вложения и следствия из него см. у Сатаке [3]. Теорема сопряженности Э. Картана (теорема 2.1) была распространена Ивасавой [1] на все связные локально компактные группы.

§ 3—5. Теорема 3.4 и ее глобальный аналог, теорема 5.1, принадлежат Ивасаве [1]; см. также Хариш-Чандра [4], стр. 223. В этих теоремах подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$ выбиралась таким образом, чтобы $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ имело максимальную размерность. На другие подалгебры Картана теоремы распространил Хариш-Чандра [10], стр. 212; см. также Сатаке [3], § 3. По поводу теоремы 4.2 см. Чэнь [1]. Лемма 4.6 и теорема 4.7 принадлежат Хариш-Чандре [5].

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА КОМПАКТНОГО ТИПА

В противоположность положению, имеющему место для некомпактного типа, с одной и той же ортогональной симметрической алгеброй Ли $(\mathfrak{u}, \theta)$ компактного типа могут быть связаны многие римановы глобально симметрические пространства U/K . Число этих пространств конечно, и они имеют одно и то же универсальное накрывающее пространство. Все они могут быть описаны при помощи центра универсальной накрывающей группы группы U (теорема 8.1).

Весь материал главы концентрируется вокруг максимального абелева подпространства $\mathfrak{h}_p^*$ вместе с системой корней Δ_p . Последние определяют диаграмму $D(U, K)$, в которой содержится некоторая информация о пространстве U/K , например, расположение его сопряженных точек. В § 2—3 изучаются элементарные свойства группы Вейля $W(U, K)$ и диаграммы. Однако для классификации пространств U/K требуется описание фундаментальной группы группы U в терминах алгебры $\mathfrak{u}$. Здесь появляется сингулярное множество группы U . Для строгого доказательства того, что сингулярное множество не влияет на фундаментальную группу, нужны некоторые факты из теории размерности, собранные в § 9. Теорию § 2—3 можно применить к самой группе U (рассматриваемой как симметрическое пространство), что дает метод для выявления некоторых глобальных свойств группы U из диаграммы $D(U)$, рассматриваемой вместе с единичной решеткой t_e . Основная теорема 7.2, лежащая в основе описания всех пространств U/K , следует теперь из сравнения диаграмм $D(U)$ и $D(U, K)$.

§ 1. Контраст между компактным и некомпактным типами

Пусть $\mathfrak{u}$ — компактная полупростая алгебра Ли и θ — инволютивный автоморфизм алгебры $\mathfrak{u}$. Тогда θ однозначно продолжается до (комплексного) инволютивного автоморфизма алгебры $\mathfrak{g}$, комплексной оболочки алгебры $\mathfrak{u}$. Обозначим это продолжение также через θ . Обозначим через $(\mathfrak{g}_0, s)$ ортогональную симметрическую алгебру Ли, двойственную к $(\mathfrak{u}, \theta)$. Тогда $\mathfrak{g}_0$ — вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$ и s — в точности ограничение автоморфизма θ на $\mathfrak{g}_0$. Как обычно, мы пользуемся обозначениями, принятыми в § 5 гл. V. Тогда имеют место прямые разложения:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_*,$$

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$$

на собственные подпространства автоморфизма θ . Напомним, что пара (U, K) называется связанной с алгеброй $(\mathfrak{u}, \theta)$, если U — связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{u}$ и K — подгруппа Ли группы U с алгеброй Ли $\mathfrak{k}_0$. Такая пара называется парой компактного типа. Эта пара называется римановой симметрической парой, если подгруппа K замкнута, $\text{Ad}_U(K)$ компактна и если существует такой аналитический инволютивный автоморфизм $\tilde{\theta}$ группы U , что $(K_{\tilde{\theta}})_0 \subset K \subset K_{\tilde{\theta}}$. Этот автоморфизм $\tilde{\theta}$ обязательно является единственным и $d\tilde{\theta} = \theta$. Наконец, риманово глобально симметрическое пространство M называется пространством компактного типа, если пара $(I_0(M), H)$ есть пара компактного типа, где H — подгруппа изотропии группы $I_0(M)$ в некоторой точке $o \in M$.

Предложение 1.1. Пусть $(\mathfrak{u}, \theta)$ — ортогональная симметрическая алгебра Ли компактного типа. Пусть (U, K) — произвольная пара, связанная с $(\mathfrak{u}, \theta)$. Тогда K компактна и $\text{Ad}_U(K) \mathfrak{p}_* \subset \mathfrak{p}_*$. Ограничение формы $-B$ на $\mathfrak{p}_* \times \mathfrak{p}_*$ порождает U -инвариантную риманову структуру на U/K , которая превращает U/K в риманово локально симметрическое пространство.

Доказательство. Обозначим через K_0 компоненту единицы группы K и через $N(K_0)$ — нормализатор подгруппы K_0 в U , т. е. множество таких $u \in U$, что $uK_0u^{-1} \subset K_0$. Группа K_0 есть замкнутая подгруппа группы U (предложение 3.6 гл. IV). Значит, $N(K_0)$ замкнута в U . Группа U компактна (теорема 6.9 гл. II), так что $N(K_0)$ компактна. Алгеброй Ли группы $N(K_0)$ является нормализатор $\mathfrak{n}(\mathfrak{k}_0)$ подалгебры $\mathfrak{k}_0$ в $\mathfrak{u}$, т. е. множество таких элементов $X \in \mathfrak{u}$, что $[RX, \mathfrak{k}_0] \subset \mathfrak{k}_0$. Если $X \in \mathfrak{n}(\mathfrak{k}_0) \cap \mathfrak{p}_*$, то $[RX, \mathfrak{k}_0] \subset \mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{p}_* = \{0\}$. Применяя следствие 1.7 гл. V, получаем отсюда, что $X = 0$, так что $\mathfrak{n}(\mathfrak{k}_0) = \mathfrak{k}_0$. Группа $N(K_0)$ имеет конечное число компонент, и тем же свойством обладает группа K , так как $K \subset N(K_0)$. Значит, K компактна. Группа $\text{Ad}_U(K)$ оставляет подалгебру $\mathfrak{k}_0$, а значит, и ее ортогональное дополнение $\mathfrak{p}_*$, инвариантной. Локальная симметричность пространства U/K следует из предложения 3.6 гл. IV (даже если K не связна).

Теперь вопрос заключается в следующем: в каком случае пространство U/K является римановым глобально симметрическим? Ответ будет дан в настоящей главе (теорема 8.1). Он сложнее, чем ответ на аналогичный вопрос для некомпактного типа, где G/K всегда является глобально симметрическим (теорема 1.1 гл. VI). Для начала мы установим один отрицательный результат, который покажет, какого рода трудности возникают при рассмотрении компактного типа.

Предложение 1.2. Пусть $(\mathfrak{u}, \theta)$ — ортогональная симметрическая алгебра Ли компактного типа. Пусть (U, K) — произвольная пара, связанная с $(\mathfrak{u}, \theta)$. Тогда

- (i) центр группы U , вообще говоря, не содержится в K ;
- (ii) даже если U/K является римановым глобально симметрическим пространством, группа K не обязана быть связной;
- (iii) даже если U/K является римановым глобально симметрическим, автоморфизм θ не обязательно соответствует некоторому автоморфизму группы U .

Доказательство. Пример к утверждению (i) дают группы¹⁾ $U = \mathbf{SU}(n)$ ($n \geq 3$), $K = \mathbf{SO}(n)$ и инволютивный автоморфизм $u \rightarrow \bar{u}$ (комплексное сопряжение) группы U . Для доказательства утверждения (ii) рассмотрим двумерное вещественное проективное пространство $\mathbf{P}^2$, т. е. сферу $\mathbf{S}^2$, в которой отождествлены все противоположные точки. Тогда $\mathbf{P}^2 = U/K$, где $U = \mathbf{SO}(3)$ и K — подгруппа группы U , относительно которой инвариантна некоторая прямая l , проходящая через 0. Группа K порождается вращениями вокруг l и отражением в прямой, проходящей через 0 и перпендикулярной к l . Здесь U/K является римановым глобально симметрическим пространством и K состоит из двух компонент. Для доказательства утверждения (iii) положим $\tilde{U} = \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2)$ и обозначим через $\tilde{\theta}$ автоморфизм $(g_1, g_2) \rightarrow (g_2, g_1)$ группы $\tilde{U}$. Подгруппа $\tilde{K}$, состоящая из неподвижных точек, изоморфна $\mathbf{SU}(2)$. Центр группы $\mathbf{SU}(2)$ есть циклическая группа порядка 2. Пусть z — ее образующая, и пусть S — подгруппа центра $\tilde{Z}$ группы $\tilde{U}$, состоящая из двух элементов (e, e) , (e, z) . Положим $U = \tilde{U}/S$ и $K = \pi(\tilde{K})$, где π — естественное отображение группы $\tilde{U}$ на U . Пара (U, K) связана с $(\mathfrak{u}, \theta)$, где $\mathfrak{u}$ — алгебра Ли группы $\tilde{U}$ и θ — автоморфизм алгебры $\mathfrak{u}$, индуцированный автоморфизмом $\tilde{\theta}$. Ядро гомоморфизма Ad_U состоит из двух элементов (так как $\tilde{Z}$ содержит четыре элемента). Эти элементы суть S и $(z, z)S$, и оба они принадлежат K . Значит, $U/K = \text{Ad}_U(U)/\text{Ad}_U(K)$, а последнее пространство является глобально симметрическим, так как автоморфизм θ индуцирует некоторый автоморфизм группы $\text{Int}(\mathfrak{u}) = \text{Ad}_U(U)$. С другой стороны, поскольку $\tilde{\theta}(S) \not\subset S$, следующая лемма показывает, что θ не соответствует никакому автоморфизму группы U .

Лемма 1.3²⁾. Пусть L — связная группа Ли, и пусть (L^*, π) — универсальная накрывающая группа группы L . Обозна-

¹⁾ Относительно обозначения $\mathbf{SU}(n)$ см. гл. IX, § 4.

²⁾ См. Берже [2], стр. 162.

чим через Z^* ядро гомоморфизма π . Пусть σ — некоторый аналитический автоморфизм группы L^* и $d\sigma$ — соответствующий автоморфизм алгебры Ли группы L . Тогда $d\sigma$ соответствует аналитическому автоморфизму группы L тогда и только тогда, когда $\sigma(Z^*) \subset Z^*$.

Доказательство. Если $\sigma(Z^*) \subset Z^*$, то σ индуцирует нужный нам автоморфизм группы $L^*/Z^* = L$. С другой стороны, предположим, что λ — такой автоморфизм группы L , что $d\lambda = d\sigma$. Рассмотрим отображения $\varphi = \pi \circ \sigma$ и $\psi = \lambda \circ \pi$ группы L^* на L . Тогда φ и ψ являются гомоморфизмами и $d\varphi = d\psi$. Следовательно, $\varphi = \psi$. Из того, что Z^* — ядро гомоморфизма π , следует, что $\sigma(Z^*) \subset Z^*$, и лемма доказана.

§ 2. Группа Вейля

Пусть $(\mathfrak{u}, \theta)$ — ортогональная симметрическая алгебра Ли компактного типа, и пусть (U, K) — некоторая пара, связанная с алгеброй $(\mathfrak{u}, \theta)$. Мы сохраняем обозначения § 1, но для простоты будем писать теперь Ad вместо Ad_U . Для каждого $X \in \mathfrak{p}_*$ обозначим через T_X ограничение эндоморфизма $(\text{ad } X)^2$ на $\mathfrak{p}_*$.

Обозначим через $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$ произвольное максимальное абелево подпространство в $\mathfrak{p}_*$. Тогда пространство $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} = i\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$ является максимальным абелевым подпространством в $\mathfrak{p}_0$. Пусть $\mathfrak{h}_0$ — некоторая максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{g}_0$, содержащая $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$, и пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, порожденная подалгеброй $\mathfrak{h}_0$. Тогда $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$ (лемма 3.2 гл. VI). Как в § 3 гл. VI, можно образовать подпространства $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}_0}$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}$ и $\mathfrak{h}^*$. Обозначим через Δ множество ненулевых корней алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{h}$. Обозначим через $\Delta_{\mathfrak{p}}$ множество корней из Δ , не равных тождественно 0 на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$. Как в § 3 гл. VI, обозначим через Δ^+ подмножество в Δ , образованное корнями, положительными по отношению к некоторому упорядочению множества Δ , причем это упорядочение задано при помощи некоторых совместимых упорядочений в пространствах, двойственных к $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ и $\mathfrak{h}^*$ соответственно. Пусть $P_+ = \Delta^+ \cap \Delta_{\mathfrak{p}}$. Наконец, обозначим через $\mathfrak{m}_0$ централизатор подпространства $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ (или $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$) в $\mathfrak{k}_0$.

Обозначим через M и M' соответственно централизатор и нормализатор подпространства $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$ в K . Другими словами,

$$M = \{k \in K \mid \text{Ad}(k)H = H \text{ для каждого } H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}\},$$

$$M' = \{k \in K \mid \text{Ad}(k)\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*} \subset \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}\}.$$

Ясно, что M является нормальным делителем в M' .

Предложение 2.1. Группы M и M' компактны и имеют одну и ту же алгебру Ли, а именно $\mathfrak{m}_0$.

Доказательство. Группы M и M' являются замкнутыми подгруппами в K и, значит, компактны. Очевидно, что M имеет в качестве алгебры Ли алгебру $\mathfrak{m}_0$. С другой стороны, пусть Y принадлежит $\mathfrak{L}(M')$, алгебре Ли группы M' . Тогда $[Y, H] \in \mathfrak{h}_{p*}$ для всех $H \in \mathfrak{h}_{p*}$, откуда

$$B(\operatorname{ad} H(Y), \operatorname{ad} H(Y)) = -B((\operatorname{ad} H)^2 Y, Y) = 0.$$

Значит, $[H, Y] = 0$ для всех $H \in \mathfrak{h}_{p*}$, так что $Y \in \mathfrak{m}_0$.

Определение. Факторгруппа M'/M называется группой Вейля пары (U, K) . Она обозначается через $W(U, K)$ (или просто W).

Замечание. Из предложения 2.1 ясно, что $W(U, K)$ — конечная группа. Отображение $k \rightarrow \operatorname{Ad}(k)$ ($k \in M'$) индуцирует изоморфизм группы $W(U, K)$ в $GL(\mathfrak{h}_{p*})$. Поэтому мы можем рассматривать $W(U, K)$ как группу (комплексных) линейных преобразований пространства $\mathfrak{h}_p$. Позже будет показано, что для фиксированного $\mathfrak{h}_{p*}$ группа $W(U, K)$ зависит только от алгебры $(\mathfrak{u}, \theta)$. С другой стороны, из леммы 6.3 гл. V ясно, что различные подпространства $\mathfrak{h}_{p*}$ приводят к изоморфным группам Вейля.

Предложение 2.2. Пусть $\mathfrak{a}$ — подмножество в $\mathfrak{h}_{p*}$, и пусть k — такой элемент группы K , что $\operatorname{Ad}(k)\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}_{p*}$. Тогда существует такой элемент $s \in W(U, K)$, что $s \cdot A = \operatorname{Ad}(k)A$ для каждого $A \in \mathfrak{a}$.

Доказательство. Центризатор $Z_{\mathfrak{a}}$ множества $\mathfrak{a}$ в U есть замкнутая подгруппа группы U . Ее алгеброй Ли является $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}}$, центризатор множества $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{u}$. Так как $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}}$ инвариантен относительно θ , то имеет место прямое разложение

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{z}_{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{p}_*.$$

Пространства $\mathfrak{h}_{p*}$ и $\operatorname{Ad}(k^{-1})\mathfrak{h}_{p*}$ являются максимальными абелевыми подпространствами в $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{p}_*$. В силу леммы 6.3 гл. V, существует элемент $H \in \mathfrak{h}_{p*}$, центризатор которого в $\mathfrak{p}_*$ совпадает с $\mathfrak{h}_{p*}$. Пусть X — некоторый фиксированный элемент из $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{p}_*$. Функция $z \rightarrow B(H, \operatorname{Ad}(z)X)$ ($z \in Z_{\mathfrak{a}} \cap K$) является вещественной и достигает своего минимума, так как группа $Z_{\mathfrak{a}} \cap K$ компактна. Если z_0 — точка минимума, то имеем

$$\left\{ \frac{d}{dt} B(H, \operatorname{Ad}(\exp tT) \operatorname{Ad}(z_0)X) \right\}_{t=0} = 0$$

для каждого $T \in \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{k}_0$. Отсюда следует, что

$$B(H, [T, \text{Ad}(z_0)X]) = -B([H, \text{Ad}(z_0)X], T) = 0 \quad (1)$$

для каждого $T \in \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{k}_0$. Поскольку $[H, \text{Ad}(z_0)X] \in \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{k}_0$, из формулы (1) вытекает, что $[H, \text{Ad}(z_0)X] = 0$, откуда, в силу выбора элемента H , следует, что $\text{Ad}(z_0)X \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$. Пусть, в частности, $X = H'$, где H' — элемент из $\text{Ad}(k^{-1})\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$, централизатор которого в $\mathfrak{p}_*$ совпадает с $\text{Ad}(k^{-1})\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$. Тогда из доказанного выше следует, что $H' \in \text{Ad}(z_0^{-1})\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$, так что

$$\text{Ad}(z_0^{-1})\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*} = \text{Ad}(k^{-1})\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}.$$

Следовательно, $kz_0^{-1} \in M'$. Поскольку $z_0 \in Z_\alpha \cap K$, ограничение автоморфизма $\text{Ad}(kz_0^{-1})$ на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$ является нужным нам элементом $s \in W(U, K)$.

Форма Киллинга B невырождена на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}} \times \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$. Для каждого $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{p}}$ существует единственный вектор¹⁾ $H_\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$, такой, что $B(H, H_\alpha) = \alpha(H)$ для всех $H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$. Из вещественности функции α на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ следует, что $H_\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$.

Лемма 2.3. Для каждого $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{p}}$ существуют такие ненулевые векторы $Y_\alpha \in \mathfrak{p}_0$, $Z_\alpha \in \mathfrak{k}_0$, что

$$\begin{aligned} [H, Y_\alpha] &= \alpha(H) Z_\alpha, \\ [H, Z_\alpha] &= \alpha(H) Y_\alpha \end{aligned}$$

для всех $H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$.

Доказательство. Существует такой вектор $X_\alpha \neq 0$ в $\mathfrak{g}$, что $[H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha$ для всех $H \in \mathfrak{h}$. Полагая $X_\alpha = X_1 + iX_2$, где $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_0$, и замечая, что функция α вещественна на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$, получим $[H, X_i] = \alpha(H) X_i$ для $H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$, $i = 1, 2$. По крайней мере один из векторов X_i не равен 0 и может быть представлен в виде $Y_\alpha + Z_\alpha$, где $Y_\alpha \in \mathfrak{p}_0$, $Z_\alpha \in \mathfrak{k}_0$. Приравнивая слагаемые, лежащие в $\mathfrak{p}_0$ и $\mathfrak{k}_0$ соответственно, получим

$$\begin{aligned} [H, Y_\alpha] &= \alpha(H) Z_\alpha, \\ [H, Z_\alpha] &= \alpha(H) Y_\alpha \end{aligned}$$

для $H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$. По крайней мере один из векторов Y_α, Z_α отличен от 0. Отсюда следует, что оба они отличны от 0, так как α не обращается тождественно в 0 на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$.

Форма $-B$ индуцирует на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$ положительно определенную квадратичную форму. Для каждого $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{p}}$ обозначим через s_α от-

¹⁾ Разумеется, этот вектор, вообще говоря, отличен от вектора, введенного в теореме 4.2 гл. III и обозначенного тем же символом.

ражение пространства $\mathfrak{h}_{p*}$ относительно гиперплоскости $\alpha(H) = 0$ пространства $\mathfrak{h}_{p*}$. Тогда s_α однозначно продолжается до комплексного линейного преобразования пространства $\mathfrak{h}_p$ и

$$s_\alpha(H) = H - 2 \frac{\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha, \quad H \in \mathfrak{h}_p.$$

Лемма 2.4. Пусть $\alpha \in \Delta_p$. Тогда $s_\alpha \in W(U, K)$.

Доказательство. Рассмотрим векторы Y_α, Z_α из леммы 2.3. Можно допустить, умножив в случае необходимости $Y_\alpha + Z_\alpha$ на вещественное число, что $B(Z_\alpha, Z_\alpha) = -1$. Тогда для $H \in \mathfrak{h}_p$

$$B(H, [Z_\alpha, Y_\alpha]) = -B([H, Y_\alpha], Z_\alpha) = \alpha(H),$$

$$[H, [Z_\alpha, Y_\alpha]] = -[Z_\alpha [Y_\alpha, H]] - [Y_\alpha [H, Z_\alpha]] = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что $[Z_\alpha, Y_\alpha] \in \mathfrak{h}_p$, после чего первое показывает, что $[Z_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$. Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\exp tZ_\alpha) H_\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (t \text{ad } Z_\alpha)^{2n} (H_\alpha) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (t \text{ad } Z_\alpha)^{2n+1} (H_\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n} (-\alpha(H_\alpha))^n H_\alpha + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1} (-\alpha(H_\alpha))^{n+1} Y_\alpha. \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha(H_\alpha) = B(H_\alpha, H_\alpha) > 0$, существует такое число $t_0 \in \mathbb{R}$, что $t_0 \sqrt{\alpha(H_\alpha)} = \pi$. Полагая $k_0 = \exp t_0 Z_\alpha$, получим

$$\text{Ad}(k_0) H_\alpha = -H_\alpha.$$

Далее, так как $[Z_\alpha, H] = 0$ при $\alpha(H) = 0$, то каждая точка гиперплоскости $\alpha(H) = 0$ в $\mathfrak{h}_{p*}$ неподвижна относительно $\text{Ad}(k_0)$. Значит, s_α есть ограничение автоморфизма $\text{Ad}(k_0)$ на $\mathfrak{h}_{p*}$. Тем самым лемма доказана.

Теперь нам потребуются некоторые факты о торовидных подгруппах (т. е. компактных абелевых связных подгруппах) компактных групп Ли.

Теорема 2.5. Пусть S — компактная связная группа Ли и T — торовидная подгруппа в S . Предположим, что a — элемент из S , перестановочный с каждым элементом подгруппы T . Тогда существует такой тор $T' \subset S$, что $T \subset T'$ и $a \in T'$.

Для доказательства нам нужна лемма о монотетических группах. Топологическая группа S называется монотетической, если существует такой элемент $x \in S$, что последовательность $e, x,$

$x^2, \dots$ плотна в S . В этом случае элемент x называется образующим. Любой тор монотетичен, в силу классической теоремы Кронекера.

Лемма 2.6. Пусть A — компактная абелева группа Ли, такая, что A/A_0 — циклическая группа (через A_0 обозначена компонента единицы группы A). Тогда A монотетична.

Доказательство. Группа A_0 является тором и, значит, монотетична. Пусть a_0 — образующий для A_0 , и пусть N — число элементов в A/A_0 . Выберем образующий B в группе A/A_0 и элемент b в смежном классе B . Тогда $b^N \in A_0$ и существует такой элемент $c \in A_0$, что $b^N c^N = a_0$. Тогда bc — образующий группы A .

Для доказательства теоремы 2.5 обозначим через A замкнутую подгруппу группы S , порожденную подгруппой T и элементом a . Компонента единицы A_0 в A есть тор, содержащий T , и группа $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_0 a^n$ совпадает с A . Так как A компактна, то некоторая положительная степень элемента a лежит в A_0 . Если N — наименьшая из таких степеней элемента a , то A/A_0 есть циклическая группа порядка N . По лемме 2.6 группа A монотетична. Если b — образующая в A , то пусть $\exp tX$ ($t \in \mathbb{R}$) — однопараметрическая подгруппа γ группы S , проходящая через b . Замыкание подгруппы γ в S есть тор, содержащий a и T .

Следствие 2.7. Максимальный тор компактной связной группы Ли является максимальной абелевой подгруппой.

Следствие 2.8. Пусть T — торовидная подгруппа компактной связной группы Ли S . Центризатор подгруппы T в S связан.

Действительно, он является объединением торов, содержащих T .

Каждый корень $\alpha \in \Delta_p$ определяет гиперплоскость $\alpha(H) = 0$ в векторном пространстве $\mathfrak{h}_{p*}$. Эти гиперплоскости разбивают пространство $\mathfrak{h}_{p*}$ на конечное число связных компонент, которые называются камерами Вейля. Последние являются открытыми выпуклыми подмножествами пространства $\mathfrak{h}_{p*}$.

Лемма 2.9. Пусть $H \in \mathfrak{h}_{p*}$. Тогда эндоморфизм T_H имеет следующие собственные значения: (1) 0 кратности $\dim \mathfrak{h}_{p*}$; (2) числа $\alpha(H)^2$, где α пробегает P_+ (с соответствующими кратностями).

Доказательство. Как было доказано в гл. VI (лемма 3.6), пространство $\mathfrak{p}$ допускает прямое разложение

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h}_p + \mathfrak{q}, \text{ где } \mathfrak{q} = \sum_{\alpha \in P_+} \mathbb{C} (X_\alpha - \theta X_\alpha).$$

Имеем $[H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha$, $[H, \theta X_\alpha] = -\alpha(H) \theta X_\alpha$, откуда
 $(\operatorname{ad} H)^2 (X_\alpha - \theta X_\alpha) = \alpha(H)^2 (X_\alpha - \theta X_\alpha)$.

Пусть V — собственное подпространство эндоморфизма $(\operatorname{ad} H)^2$ в $\mathfrak{p}$, отвечающее собственному значению $\alpha(H)^2$. Поскольку $\alpha(H)^2$ вещественно, $V = V \cap \mathfrak{p}_0 + V \cap \mathfrak{p}_*$, и комплексная размерность пространства V равна вещественной размерности пространства $V \cap \mathfrak{p}_*$. Отсюда непосредственно следует лемма. Другое доказательство получается из леммы 2.3.

Максимальное абелево подпространство $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ пространства $\mathfrak{p}$ может быть расширено до подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$, вообще говоря, многими различными способами. Однако, как показывает лемма 2.9, ограничения корней на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ не зависят от выбора подалгебры $\mathfrak{h}$. Точнее, справедливо

Следствие 2.10. Пусть λ — вещественная линейная функция на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$. Тогда λ является ограничением некоторого корня (алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{h}$) в том и только том случае, когда в $\mathfrak{p}_0$ существует такой вектор $X \neq 0$, что

$$(\operatorname{ad} H)^2 X = \lambda(H)^2 X \text{ для } H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}.$$

В качестве непосредственного вывода получаем

Следствие 2.11. Пусть $k \in M'$. Для каждой вещественной линейной функции λ на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ положим $\lambda^k(H) = \lambda(\operatorname{Ad}(k^{-1})H)$ ($H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$). Тогда λ является ограничением корня (алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{h}$) в том и только том случае, когда λ^k является ограничением корня.

Теорема 2.12. Каждый элемент $s \in W(U, K)$ переставляет камеры Вейля. Группа Вейля просто транзитивна на множестве камер Вейля в $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$.

Доказательство. Выберем такой элемент $k \in M'$, что s совпадает с ограничением автоморфизма $\operatorname{Ad}(k)$ на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$. Из следствия 2.11 вытекает, что если некоторый корень из $\Delta_{\mathfrak{p}}$ обращается в 0 в точке $H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$, то некоторый корень из $\Delta_{\mathfrak{p}}$ обращается в 0 в точке $\operatorname{Ad}(k)H$. Следовательно, s переставляет камеры Вейля. Покажем теперь, что $W(U, K)$ транзитивна. Обозначим через W' подгруппу в $W(U, K)$, порожденную всеми s_α ($\alpha \in \Delta_{\mathfrak{p}_*}$). Пусть C_1 и C_2 — две произвольные камеры Вейля. Выберем $H_1 \in C_1$, $H_2 \in C_2$. Если отрезок $\overrightarrow{H_1 H_2}$ пересекает гиперплоскость $\alpha(H) = 0$, то ясно, что

$$|H_1 - H_2| > |H_1 - s_\alpha \cdot H_2|,$$

где через $|\cdot|$ обозначается норма в $\mathfrak{h}_{p*}$. Когда s пробегает конечную группу W' , расстояние $|H_1 - s \cdot H_2|$ достигает минимума, скажем, при $s = s_0$. Тогда отрезок, соединяющий H_1 с $s_0 \cdot H_2$, не пересекает гиперплоскости $\alpha(H) = 0$, и H_1 и $s_0 \cdot H_2$ лежат в одной и той же камере Вейля. Значит, $C_1 = s_0 C_2$, так что группа W' , и тем более $W(U, K)$, транзитивна.

Предположим теперь, что элемент $s \in W(U, K)$ отображает камеру C в себя. Выберем любой элемент $H_0 \in C$ и положим $H = \frac{1}{N}(H_0 + sH_0 + \dots + s^{N-1}H_0)$, где N — порядок элемента s . Тогда $sH = H$ и, поскольку C выпукла, $H \in C$. В силу следствия 3.7 гл. VI, централизатор $\mathfrak{z}_H$ элемента H в $\mathfrak{u}$ совпадает с централизатором подпространства $\mathfrak{h}_{p*}$ в $\mathfrak{u}$. Далее, централизатор Z_γ однопараметрической подгруппы $\gamma = \{\exp tH \mid t \in \mathbf{R}\}$ в U имеет $\mathfrak{z}_H$ в качестве алгебры Ли. Замыкание подгруппы γ в U является тором, так что, в силу следствия 2.8, Z_γ связан. Выберем такой элемент $k \in K$, что s совпадает с ограничением автоморфизма $\text{Ad}(k)$ на $\mathfrak{h}_{p*}$. Тогда $\text{Ad}(k)tH = tH$ для всех $t \in \mathbf{R}$, откуда $k \in Z_\gamma$. Из того, что Z_γ порождена множеством $\exp(\mathfrak{z}_H)$, следует, что ограничение автоморфизма $\text{Ad}(k)$ на $\mathfrak{h}_{p*}$, т. е. s , является тождественным отображением. Тем самым доказано, что группа $W(U, K)$ просто транзитивна.

Следствие 2.13. *Группа Вейля порождается отражениями s_α ($\alpha \in \Delta_p$). Таким образом, при фиксированном $\mathfrak{h}_{p*}$ группа $W(U, K)$ зависит только от $(\mathfrak{u}, \theta)$.*

Ввиду этого следствия мы часто будем говорить о группе $W(U, K)$ как о группе Вейля алгебры $(\mathfrak{u}, \theta)$ и обозначать ее через $W(\mathfrak{u}, \theta)$.

Лемма 2.14. *Пусть $\mathfrak{a}$ — подпространство пространства $\mathfrak{h}_{p*}$. Обозначим через P_α множество корней из P_+ , тождественно равных 0 на $\mathfrak{a}$. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{a}}$ подмножество в $\mathfrak{h}_{p*}$, состоящее из точек, в которых все корни из P_α обращаются в 0. Тогда централизаторы Z_α и $Z_{\tilde{\mathfrak{a}}}$ множеств $\mathfrak{a}$ и $\tilde{\mathfrak{a}}$ в U совпадают, т. е.*

$$Z_\alpha = Z_{\tilde{\mathfrak{a}}}.$$

Доказательство. В силу следствия 2.8, эти централизаторы связны. Поэтому нужно только доказать, что их алгебры Ли совпадают. Каждый элемент $X \in \mathfrak{g}$ можно записать в виде

$$X = H_0 + \sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha X_\alpha \quad (a_\alpha \in \mathbf{C}),$$

где $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $H_0 \in \mathfrak{h}$. Тогда X перестановочен с каждым элементом из $\mathfrak{a}$ в том и только том случае, когда $a_\alpha \alpha(H) = 0$ для всех

$H \in \mathfrak{a}$ и всех $\alpha \in \Delta$. Поскольку α обращается в 0 на $\mathfrak{a}$ тогда и только тогда, когда он обращается в 0 на $\tilde{\mathfrak{a}}$, отсюда следует, что $\mathfrak{a}$ и $\tilde{\mathfrak{a}}$ имеют одинаковые централизаторы в $\mathfrak{g}$ и также в $\mathfrak{u}$. Тем самым лемма доказана.

Теорема 2.15. Пусть $\mathfrak{a}$ — подпространство в $\mathfrak{h}_{p*}$, и пусть $W_{\mathfrak{a}}$ — группа элементов из $W(\mathfrak{u}, \theta)$, оставляющих каждую точку из $\mathfrak{a}$ на месте. Тогда $W_{\mathfrak{a}}$ порождается теми отражениями s_{α} ($\alpha \in \Delta_p$), для которых α тождественно обращается в 0 на $\mathfrak{a}$.

Доказательство. Всякий элемент из $W_{\mathfrak{a}}$ оставляет каждую точку множества $\tilde{\mathfrak{a}}$ из леммы 2.14 неподвижной. Поэтому можно предположить без ограничения общности, что $\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{a}}$. Обозначим через $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}}$ и $Z_{\mathfrak{a}}$ централизаторы множества $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{u}$ и U соответственно. Тогда $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}}$ — компактная алгебра Ли, инвариантная относительно θ , так что $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{p}_* \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{a}}$. Обозначим через $\mathfrak{s}$ центр алгебры $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}}$. Тогда $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{p}_* = \mathfrak{a}$. Обозначим через $\mathfrak{k}_1$ и $\mathfrak{p}_1$ ортогональные дополнения к $\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{s}$ в $\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{a}}$ и к $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{p}_* \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{a}}$. Положим $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{p}_1$ и обозначим через $\mathfrak{a}_1$ ортогональное дополнение к $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{h}_{p*}$. Так как

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{p}_* \cap \sum_{\alpha \in P_{\mathfrak{a}}} \mathbb{C}(X_{\alpha} - \theta X_{\alpha}),$$

то $\mathfrak{a}_1$ есть максимальное абелево подпространство в $\mathfrak{p}_1$. Далее, пара $(\mathfrak{u}_1, \theta)$ является ортогональной симметрической алгеброй Ли компактного типа. Ее группа Вейля порождается отражениями $s_{\bar{\alpha}}$ пространства $\mathfrak{a}_1$, где $\bar{\alpha}$ — ограничение корня $\alpha \in P_{\mathfrak{a}}$ на $\mathfrak{a}_1$. Если продолжить $s_{\bar{\alpha}}$ на $\mathfrak{h}_{p*}$, требуя, чтобы оно было тождественным на $\mathfrak{a}$, то получится элемент группы $W_{\mathfrak{a}}$. Остается доказать, что полученные таким образом элементы группы $W_{\mathfrak{a}}$ порождают всю группу $W_{\mathfrak{a}}$.

Обозначим через $\tilde{Z}$ универсальную накрывающую группу группы $Z_{\mathfrak{a}}$. Если $k \in Z_{\mathfrak{a}} \cap M'$ и $\tilde{k}$ — элемент группы $\tilde{Z}$, лежащий над k , то $\text{Ad}(k)$ и $\text{Ad}_{\tilde{Z}}(\tilde{k})$ совпадают на $\mathfrak{a}_1$. В соответствии с прямым разложением $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{s} + \mathfrak{u}_1$ группа $\tilde{Z}$ представляется в виде

$$\tilde{Z} = C \times U_1,$$

где группы C и U_1 имеют алгебры Ли $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{u}_1$ соответственно. Если соответственно представить элемент $\tilde{k}$ в виде $\tilde{k} = (c, k_1)$, то $\text{Ad}_{\tilde{Z}}(\tilde{k})$ и $\text{Ad}_{U_1}(k_1)$ будут совпадать на $\mathfrak{a}_1$. Поскольку $k \in K \cap Z_{\mathfrak{a}}$, элемент k_1 лежит в подгруппе Ли группы U_1 с алгеброй Ли $\mathfrak{k}_1$. Итак, автоморфизм $\text{Ad}_{U_1}(k_1)$, ограниченный на $\mathfrak{a}_1$, совпадает с некоторым элементом группы Вейля алгебры $(\mathfrak{u}_1, \theta)$. Значит, то же

верно для автоморфизма $\text{Ad}(k)$, если $k \in Z_\alpha \cap M'$. Тем самым теорема доказана.

§ 3. Сопряженные точки. Сингулярные точки. Диаграмма

Пусть опять $(\mathfrak{u}, \theta)$ — ортогональная симметрическая алгебра Ли компактного типа, и пусть (U, K) — некоторая пара, связанная с $(\mathfrak{u}, \theta)$. Мы сохраняем обозначения предыдущего параграфа.

Многообразие U/K есть риманово локально симметрическое пространство, касательное пространство в точке o (точке $\{K\}$ в U/K) к которому отождествляется с $\mathfrak{p}_*$. Пусть $X \in \mathfrak{p}_*$. Формула для $d \text{Exp}_X$ (теорема 4.1 гл. IV), очевидно, применима здесь, даже если не требовать связности подгруппы K . Согласно этой формуле, точка X сопряжена точке o тогда и только тогда, когда

$$\det \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (T_X)^n \right) = 0. \quad (1)$$

В силу леммы 6.3 гл. V, каждый $X \in \mathfrak{p}_*$ можно представить в виде $X = \text{Ad}(k)H$, где $k \in K$, $H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$. Так как $T_{\text{Ad}(k)H} = \text{Ad}(k) \circ T_H \circ \text{Ad}(k^{-1})$, то из леммы 2.9 получаем

$$\det \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (T_X)^n \right) = \prod_{\alpha \in P_+} \frac{\sin \alpha(iH)}{\alpha(iH)}. \quad (2)$$

Из этой формулы следует

Предложение 3.1. Точка $X = \text{Ad}(k)H$ сопряжена точке o тогда и только тогда, когда $\alpha(H) \in \pi i (Z \setminus \{0\})$ для некоторого $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{p}}$.

Рассмотрим теперь факторпространство K/M , где M , как и раньше, обозначает централизатор подпространства $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$ в K . Отображение

$$\Phi: (kM, H) \rightarrow \text{Exp Ad}(k)H \quad (k \in K, H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*})$$

является дифференцируемым отображением многообразия $K/M \times \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$ на U/K . Отображение Φ можно представить в виде $\Phi = \text{Exp} \circ \beta$, где β — отображение многообразия $K/M \times \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$ на $\mathfrak{p}_*$, заданное формулой

$$\beta: (kM, H) \rightarrow \text{Ad}(k)H \quad (k \in K, H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}).$$

Как обычно, через $\tau(x)$ ($x \in K$) обозначается отображение $kM \rightarrow xkM$ многообразия K/M на себя. Обозначим (как в гл. VI) через $\mathfrak{l}_0$ ортогональное дополнение к $\mathfrak{m}_0$ в $\mathfrak{k}_0$. Согласно лемме 3.6 гл. VI, подпространство $\mathfrak{l}$ алгебры $\mathfrak{g}$, порожденное подпростран-

ством I_0 , задается формулой

$$I = \sum_{\alpha \in P_+} C(X_\alpha + \theta X_\alpha). \quad (3)$$

Естественное отображение группы K на K/M индуцирует изоморфизм пространства I_0 на касательное пространство к K/M в точке $\{M\}$. Поэтому мы будем обозначать последнее касательное пространство также через I_0 . Как обычно (замечание в § 2, п. 1, гл. I), конечномерное пространство будет отождествляться со своим касательным пространством в каждой точке.

Пусть (k_0M, H_0) — произвольная точка в $K/M \times \mathfrak{h}_{p*}$. Если L пробегает пространство I_0 , а H пробегает пространство $\mathfrak{h}_{p*}$, то $(d\tau(k_0) \cdot L, H)$ пробегает касательное пространство к многообразию $K/M \times \mathfrak{h}_{p*}$ в точке (k_0M, H_0) . Так как

$$\begin{aligned} \beta(k_0(\exp tL)M, H_0) &= \text{Ad}(k_0) \text{Ad}(\exp tL) H_0, \\ \beta(k_0, H_0 + tH) &= \text{Ad}(k_0)(H_0 + tH), \end{aligned}$$

то получаем

$$d\beta_{(k_0M, H_0)}(d\tau(k_0)L, H) = \text{Ad}(k_0)([L, H_0] + H). \quad (4)$$

Поскольку

$$B([L, H_0], H) = B(L, [H_0, H]) = 0,$$

ясно, что правая часть формулы (4) обращается в 0 тогда и только тогда, когда $[L, H_0] = H = 0$. Используя (3), можно написать

$$L = \sum_{\alpha \in P_+} l_\alpha (X_\alpha + \theta X_\alpha) \quad (l_\alpha \in \mathbb{C}),$$

откуда

$$[H_0, L] = \sum_{\alpha \in P_+} l_\alpha \alpha(H_0) (X_\alpha - \theta X_\alpha).$$

Следовательно, отображение β регулярно в точке (k_0M, H_0) тогда и только тогда, когда $\alpha(H_0) \neq 0$ для всех $\alpha \in \Delta_p$. Связывая этот результат с предложением 3.1, мы можем сформулировать

Предложение 3.2. *Отображение Φ регулярно в точке (k_0M, H_0) тогда и только тогда, когда число $\frac{\alpha(iH_0)}{\pi}$ не является целым ни для какого $\alpha \in \Delta_p$.*

Определение. Множество

$$\{H \in \mathfrak{h}_{p*} \mid \alpha(H) \in \pi i \mathbb{Z} \text{ для некоторого } \alpha \in \Delta_p\}$$

называется *диаграммой* пары (U, K) . Оно будет обозначаться через $D(U, K)$ или $D(u, \theta)$.

Таким образом, диаграмма является объединением конечного числа семейств параллельных гиперплоскостей. Дополнение

$\mathfrak{h}_{p*} \setminus D(U, K)$ будет обозначаться через $(\mathfrak{h}_{p*})_r$. Из предложения 3.2 очевидно, что $D(U, K)$ инвариантно относительно каждого $s \in W(U, K)$.

Определение. Множество $S_{U/K} = \Phi(K/M \times D(U, K))$ называется *сингулярным множеством* в U/K . Дополнение $U/K \setminus S_{U/K}$ будет обозначаться через $(U/K)_r$.

Топологическая размерность (см. § 9 этой главы) подмножества S в сепарабельном метрическом пространстве будет обозначаться через $\dim S$. Это обозначение допустимо, так как размерность сепарабельного многообразия класса C^∞ совпадает с его топологической размерностью (см. Гуревич и Волмэн [1], гл. IV).

Для каждого $\alpha \in \Delta_p$ положим

$$\mathfrak{h}_\alpha = \{H \in \mathfrak{h}_{p*} \mid \alpha(H) \in \pi i \mathbb{Z}\},$$

$$M_\alpha = \{k \in K \mid \operatorname{Exp} \operatorname{Ad}(k) H = \operatorname{Exp} H \text{ для всех } H \in \mathfrak{h}_\alpha\}.$$

Очевидно, что M_α — замкнутая подгруппа в U , содержащая M . Мы докажем сейчас следующее более сильное утверждение:

$$\dim M_\alpha > \dim M. \quad (5)$$

Действительно, рассмотрим вектор $Z_\alpha \in \mathfrak{k}_0$ из леммы 2.3. Из этой леммы следует, что

$$\operatorname{Ad}(\exp H) Z_\alpha = \cos \alpha(iH) Z_\alpha - i \sin \alpha(iH) Y_\alpha \text{ для } H \in \mathfrak{h}_{p*}.$$

Отсюда вытекает, что для всех $t \in \mathbb{R}$

$$\exp \operatorname{Ad}(\exp t Z_\alpha) H = \exp H, \text{ если } \cos \alpha(iH) = +1,$$

$$\exp \operatorname{Ad}(\exp t Z_\alpha) H = \exp H \exp(-2t Z_\alpha), \text{ если } \cos \alpha(iH) = -1.$$

В любом случае

$$\operatorname{Exp} \operatorname{Ad}(\exp t Z_\alpha) H = \operatorname{Exp} H$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, если $H \in \mathfrak{h}_\alpha$. Это значит, что $\exp t Z_\alpha \in M_\alpha$ для всех t , так что Z_α принадлежит алгебре Ли группы M_α . Поскольку $Z_\alpha \notin \mathfrak{m}_0$, получаем соотношение (5).

Теорема 3.3. Пусть (U, K) — любая пара, связанная с алгеброй $(\mathfrak{u}, \theta)$. Тогда сингулярное множество замкнуто и

$$\dim S_{U/K} \leq \dim U/K - 2.$$

То же утверждение справедливо для множества точек из U/K , сопряженных точке o .

Доказательство. Пусть $\alpha \in \Delta_p$. Рассмотрим отображение Φ_α многообразия $K/M_\alpha \times \mathfrak{h}_\alpha$ в U/K , заданное формулой

$$\Phi_\alpha(kM_\alpha, H) = \operatorname{Exp} \operatorname{Ad}(k) H.$$

Тогда

$$\Phi_{\alpha}(K/M_{\alpha} \times \mathfrak{h}_{\alpha}) = \Phi(K/M \times \mathfrak{h}_{\alpha}). \quad (6)$$

Используя лемму 3.6 гл. VI и доказанное выше соотношение (5), получаем

$$\dim K/M = \dim \mathfrak{p}_{*} - \dim \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_{*}},$$

$$\dim(K/M_{\alpha} \times \mathfrak{h}_{\alpha}) \leq \dim \mathfrak{p}_{*} - \dim \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_{*}} - 1 + (\dim \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_{*}} - 1) = \dim \mathfrak{p}_{*} - 2.$$

Используя формулу (6) и лемму 9.3 из добавления, заключаем отсюда, что

$$\dim \Phi(K/M \times \mathfrak{h}_{\alpha}) \leq \dim U/K - 2.$$

Обозначим через $(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_{*}})_e$ множество таких $H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_{*}}$, что $\exp H = e$. Как было замечено при доказательстве леммы 6.3 гл. V, подмножество $\exp \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_{*}}$ группы U компактно. Отсюда следует, что факторпространство $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_{*}}/(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_{*}})_e$ компактно. Используя этот факт, легко показать, что $\Phi(K/M \times \mathfrak{h}_{\alpha})$ замкнуто в U/K . Теорема о сумме из теории размерности (добавление, теорема 9.2) приводит к неравенству

$$\dim \Phi(K/M \times D(U, K)) \leq \dim U/K - 2.$$

З а м е ч а н и е. В примере $S^2 = SO(3)/SO(2)$ множество точек, сопряженных точке o , состоит из двух точек, а именно точки, противоположной точке o , и самой точки o . Таким образом, неравенство в теореме 3.3 является наилучшим из возможных. С другой стороны, знак равенства в теореме 3.3, вообще говоря, не имеет места. Это видно из примера группы единичных кватернионов $S^3 = SO(4)/SO(3)$ (теорема 4.7).

§ 4. Приложения к компактным группам

Как было указано в § 6 гл. IV, компактная связная группа Ли является римановым глобально симметрическим пространством, если снабдить ее двухсторонне инвариантной римановой структурой.

Пусть U — компактная связная полупростая группа Ли. Обозначим через $\mathfrak{u}$ алгебру Ли группы U . Обозначим через U^* подгруппу $\{(u, u) \mid u \in U\}$ прямого произведения $U \times U$. Тогда $(U \times U, U^*)$ есть риманова симметрическая пара компактного типа, связанная с ортогональной симметрической алгеброй Ли $(\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}, d\sigma)$, где $d\sigma$ — дифференциал автоморфизма $\sigma: (u_1, u_2) \rightarrow (u_2, u_1)$ группы $U \times U$. Соответствие

$$(u_1, u_2) U^* \rightarrow u_1 u_2^{-1} \quad (u_1, u_2 \in U)$$

диффеоморфно отображает факторпространство $U \times U/U^*$ на U . При этом соответствии естественное отображение группы $U \times U$

на $U \times U/U^*$ отвечает отображению

$$\pi: (u_1, u_2) \rightarrow u_1 u_2^{-1}$$

группы $U \times U$ на U , дифференциал которого имеет вид

$$d\pi: (X, Y) \rightarrow X - Y \quad (X, Y \in \mathfrak{u}).$$

Алгебра Ли $\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}$ разлагается на собственные подпространства автоморфизма $d\sigma$, отвечающие собственным значениям $+1$ и -1 :

$$\mathfrak{u} \times \mathfrak{u} = \mathfrak{u}^* + \mathfrak{v}^*,$$

где $\mathfrak{u}^*$ есть $\{(X, X) \mid X \in \mathfrak{u}\}$, алгебра Ли подгруппы U^* , а $\mathfrak{v}^* = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{u}\}$.

Пусть T — максимальный тор группы U , и пусть $\mathfrak{t}_0$ — алгебра Ли подгруппы T . Тогда пространство

$$\mathfrak{t}^* = \{(H, -H) \mid H \in \mathfrak{t}_0\}$$

является максимальным абелевым подпространством в $\mathfrak{v}^*$. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная оболочка алгебры $\mathfrak{u}$, и пусть $\mathfrak{t}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, порожденная подалгеброй $\mathfrak{t}_0$. Мы исследуем сейчас группу Вейля симметрической пары $(U \times U, U^*)$, определенную при помощи максимального абелева подпространства $\mathfrak{t}^*$ в $\mathfrak{v}^*$. Пространства $\mathfrak{u}^*$, $\mathfrak{v}^*$, $\mathfrak{t}^*$ и $\mathfrak{t} \times \mathfrak{t}$ соответственно играют роль пространств $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}^*}$ и $\mathfrak{h}$ из § 2. В частности, $\mathfrak{t} \times \mathfrak{t}$ является подалгеброй Картана в $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, комплексной оболочке алгебры $\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}$.

Обозначим через Δ^* множество ненулевых корней алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{t}$. Пусть $\alpha \in \Delta^*$. Тогда линейные функции α' и α'' на $\mathfrak{t} \times \mathfrak{t}$, заданные формулами

$$\alpha'(H_1, H_2) = \alpha(H_1),$$

$$\alpha''(H_1, H_2) = \alpha(H_2) \quad (H_1, H_2 \in \mathfrak{t}),$$

являются корнями алгебры $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{t} \times \mathfrak{t}$. Действительно, если вектор $X_\alpha \in \mathfrak{g}$ удовлетворяет условию $[H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha$ для всех $H \in \mathfrak{t}$, то

$$[(H_1, H_2), (X_\alpha, 0)] = \alpha(H_1) (X_\alpha, 0), \quad [(H_1, H_2), (0, X_\alpha)] = \alpha(H_2) (0, X_\alpha)$$

для всех $H_1, H_2 \in \mathfrak{t}$. Вычисление показывает, что каждый ненулевой корень алгебры $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{t} \times \mathfrak{t}$ возникает таким образом из некоторого элемента множества Δ^* . Корни α' и α'' не могут тождественно равняться 0 на $\mathfrak{t}^*$. Кроме того, их значения на $\mathfrak{t}^*$ чисто мнимы.

Пусть $X \in \mathfrak{u}$. Рассмотрим, как в § 2, оператор $T_{(X, -X)}$, являющийся ограничением эндоморфизма $(\text{ad}(X, -X))^2$ на $\mathfrak{v}^*$. Из леммы 2.9 мы знаем, что если $H \in \mathfrak{t}_0$, то собственными значениями оператора $T_{(H, -H)}$ являются 0 (с кратностью $\dim \mathfrak{t}_0$) и числа $\alpha(H)^2$, где α пробегает Δ^* .

Многообразие U обладает двусторонне инвариантной римановой структурой (например, структурой, индуцированной формой Киллинга алгебры $\mathfrak{u}$, взятой со знаком минус). Соответствующая аффинная связность будет всегда одной и той же и $\text{Exp } X = \exp X$ для $X \in \mathfrak{u}$. Согласно теореме 6.4 гл. V, каждый $X \in \mathfrak{u}$ можно записать в виде $X = \text{Ad}(u)H$, где $u \in U$ и $H \in \mathfrak{t}_0$.

Предложение 4.1. *Точка $X = \text{Ad}(u)H$ сопряжена точке e тогда и только тогда, когда $\alpha(H) \in 2\pi i(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ для некоторого $\alpha \in \Delta^*$.*

Доказательство. Из формулы для $d\text{exp}_X$ (теорема 1.7 гл. II) следует, что точка X сопряжена e тогда и только тогда, когда

$$\det_{\mathfrak{u}} \left(\frac{1 - e^{-\text{ad } X}}{\text{ad } X} \right) = 0.$$

Поскольку $\text{ad } X = \text{Ad}(u) \circ \text{ad } H \circ \text{Ad}(u^{-1})$, мы имеем

$$\det_{\mathfrak{u}} \left(\frac{1 - e^{-\text{ad } X}}{\text{ad } X} \right) = \det_{\mathfrak{u}} \left(\frac{1 - e^{-\text{ad } H}}{\text{ad } H} \right).$$

Эндоморфизм $\frac{1 - e^{-\text{ad } H}}{\text{ad } H}$ пространства $\mathfrak{g}$, очевидно, имеет определитель

$$\prod_{\alpha \in \Delta^*} \frac{1 - e^{-\alpha(H)}}{\alpha(H)}. \quad (1)$$

Его ограничение на $\mathfrak{u}$ имеет тот же определитель, откуда непосредственно следует предложение.

Замечание. Доказанное выше предложение 4.1 является, конечно, частным случаем предложения 3.1. Множитель 2 в предложении 4.1 появляется по той причине, что $d\pi \left(\frac{X}{2}, -\frac{X}{2} \right) = X$, так что X сопряжена точке e тогда и только тогда, когда

$$\det \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (T_{\left(\frac{X}{2}, -\frac{X}{2}\right)})^n \right) = 0.$$

Но этот определитель равен

$$\prod_{\alpha \in \Delta^*} \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha(iH)}{\frac{1}{2} \alpha(iH)}, \quad (2)$$

и снова получается предложение 4.1. Выражения (1) и (2) оба дают определитель отображения $d\text{Exp}_X$ (вычисленный в ортонор-

мированном базисе). Отсюда следует, что эти выражения равны (что легко доказать и без того).

Рассмотрим теперь диаграмму $D(U \times U, U^*) \subset \mathfrak{t}^*$. Обозначим через $D(U)$ образ множества $D(U \times U, U^*)$ при отображении $d\pi$. Так как $d\pi(H, -H) = 2H$ ($H \in \mathfrak{t}_0$) и $\alpha'(H, -H) = -\alpha''(H, -H) \doteq \alpha(H)$ ($\alpha \in \Delta^*$), то получаем, что

$$D(U) = \{H \in \mathfrak{t}_0 \mid \alpha(H) \in 2\pi i \mathbb{Z} \text{ для некоторого } \alpha \in \Delta^*\}.$$

Множество $D(U)$ является объединением конечного числа семейств параллельных гиперплоскостей в пространстве $\mathfrak{t}_0$. Оно будет называться *диаграммой группы U* . При отображении $d\pi: \mathfrak{t}^* \rightarrow \mathfrak{t}_0$ группа Вейля $W(U \times U, U^*)$ соответствует некоторой группе $W(U)$ эндоморфизмов пространства $\mathfrak{t}_0$. Так как множество $D(U \times U, U^*)$ инвариантно относительно $W(U \times U, U^*)$, то ясно, что $D(U)$ инвариантно относительно $W(U)$. Далее, группа $W(U)$ порождается отражениями в гиперплоскостях диаграммы $D(U)$, проходящих через 0. С другой стороны, централизатор подалгебры $\mathfrak{t}^*$ в U^* есть $T^* = \{(t, t) \mid t \in T\}$, а нормализатор подалгебры $\mathfrak{t}^*$ в U^* есть $\{(n, n) \mid n \in N_T\}$, где N_T — нормализатор подгруппы T в U . Отсюда следует, что группа N_T/T , рассматриваемая как группа линейных преобразований пространства $\mathfrak{t}_0$, совпадает с $W(U)$. *Камеры Вейля* в $\mathfrak{t}_0$ суть компоненты открытого подмножества пространства $\mathfrak{t}_0$, на котором все $\alpha \in \Delta^*$ отличны от 0. Из теоремы 2.12 непосредственно следует, что группа $W(U)$ просто транзитивна на множестве камер Вейля. Поскольку $W(U)$ и $D(U)$ зависят только от u , они иногда будут обозначаться через $W(u)$ и $D(u)$ соответственно.

В § 3 мы рассматривали отображение Φ многообразия $K/M \times \mathfrak{h}_{p*}$ на U/K . В настоящей ситуации это есть отображение многообразия $U^*/T^* \times \mathfrak{t}^*$ на $U \times U/U^*$. Сравним Φ с отображением $\Psi: (uT, H) \rightarrow \exp \operatorname{Ad}(u) H$, отображающим $U/T \times \mathfrak{t}_0$ на U , и рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} U^*/T^* \times \mathfrak{t}^* & \xrightarrow{\Phi} & U \times U/U^* \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ U/T \times \mathfrak{t}_0 & \xrightarrow{\Psi} & U \end{array} \quad (3)$$

где отображения f и g заданы формулами

$$\begin{aligned} f: ((u, u) T^*, (H, -H)) &\rightarrow (uT, 2H), \\ g: (u_1, u_2) U^* &\rightarrow u_1 u_2^{-1}. \end{aligned}$$

Эта диаграмма является коммутативной. Так как f и g — диффеоморфизмы, то из предложения 3.2 получаем

Предложение 4.2. Пусть $u_0 \in U$, $H_0 \in \mathfrak{t}_0$. Отображение $\Psi: (uT, H) \rightarrow \exp \operatorname{Ad}(u) H$, отображающее $U/T \times \mathfrak{t}_0$ на U , регу-

лярно в точке (u_0T, H_0) тогда и только тогда, когда $\frac{\alpha(iH_0)}{2\pi}$ не является целым числом ни для какого $\alpha \in \Delta^*$.

По аналогии с терминологией § 3 дадим теперь следующее определение.

Определение. Множество $S = \Psi(U/T \times D(U))$ будет называться *сингулярным* множеством группы U , а его элементы будут называться *сингулярными элементами*. Дополнение $U \setminus S$ будет обозначаться через U_r и его элементы будут называться *регулярными элементами*. Наконец, через t_r будет обозначаться дополнение $t_0 \setminus D(U)$. Из доказанного ниже предложения 4.4 очевидно, что $\Psi(U/T \times t_r) = U_r$.

Лемма 4.3. Пусть $H \in t_0$. Положим $t = \exp H$. Обозначим через Z_t централизатор элемента t в U . Тогда

$$\dim Z_t = \dim T + n,$$

где n — число корней $\alpha \in \Delta^*$, для которых $\alpha(H) \in 2\pi i \mathbb{Z}$.

Доказательство. Подалгебра Картана t алгебры $\mathfrak{g}$ инвариантна относительно сопряжения алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к u . Используя лемму 3.1 гл. VI, можно для каждого $\alpha \in \Delta^*$ выбрать такой вектор $X_\alpha \neq 0$ в $\mathfrak{g}$, что $[H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha$ для всех $H \in t$ и что векторы $E_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$, $F_\alpha = i(X_\alpha + X_{-\alpha})$ принадлежат подалгебре u . Упорядочим некоторым способом множество Δ^* . Пусть $(\Delta^*)_+$ — множество положительных корней по отношению к этому упорядочению. Тогда E_α, F_α ($\alpha \in (\Delta^*)_+$) составляют базис алгебры u по mod t_0 и

$$\begin{aligned} [H, E_\alpha] &= -i\alpha(H) F_\alpha, \\ [H, F_\alpha] &= i\alpha(H) E_\alpha \end{aligned} \tag{4}$$

для всех $H \in t_0$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \text{Ad}(t) E_\alpha &= \cos(i\alpha(H)) E_\alpha - \sin(i\alpha(H)) F_\alpha, \\ \text{Ad}(t) F_\alpha &= \sin(i\alpha(H)) E_\alpha + \cos(i\alpha(H)) F_\alpha. \end{aligned} \tag{5}$$

Алгебра Ли $\mathfrak{L}(Z_t)$ группы Z_t имеет следующий вид:

$$\mathfrak{L}(Z_t) = \{X \in u \mid (\exp sX)t = t \exp sX \text{ для всех } s \in \mathbb{R}\}.$$

Поскольку $t \exp sX t^{-1} = \exp s \text{Ad}(t) X$, получаем, что

$$\mathfrak{L}(Z_t) = \{X \in u \mid \text{Ad}(t) X = X\}.$$

Следовательно, $\dim Z_t$ равна размерности собственного подпространства автоморфизма $\text{Ad}(t)$, отвечающего собственному значению 1. Из формул (5) видно, что размерность этого собственного подпространства равна $\dim t_0$ плюс удвоенное число корней $\alpha \in (\Delta^*)_+$, для которых $\alpha(H) \in 2\pi i \mathbb{Z}$.

Предложение 4.4. Пусть $x \in U$, и пусть Z_x — централизатор элемента x в U . Тогда x сингулярен (регулярен) в том и только том случае, когда $\dim Z_x > \dim T$ ($\dim Z_x = \dim T$).

Элемент x можно записать в виде $x = utu^{-1}$, где $u \in U$, $t \in T$. Тогда $\dim Z_x = \dim Z_t$, и предложение следует из леммы 4.3.

Для каждого $\alpha \in \Delta^*$ положим

$$\mathfrak{t}_\alpha = \{H \in \mathfrak{t}_0 \mid \alpha(H) \in 2\pi i\mathbb{Z}\},$$

$$T_\alpha = \{u \in U \mid \exp \operatorname{Ad}(u) H = \exp H \text{ для каждого } H \in \mathfrak{t}_\alpha\}.$$

Тогда T_α — замкнутая подгруппа в U , содержащая T . Обозначим через $(\mathfrak{t}_\alpha)_0$ гиперплоскость $\alpha(H) = 0$ в $\mathfrak{t}_0$.

Лемма 4.5. Группа T_α связна и $\dim T_\alpha = \dim T + 2$.

Доказательство. Из соотношений (5) следует, что если $H \in \mathfrak{t}_\alpha$, то

$$\operatorname{Ad}(\exp H) sE_\alpha = sE_\alpha, \quad \operatorname{Ad}(\exp H) sF_\alpha = sF_\alpha \quad (6)$$

для всех $s \in \mathbb{R}$. Но из формулы (6) вытекает, что

$$\exp \operatorname{Ad}(\exp sE_\alpha) H = \exp H, \quad \exp \operatorname{Ad}(\exp sF_\alpha) H = \exp H$$

для всех $H \in \mathfrak{t}_\alpha$ и всех $s \in \mathbb{R}$. Значит, E_α и F_α лежат в алгебре Ли подгруппы T_α , откуда $\dim T_\alpha \geq \dim T + 2$. С другой стороны, $T_\alpha \subset (T_\alpha)_0$, если $(T_\alpha)_0$ — централизатор подпространства $(\mathfrak{t}_\alpha)_0$ в U . Тогда $(T_\alpha)_0$ — централизатор замыкания множества $\exp(\mathfrak{t}_\alpha)_0$ в U . В силу следствия 2.8, подгруппа $(T_\alpha)_0$ связна. Далее, $(\mathfrak{t}_\alpha)_0$ содержит такой элемент H , что $\beta(H) \notin 2\pi i\mathbb{Z}$ для всех $\beta \in \Delta^*$, отличных от $\pm\alpha$. По лемме 4.3 $\dim (T_\alpha)_0 \leq \dim T + 2$, откуда следует лемма 4.5.

Обозначим через $(\mathfrak{t}_\alpha)_r$ подмножество в $\mathfrak{t}_\alpha$, заданное условием

$$(\mathfrak{t}_\alpha)_r = \{H \in \mathfrak{t}_\alpha \mid \beta(H) \notin 2\pi i\mathbb{Z} \text{ для } \beta \in \Delta^* \setminus \{\alpha \cup -\alpha\}\},$$

и рассмотрим отображение

$$\Psi_\alpha: (uT_\alpha, H) \rightarrow \exp \operatorname{Ad}(u) H$$

многообразия $U/T_\alpha \times \mathfrak{t}_\alpha$ в U .

Лемма 4.6. Отображение Ψ_α регулярно на подмножестве $U/T_\alpha \times (\mathfrak{t}_\alpha)_r$ многообразия $U/T_\alpha \times \mathfrak{t}_\alpha$.

Доказательство. Рассмотрим подпространство $\mathfrak{u}_\alpha$ алгебры $\mathfrak{u}$, натянутое на все векторы E_β, F_β , где β пробегает положительные корни из $\Delta^* \setminus \{\alpha \cup -\alpha\}$. Естественное отображение группы U на U/T_α имеет дифференциал, отождествляющий $\mathfrak{u}_\alpha$ с касательным пространством к U/T_α в точке $\{T_\alpha\}$. Если $u \in U$, то, как обычно, через $\tau(u)$ будет обозначаться отображение $xT_\alpha \rightarrow uxT_\alpha$ многообразия U/T_α на себя. Касательное пространство к прямому произведению $U/T_\alpha \times \mathfrak{t}_\alpha$ можно отождествить

с подпространством $\mathfrak{u}_\alpha + (\mathfrak{t}_\alpha)_0$ алгебры $\mathfrak{u}$, причем подпространства $\mathfrak{u}_\alpha$ и $(\mathfrak{t}_\alpha)_0$ ортогональны друг другу. Пусть теперь $u_0 \in U$, $H_0 \in (\mathfrak{t}_\alpha)_r$, $X \in \mathfrak{u}_\alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(u_0(\exp tX)T_\alpha, H_0) &= \exp(\operatorname{Ad}(u_0 \exp tX)H_0) = \\ &= u_0 \exp(H_0 + t[X, H_0] + O(t^2))u_0^{-1}. \end{aligned}$$

Применяя теорему 1.7 гл. II, получаем, что

$$\begin{aligned} (d\Psi_\alpha)_{(u_0T_\alpha, H_0)}(d\tau(u_0)X, 0) &= \\ &= dL_{u_0 \exp H_0 u_0^{-1}} \circ \operatorname{Ad}(u_0) \frac{1 - e^{-\operatorname{ad} H_0}}{\operatorname{ad} H_0}([X, H_0]). \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично, если $H \in (\mathfrak{t}_\alpha)_0$, то

$$\Psi_\alpha(u_0T_\alpha, H_0 + tH) = \exp(\operatorname{Ad}(u_0)(H_0 + tH)),$$

откуда

$$(d\Psi_\alpha)_{(u_0T_\alpha, H_0)}(0, H) = dL_{u_0 \exp H_0 u_0^{-1}} \circ \operatorname{Ad}(u_0)H. \quad (8)$$

Комбинируя формулы (7) и (8), получаем

$$\begin{aligned} (d\Psi_\alpha)_{(u_0T_\alpha, H_0)}(d\tau(u_0)X, H) &= \\ &= dL_{u_0 \exp H_0 u_0^{-1}} \circ \operatorname{Ad}(u_0)\{(\operatorname{Ad}(\exp(-H_0)) - 1)X + H\}. \end{aligned}$$

Поскольку $(\operatorname{Ad}(\exp(-H_0)) - 1)X \in \mathfrak{u}_\alpha$, правая часть этой формулы может обратиться в 0 только при $H = 0$ и $\operatorname{Ad}(\exp H_0)X = X$. В силу формулы (5), отсюда будет следовать, что либо $X = 0$, либо $\beta(H_0) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ для некоторого $\beta \in \Delta^* \setminus \{\alpha \cup -\alpha\}$. Но последняя возможность исключается предположением $H_0 \in (\mathfrak{t}_\alpha)_r$. Тем самым лемма доказана.

Теорема 4.7. Пусть S — сингулярное множество в U , и пусть $\operatorname{conj}(U)$ — множество точек группы U , сопряженных точке e . Тогда

$$\dim S = \dim \operatorname{conj}(U) = \dim U - 3.$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in \Delta^*$. Очевидно, что

$$\Psi_\alpha(U/T_\alpha \times \mathfrak{t}_\alpha) = \Psi(U/T \times \mathfrak{t}_\alpha).$$

Используя леммы 4.5 и 4.6, получаем

$$\begin{aligned} \dim \Psi_\alpha(U/T_\alpha \times (\mathfrak{t}_\alpha)_r) &\geq \dim U/T_\alpha + \dim \mathfrak{t}_\alpha = \\ &= \dim U - (\dim T + 2) + \dim T - 1 = \dim U - 3. \end{aligned}$$

Используя лемму 9.3 и предложение 9.1 из добавления, имеем

$$\dim \Psi_\alpha(U/T_\alpha \times (\mathfrak{t}_\alpha)_r) \leq \dim \Psi_\alpha(U/T_\alpha \times \mathfrak{t}_\alpha) \leq \dim U - 3,$$

откуда

$$\dim \Psi(U/T \times \mathfrak{t}_\alpha) = \dim U - 3.$$

Так как

$$S = \bigcup_{\alpha \in \Delta^*} \Psi(U/T \times t_\alpha)$$

и так как множество $\Psi(U/T \times t_\alpha)$ замкнуто в U , то из теоремы о сумме (добавление, теорема 9.2) следует, что $\dim S = \dim U - 3$. Утверждение о множестве $\text{conj}(U)$ доказывается таким же способом.

§ 5. Контроль над сингулярным множеством

Напомним, что элемент $x \in U$ является регулярным или сингулярным в соответствии с тем, равны ли числа $\dim Z_x$ и $\dim T$ или первое больше второго. Ввиду леммы 4.3, можно дать следующее определение.

Определение. Элемент $x \in U$ называется *сингулярным порядком* $\frac{n}{2}$, если $\dim Z_x = \dim T + n$ и $n > 0$.

Пусть k — положительное целое число, и пусть S_k — множество сингулярных элементов порядка k в группе U . Тогда $S = \bigcup_{k > 0} S_k$.

Рассмотрим теперь фиксированный элемент $x_0 \in S_k$ и выберем такие $u \in U$, $H_0 \in t_0$, чтобы $x_0 = \exp \text{Ad}(u) H_0$. Тогда существуют в точности k положительных корней из Δ^* , например, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, для которых $\alpha_j(H_0) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ ($1 \leq j \leq k$). Рассмотрим группу

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \{u \in U \mid \exp \text{Ad}(u) H = \exp H \text{ для каждого } H \in t_{\alpha_1} \cap \dots \cap t_{\alpha_k}\}.$$

Лемма 5.1.

$$\dim T_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \dim T + 2k.$$

Доказательство. Мы будем следовать доказательству леммы 4.5. Так же, как там, можно проверить, что векторы E_{α_j} , F_{α_j} ($1 \leq j \leq k$) принадлежат алгебре Ли группы $T_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$. Следовательно,

$$\dim T_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \geq \dim T + 2k.$$

С другой стороны,

$$\dim Z_{\exp H_0} = \dim T + 2k,$$

согласно лемме 4.3. Поскольку $T_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \subset Z_{\exp H_0}$, лемма доказана.

Рассмотрим теперь подмножество $(t_{\alpha_1 \dots \alpha_k})_r$ в $t_{\alpha_1} \cap \dots \cap t_{\alpha_k}$, состоящее из всех таких точек H , что $\beta(H) \notin 2\pi i\mathbb{Z}$, если β не содержится среди корней $\pm \alpha_j$ ($1 \leq j \leq k$). Тогда $(t_{\alpha_1 \dots \alpha_k})_r$ есть открытое подмножество в $t_{\alpha_1} \cap \dots \cap t_{\alpha_k}$, содержащее H_0 . Рассмотрим отображение

$$\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_k}: (u T_{\alpha_1 \dots \alpha_k}, H) \rightarrow \exp \text{Ad}(u) H$$

многообразия $U/T_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \times (t_{\alpha_1} \cap \dots \cap t_{\alpha_k})$ в U .

Лемма 5.2. *Отображение $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ регулярно на подмножестве*

$$(U/T_{\alpha_1 \dots \alpha_k}) \times (t_{\alpha_1} \dots \alpha_k)_r.$$

Доказательство является непосредственным обобщением доказательства леммы 4.6 и может быть опущено.

Определение. Пусть N — подмногообразие M . Множество N называется *квазиподмногообразием* в M , если существуют связное многообразие N^* и регулярное дифференцируемое отображение $f: N^* \rightarrow M$, такие, что $f(N^*) = N$.

Если $\mathfrak{z}$ — связная компонента множества $(t_{\alpha_1} \dots \alpha_k)_r$, то образ

$$\Psi(U/T \times \mathfrak{z}) = \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(U/T_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \times \mathfrak{z})$$

является, в силу леммы 5.2, квазиподмногообразием в U .

Положим теперь

$$t_e = \{H \in t_0 \mid \exp H = e\}.$$

Множество t_e называется *единичной решеткой* в t_0 . Ясно, что $\alpha(H) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ для всех $H \in t_e$ и всех $\alpha \in \Delta^*$. Значит, если рассматривать решетку t_e как группу переносов в пространстве t_0 , то она оставляет диаграмму $D(U)$ инвариантной. Далее, каждое преобразование из t_e отображает $(t_{\alpha_1} \dots \alpha_k)_r$ на себя и поэтому переставляет различные компоненты $\mathfrak{z}$ множества $(t_{\alpha_1} \dots \alpha_k)_r$.

Лемма 5.3. *Существует лишь конечное число компонент множества $(t_{\alpha_1} \dots \alpha_k)_r$, не сравнимых по модулю t_e .*

Доказательство. Факторпространство t_0/t_e можно отождествить с T , так что группа t_e имеет в t_0 ограниченную фундаментальную область. На каждой компоненте $\mathfrak{z}$ множества $(t_{\alpha_1} \dots \alpha_k)_r$ корни $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ постоянны, а остальные положительные корни изменяются в окрестности значения $2\pi i$. Отсюда следует, что компоненты $\mathfrak{z}$ равномерно ограничены. Значит, существует такой замкнутый шар $\mathfrak{b}$ в t_0 , что для каждой компоненты $\mathfrak{z}$ множества $(t_{\alpha_1} \dots \alpha_k)_r$ существует вектор $H \in t_e$, для которого образ компоненты $\mathfrak{z}$ при преобразовании $-H$, т. е. $\mathfrak{z} - H$, лежит в $\mathfrak{b}$. Так как каждый корень $\alpha \in \Delta^*$ ограничен на $\mathfrak{b}$, то может существовать лишь конечное число таких множеств $\mathfrak{z} - H$ в $\mathfrak{b}$. Тем самым лемма доказана.

Корни $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ были получены при помощи произвольной точки $H_0 \in t_0$, лежащей в точности на k гиперплоскостях диаграммы. Если H_0 будет пробегать все такие точки, то мы получим конечный набор систем $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, состоящих из k положительных

ных корней. Обозначим через S_k^i ($i = 1, 2, \dots$) образы $\Psi(U/T \times \mathfrak{s})$, где $\mathfrak{s}$ пробегает компоненты множеств $(t_{\alpha_1} \dots \alpha_k)_r$ для различных систем $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

Лемма 5.4. *Множество сингулярных точек порядка k является конечной суммой*

$$S_k = \bigcup_i S_k^i,$$

где каждое S_k^i есть квазиподмногообразие в U . Если задать на множестве S_k^i относительную топологию группы U , то его граница содержится в $\bigcup_{p>k} S_p$.

Доказательство. Утверждение о конечности следует из леммы 5.3, так как компоненты множества $(t_{\alpha_1} \dots \alpha_k)_r$, сравнимые по модулю t_e , порождают одно и то же множество S_k^i . Последнее утверждение вытекает из того факта, что граничные точки множества $(t_{\alpha_1} \dots \alpha_k)_r$ лежат на более чем k гиперплоскостях диаграммы.

Предложение 5.5. *Пусть $\gamma(t)$ и $\gamma'(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) — две непрерывные кривые в U_r . Тогда γ и γ' гомотопны в U_r в том и только том случае, когда они гомотопны в U .*

Доказательство. Мы можем предположить, что γ и γ' гомотопны в U . Обозначим через p и q соответственно начало и конец кривой γ . Пусть f — отображение единичного квадрата $\square$ ($0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$) в U , которое осуществляет предполагаемую гомотопию $\gamma \sim \gamma'$. Другими словами, $f(0, t) = \gamma(t)$, $f(1, t) = \gamma'(t)$ для $0 \leq t \leq 1$ и $f(s, 0) = p$, $f(s, 1) = q$ для $0 \leq s \leq 1$. Нам нужно продеформировать $f(\square)$ в U_r таким образом, чтобы точки p и q остались неподвижными. О рассматриваемых ниже деформациях всегда будет предполагаться, что точки p и q остаются при них неподвижными.

Обозначим через $2m$ число элементов в Δ^* . Тогда S_m есть центр группы U и S_p пусто для $p > m$. Так как S_m конечно и $\dim U \geq 3$, то можно, используя предложение 9.6 (добавление), продеформировать $f(\square)$ таким образом, чтобы результат деформации, который мы обозначим через $f_1(\square)$, удовлетворял условию

$$f_1(\square) \cap S_m = \emptyset.$$

Здесь f_1 — новая гомотопия между γ и γ' . Тогда существует такая компактная окрестность N_1 множества $f_1(\square)$, что

$$N_1 \cap S_m = \emptyset.$$

Предположим теперь, что мы нашли деформации $f_1(\square), \dots, f_{m-k}(\square)$ множества $f(\square)$ и компактные окрестности $N_1, \dots$

..., N_{m-k} множеств $f_1(\square)$, ..., $f_{m-k}(\square)$ соответственно, такие, что

$$\begin{aligned} N_1 \supset \dots \supset N_{m-k}, \\ N_1 \cap S_m = \dots = N_{m-k} \cap S_{k+1} = \emptyset. \end{aligned} \quad (1)$$

Покажем, что существуют деформация $f_{m-k+1}(\square)$ множества $f_{m-k}(\square)$ и компактная окрестность N_{m-k+1} множества $f_{m-k+1}(\square)$, такие, что соотношения (1) справедливы, если заменить k на $k-1$. Тогда из справедливости соотношений (1) для $k=m-1$ будет следовать их справедливость для $k=0$, и предложение будет доказано.

Отправляясь теперь от (1), рассмотрим множество $N_{m-k} \cap S_k^i$, где S_k^i — одно из множеств леммы 5.4. Из последнего утверждения этой леммы и из соотношений (1) следует, что $N_{m-k} \cap S_k^i$ компактно. Для подходящей системы $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ положительных корней множество $N_{m-k} \cap S_k^i$ является образом некоторого компактного подмножества из $U/T_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \times \mathfrak{z}$ при отображении $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$. Это компактное множество можно покрыть конечной системой множеств $U_j \times \mathfrak{b}_j$ ($j \in J$), где U_j — открытые множества в $U/T_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ и $\mathfrak{b}_j$ — открытые шары, замыкания которых содержатся в $\mathfrak{z}$, причем $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ для каждого $j \in J$ взаимно однозначно отображает некоторую окрестность множества $\bar{U}_j \times \bar{\mathfrak{b}}_j$ в S_k^i . Положим теперь

$$\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(U_j \times \mathfrak{b}_j) = B_j \quad (j \in J)$$

и превратим B_j в многообразие, диффеоморфное $U_j \times \mathfrak{b}_j$. Тогда

(а) каждое B_j является подмногообразием и топологическим подпространством в U ;

(б) $B_j \subset S_k^i$ для каждого $j \in J$;

(в) $N_{m-k} \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = N_{m-k} \cap S_k^i$.

Рассмотрим теперь фиксированное B_j . Используя предложения 9.4 и 9.6 из добавления, можно деформировать $f_{m-k}(\square)$ внутри множества N_{m-k} таким образом, чтобы результат деформации, скажем $g_{m-k}(\square)$, не пересекался с замыканием множества B_j . Тогда $g_{m-k}(\square)$ можно окружить компактной окрестностью $V_{m-k} \subset N_{m-k}$, не пересекающейся с B_j . Переберем так последовательно все B_j ($j \in J$) (число их конечно). Полученная в результате деформация $G_{m-k}(\square)$ будет заключена в компактной окрестности W_{m-k} , которая содержится в N_{m-k} и не пересекается с $\bigcup_{j \in J} B_j$. Из (в) следует, что $W_{m-k} \cap S_k^i = \emptyset$. Указанный процесс

можно последовательно применить к множествам $S_k^1, S_k^2, \dots$. Так как число их конечно, то в результате получится деформация $f_{m-k+1}(\square)$, заключенная в компактной окрестности $N_{m-k+1} \subset$

$\subset N_{m-k}$, такой, что

$$N_{m-k+1} \cap S_k = \emptyset.$$

На этом доказательство заканчивается.

§ 6. Фундаментальная группа и центр

Рассмотрим теперь открытое множество $t_r = t_0 \setminus D(U)$. Обозначим через P_0 некоторую компоненту множества t_r , замыкание которой $\bar{P}_0$ содержит начало координат. Полиэдр P_0 является пересечением полупространств пространства t_0 . Значит, P_0 — открытое выпуклое множество. Поскольку $\alpha(H) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ для всех $\alpha \in \Delta^*$ и всех $H \in t_e$, ясно, что каждая точка множества $t_e \cap \bar{P}_0$ является вершиной полиэдра P_0 .

Теорема 6.1. Число точек в пересечении $t_e \cap \bar{P}_0$ равно порядку фундаментальной группы $\pi_1(U)$ группы U .

Для доказательства нам потребуются несколько лемм.

Лемма 6.2. Фактор-пространство U/T односвязно.

Доказательство. Обозначим через $(\tilde{U}, \gamma)$ односвязную накрывающую группу группы U и положим $\tilde{T} = \gamma^{-1}(T)$. Тогда $\tilde{U}$ компактна и алгебра Ли подгруппы $\tilde{T}$ является максимальной абелевой подалгеброй алгебры Ли группы $\tilde{U}$. Так как централизатор тора связан, то $\tilde{T}$ есть максимальный тор в $\tilde{U}$. Пространство $\tilde{U}/\tilde{T}$ односвязно, и соответствие $u\tilde{T} \rightarrow \gamma(u)T$ ($u \in \tilde{U}$) гомеоморфно отображает его на U/T .

Лемма 6.3. Обозначим через ψ ограничение отображения Ψ на $U/T \times P_0$. Тогда $(U/T \times P_0, \psi)$ является универсальным накрывающим пространством множества U_r .

Доказательство. Связность множества U_r ясна из следствия 9.5 добавления. Поскольку множество P_0 выпукло, оно односвязно. Значит, $U/T \times P_0$ односвязно. Пусть P_1 — произвольная компонента множества t_r . Если образы $\psi(U/T \times P_0)$ и $\psi(U/T \times P_1)$ пересекаются, то существуют такие элементы $H_0 \in P_0$, $H_1 \in P_1$, $x \in U$, что $x \exp H_0 x^{-1} = \exp H_1$. Отсюда следует, что автоморфизм $u \rightarrow xux^{-1}$ ($u \in U$) отображает централизатор $Z_{\exp H_0}$ на централизатор $Z_{\exp H_1}$. В силу леммы 4.3, T является компонентой единицы этих централизаторов. Следовательно, $xTx^{-1} = T$, и существует элемент $s \in W(U)$, совпадающий с ограничением автоморфизма $\text{Ad}(x)$ на t_0 . Значит, $\exp sH_0 = \exp H_1$, $sH_0 \in t_0$ и существует такой вектор $A \in t_e$, что $H_1 = sH_0 + A$. Так как диаграмма инвариантна относительно групп $W(U)$ и t_e , то преобразование

$H \rightarrow sH + A$ пространства t_0 отображает P_0 на P_1 . Следовательно, $\psi(U/T \times P_0) = \psi(U/T \times P_1)$. Теперь из связности множества U_r вытекает, что ψ отображает $U/T \times P_0$ на U_r .

Для каждого $x \in U_r$ полный прообраз $\psi^{-1}(x)$ конечен. Действительно, предположим противное. Тогда существует такая сходящаяся последовательность $(Q_n) \subset U/T \times \bar{P}_0$, что все Q_n различны и $\psi(Q_n) = x$ для всех n . Так как ψ является ограничением отображения $\Psi: U/T \times t_0 \rightarrow U$, то предел

$$(u_0T, H_0) = \lim Q_n$$

удовлетворяет условиям $u_0 \exp H_0 u_0^{-1} = x$ и $H_0 \in \bar{P}_0$. Из регулярности элемента x следует, что $H_0 \in P_0$. Но из предложения 4.2 вытекает, что ψ — локальный гомеоморфизм, так что существует окрестность N точки (u_0T, H_0) в $U/T \times P_0$, которую ψ отображает гомеоморфно. Поскольку N содержит бесконечно много точек Q_n , мы получаем противоречие. Теперь из конечности множества $\psi^{-1}(x)$ и из того, что ψ — локальный гомеоморфизм, следует, что $(U/T \times P_0, \psi)$ есть накрывающее пространство для U_r .

Лемма 6.4. Число точек в $t_e \cap \bar{P}_0$ равно числу элементов фундаментальной группы $\pi_1(U_r)$ множества U_r .

Доказательство. Рассмотрим окрестность

$$V = \{X \in \mathfrak{u} \mid -B(X, X) < \varrho^2\}$$

точки 0 в $\mathfrak{u}$. Мы можем выбрать такое малое $\varrho > 0$, что

- (а) $|\alpha(H)| < 2\pi$ для $H \in V \cap t_0$ и $\alpha \in \Delta^*$.
- (б) отображение $\exp$ взаимно однозначно на $2V$.
- (в) $\exp(V \cap t_0) = (\exp V) \cap T$.

Соотношения (а) и (б) удовлетворяются тривиальным образом. Чтобы удовлетворить условию (в), нужно только использовать тот факт, что T — топологическая подгруппа в U (лемма 2.5 гл. II).

Фиксируем элемент $x \in U_r \cap (\exp V)$ и рассмотрим полный прообраз

$$\psi^{-1}(x) = \{(u_1T, H_1), \dots, (u_rT, H_r)\}.$$

Для каждого i ($1 \leq i \leq r$)

$$\exp H_i \in u_i^{-1}(\exp V)u_i \subset \exp V.$$

Из (б) и (в) следует, что существует единственный вектор $A_i \in t_e$, такой, что $H_i - A_i \in V$.

С другой стороны, поскольку

$$u_i \exp H_i u_i^{-1} = u_j \exp H_j u_j^{-1} \quad (1 \leq i, j \leq r),$$

получаем, как в последней лемме, что $uTu^{-1} = T$, если $u = u_i^{-1}u_j$. Обозначим через s_{ij} ограничение автоморфизма $\text{Ad}(u)$ на t_0 . Тогда

существует такой вектор $A_{ij} \in \mathfrak{t}_e$, что $H_i = s_{ij}H_j + A_{ij}$. Так как $\mathfrak{t}_e$ инвариантна относительно s_{ij} , то существует такой вектор $A^* \in \mathfrak{t}_e$, что $s_{ij}A^* = A_i - A_{ij}$. Тогда $H_i - A_i = s_{ij}(H_j - A^*)$, откуда $H_j - A^* \in V$. В силу доказанной выше единственности, $A^* = A_j$, откуда

$$H_i - A_i = s_{ij}(H_j - A_j) \quad (1 \leq i, j \leq r). \quad (1)$$

Выведем теперь некоторые следствия из этого соотношения.

(г) Все точки $H_1, \dots, H_r$ различны.

Действительно, если, например, $H_1 = H_2$, то $A_1 = A_2$. Но группа $W(U)$ просто транзитивна на множестве камер Вейля, так что из соотношения (1) следует, что $s_{12} = I$. Значит, $u_1T = u_2T$, что приводит к противоречию.

(д) Все точки $A_1, \dots, A_r$ различны.

Предположим, напротив, что, например, $A_1 = A_2$. Отрезок l , соединяющий H_1 и H_2 , лежит в P_0 . Отсюда следует, что его образ при переносе $l - A_1$ лежит в $\mathfrak{t}_r$. В частности, точки $H_1 - A_1$ и $H_2 - A_1$ лежат в одной и той же камере Вейля. С другой стороны, из формулы (1) следует, что $H_1 - A_1 = s_{12}(H_2 - A_1)$. Поэтому опять, в силу простой транзитивности, $s_{12} = J$, что приводит к противоречию.

(е) Точки $A_1, \dots, A_r$ принадлежат множеству $\bar{P}_0$.

Действительно, если $A_i \notin \bar{P}_0$, то внутренность отрезка, соединяющего H_i с A_i , пересекает границу полиэдра P_0 . Значит, существует такой корень $\alpha \in \Delta^*$, что $|\alpha(H_i - A_i)| > 2\pi$. В силу (а), это противоречит соотношению $H_i - A_i \in V$.

(ж) Множество $\mathfrak{t}_e \cap \bar{P}_0$ состоит в точности из точек $A_1, \dots, A_r$.

Предположим противное. Тогда существует точка $A \in \mathfrak{t}_e \cap \bar{P}_0$, которая не встречается среди $A_1, \dots, A_r$. Обозначим через C камеру Вейля в $\mathfrak{t}_0$, обладающую тем свойством, что P_0 содержится в образе $C + A$ при переносе. Существует единственный такой элемент $s \in W(U)$, что $s(H_1 - A_1) \in C$. Тогда $A + s(H_1 - A_1) \in C + A$. Далее, в силу (а), открытый отрезок, соединяющий 0 с $s(H_1 - A_1)$, лежит в $\mathfrak{t}_r$. То же верно для его образа, соединяющего A с $A + s(H_1 - A_1)$. Следовательно, точка

$$H_A = A + s(H_1 - A_1)$$

лежит в P_0 . Пусть u — такой элемент из U , что $\text{Ad}(u)$ и s совпадают на $\mathfrak{t}_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi(u_1uT, H_A) &= u_1u \exp(A + s(H_1 - A_1)) u^{-1}u_1^{-1} = \\ &= u_1 \exp(H_1 - A_1) u_1^{-1} = \psi(u_1T, H_1) = x. \end{aligned}$$

С другой стороны, $H_A \neq H_i$ для $i = 1, \dots, r$. Действительно, из равенства $H_A = H_i$ следует, что $|H_i - A| = |H_1 - A_1|$. В силу формул (1), последнее расстояние равно $|H_i - A_i|$. Но из равенства $|H_i - A| = |H_i - A_i|$ вытекает, что $A - A_i \in 2V$, что противоречит утверждению (б).

Тем самым доказательство леммы 6.4 закончено.

Пусть теперь u_0 — точка в U_r и γ — кривая в U , начинающаяся и кончающаяся в точке u_0 . В силу предложения 9.4 из добавления, γ гомотопна некоторой кривой $\gamma' \subset U_r$. Поэтому из предложения 5.5 следует, что группы $\pi_1(U)$ и $\pi_1(U_r)$ изоморфны. Тем самым доказана теорема 6.1.

Пусть (M^*, π) — односвязное накрывающее пространство топологического пространства M . Гомеоморфизм φ пространства M^* , такой, что $\pi \circ \varphi = \pi$, называется *накрывающим преобразованием* пространства M^* . Эти гомеоморфизмы составляют группу, изоморфную фундаментальной группе $\pi_1(M)$ пространства M .

Каковы накрывающие преобразования, соответствующие накрывающему пространству $(U/T \times P_0, \psi)$ множества U_r ? В обозначениях леммы 6.4 преобразование

$$(vT, H) \rightarrow (vu^{-1}_1 u_i T, A_i + s_{i1}(H - A_1))$$

является накрывающим преобразованием пространства $U/T \times P_0$. Действительно, в силу соотношения (1),

$$A_i + s_{i1}(H - A_1) \in P_0 \text{ для } H \in P_0$$

и

$$\psi(vu^{-1}_1 u_i T, A_i + s_{i1}(H - A_1)) = \psi(vT, H)$$

для $H \in P_0$, $v \in U$. Эти накрывающие преобразования, число которых равно порядку группы $\pi_1(U)$, все различны. Действительно, как показано выше, все образы $H_i = A_i + s_{i1}(H_1 - A_1)$ являются различными. Группа $\pi_1(U)$ изоморфна группе преобразований

$$\varphi_i: H \rightarrow A_i + s_{i1}(H - A_1)$$

пространства t_0 , каждое из которых отображает P_0 в себя. Орбита точки A_1 относительно этой группы совпадает с $t_e \cap \bar{P}_0$.

Лемма 6.5. Обозначим через Z центр группы U и через $t(u)$ множество точек $H \in t_0$, для которых $\exp H \in Z$. Тогда

$$t(u) = \{H \in t_0 \mid \alpha(H) \in 2\pi i Z \text{ для каждого } \alpha \in \Delta^*\}.$$

Доказательство. Очевидно, что $t(u)$ есть множество точек $H \in t_0$, для которых $\text{Ad}(\exp H) = I$. Теперь лемма следует из соотношений (5) § 4. Обозначение $t(u)$ призвано указывать, что это множество одинаково для всех групп, имеющих алгебру Ли u .

Следствие 6.6. Обозначим через $\tilde{U}$ универсальную накрывающую группу группы U и через $\tilde{Z}$ — центр группы $\tilde{U}$. Число точек множества $t(u) \cap \bar{P}_0$ (в геометрических терминах — число вершин полиэдра P_0) равно порядку группы $\tilde{Z}$.

Доказательство. Это следствие получается путем применения теоремы 6.1 к группе $\text{Ad}(\tilde{U}) = \tilde{U}/\tilde{Z}$. Для этой группы еди-

ничная решетка t_e совпадает с $t(u)$, и фундаментальная группа $\pi_1(\text{Ad}(\tilde{U}))$ изоморфна $\tilde{Z}$.

Пример. Пусть $U = SU(n)$ — группа унитарных матриц порядка n с определителем 1. Алгебра Ли $\mathfrak{u} = \mathfrak{su}(n)$ состоит из всех косоэрмитовых матриц порядка n с следом 0, а комплексная оболочка $\mathfrak{g}$ есть алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ всех матриц порядка n со следом 0. Подмножество t_0 алгебры $\mathfrak{u}$, состоящее из всех чисто мнимых диагональных матриц со следом 0, является максимальной абелевой подалгеброй в $\mathfrak{u}$. Подпространство t алгебры $\mathfrak{g}$, порожденное подалгеброй t_0 , есть подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$ и состоит из всех диагональных матриц со следом 0. Обозначим через E_{ij} матрицу $(\delta_{ai}\delta_{bj})_{1 \leq a \leq n, 1 \leq b \leq n}$ и для каждого $H \in t$ обозначим через $e_i(H)$ i -ый диагональный элемент матрицы H . Тогда

$$[H, E_{ij}] = (e_i(H) - e_j(H)) E_{ij} \quad (H \in t), \quad (2)$$

так что линейная функция $\alpha_{ij}: H \rightarrow e_i(H) - e_j(H)$ является корнем алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к t . Таким путем мы получим $n(n-1)$ ненулевых корней. С другой стороны, множество Δ^* всех ненулевых корней (алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к t) содержит $\dim \mathfrak{g} - \dim t = n^2 - 1 - (n-1) = n^2 - n$ элементов. Следовательно,

$$\Delta^* = \{\alpha_{ij} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}.$$

Если $H, H' \in t$, то из формулы (2) вытекает, что

$$\begin{aligned} B(H, H') &= \text{Tr}(\text{ad } H \text{ ad } H') = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (e_i(H) - e_j(H)) (e_i(H') - \\ &- e_j(H')) = \sum_{i, j} (e_i(HH') + e_j(HH')) - \sum_{i, j} (e_j(H)e_i(H') + e_i(H)e_j(H')), \end{aligned}$$

откуда

$$B(H, H') = 2n \text{Tr}(HH'). \quad (3)$$

Если теперь задана матрица $X \in \mathfrak{su}(n)$, то существует такой элемент $u \in SU(n)$, что $uXu^{-1} \in t_0$. Этот хорошо известный факт о матрицах является частным случаем теоремы 6.4 гл. V. Так как отображение $X \rightarrow uXu^{-1}$ есть автоморфизм алгебры $\mathfrak{su}(n)$, то отсюда следует, что

$$B(X, Y) = 2n \text{Tr}(XY)$$

для всех $X, Y \in \mathfrak{su}(n)$ и, значит, для всех $X, Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Обозначим через H_{ij} вектор в t , определенный условиями

$$B(H_{ij}, H) = \alpha_{ij}(H) \quad (H \in t).$$

Тогда

$$H_{ij} = \frac{1}{2n} (E_{ii} - E_{jj}).$$

Случай $n = 3$. Здесь $\dim t_0 = 2$ и корни из Δ^* имеют вид $\pm \alpha_{12}$, $\pm \alpha_{13}$, $\pm \alpha_{23}$. Угол θ между векторами H_{ij} и H_{kl} дается формулой

$$\cos \theta = \frac{B(H_{ij}, H_{kl})}{(B(H_{ij}, H_{ij}) B(H_{kl}, H_{kl}))^{1/2}}.$$

Поэтому прямые $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{13} = 0$, $\alpha_{23} = 0$ в t_0 расположены так, как на рис. 2. В качестве полиэдра P_0 можно выбрать треуголь-

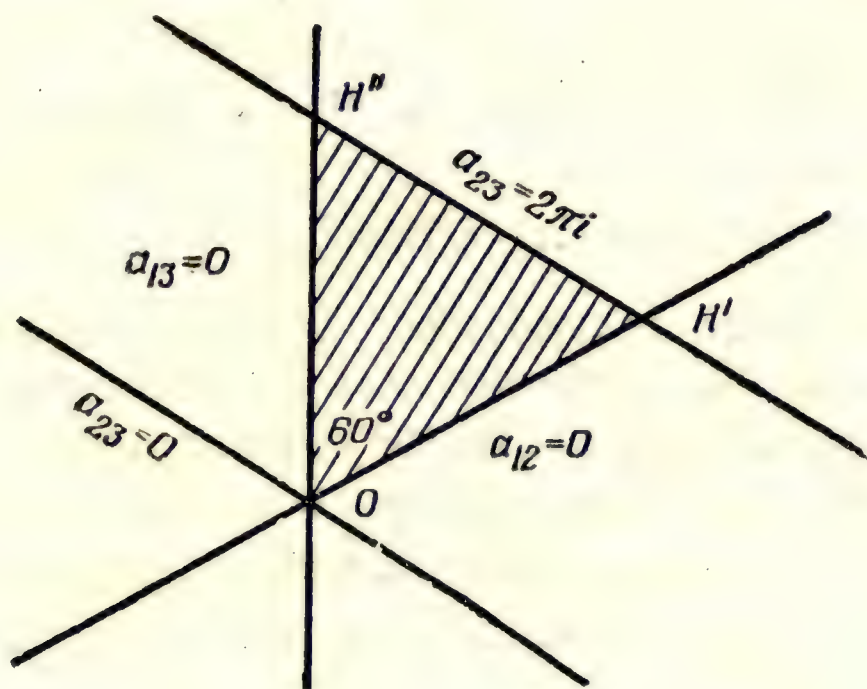


Рис. 2.

ник, образованный прямыми $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{13} = 0$ и $\alpha_{23} = 2\pi i$. Вершинами этого треугольника являются начало координат и точки

$$H' = i \frac{2\pi}{3} (E_{11} + E_{22} - 2E_{33}),$$

$$H'' = i \frac{2\pi}{3} (-E_{11} + 2E_{22} - E_{33}).$$

Из следствия 6.6 вытекает, что центр $\tilde{Z}$ группы $\tilde{U}$ имеет в этом случае порядок 3. Далее, поскольку $\exp H' \neq e$ и $\exp H'' \neq e$, мы видим, что $t_e \cap \bar{P}_0$ состоит из одного лишь начала координат. В силу теоремы 6.1, группа $SU(3)$ односвязна.

Следствие 6.6 показывает, что порядок группы $\tilde{Z}$ («индекс связности» в терминологии Э. Картана) можно определить по системе корней алгебры $\mathfrak{u}$, как это было сделано выше в простейшем случае. В работе Картана [9] этот метод использован для нахождения порядков групп $\tilde{Z}$, соответствующих всем простым компактным алгебрам Ли. Результат приведен в гл. IX настоящей книги.

Простое дополнение к теореме 6.1 и следствию 6.6 показывает, что не только порядок группы $\pi_1(U)$, но и сама эта группа может быть найдена при помощи диаграммы и решетки t_e .

Теорема 6.7. Обозначим через $\tilde{t}_e$ единичную решетку, отвечающую группе $\tilde{U}$. Если рассматривать $\tilde{t}_e$, t_e и $t(u)$ как группы переносов пространства t_0 , то имеют место следующие изоморфизмы:

$$\pi_1(U) \cong t_e/\tilde{t}_e, \quad \tilde{Z} \cong t(u)/\tilde{t}_e.$$

Доказательство. Обозначим через $\tilde{T}$ аналитическую подгруппу в $\tilde{U}$ с алгеброй Ли t_0 . Тогда отображение $\exp: u \rightarrow \tilde{U}$ индуцирует гомоморфизм α группы t_0 на $\tilde{T}$. Имеют место равенства $\alpha(t(u)) = \tilde{Z}$, $\tilde{t}_e = \alpha^{-1}(e)$ и $\alpha(t_e) = Z_1$, где Z_1 — такая подгруппа в $\tilde{Z}$, что $U = \tilde{U}/Z_1$. Поскольку $\pi_1(U) \cong Z_1$, получаем нашу теорему.

Следствие 6.8. Диаграмма $D(u)$ и единичная решетка t_e определяют группу U с точностью до изоморфизма.

Действительно, алгебра Ли u определяется при помощи t_0 и $D(u)$ с точностью до изоморфизма (теорема 5.4, следствие 7.3, гл. III). Группа $\tilde{U}$ определяется алгеброй u с точностью до изоморфизма, а $U = \tilde{U}/\alpha(t_e)$, если пользоваться введенными выше обозначениями.

§ 7. Приложение к симметрическому пространству U/K

Вернемся теперь к ситуации, рассмотренной в § 1—3. Пусть (u, θ) — произвольная ортогональная симметрическая алгебра Ли компактного типа. Мы сохраним обозначения § 1—3. В частности, $\exp$ отображает u на U , а Exp отображает p_* на U/K .

Единичная решетка в $\mathfrak{h}_{p_*}$ определяется как множество

$$(\mathfrak{h}_{p_*})_e = \{H \in \mathfrak{h}_{p_*} \mid \exp H = e\}.$$

Если H принадлежит этому множеству, то $\text{Ad}(\exp H)$ есть тождественное отображение алгебры u , так что $\alpha(H) \in 2\pi i \mathbb{Z}$ для каждого корня $\alpha \in \Delta$. Поэтому, если рассматривать $(\mathfrak{h}_{p_*})_e$ как группу переносов пространства $\mathfrak{h}_{p_*}$, то каждый элемент этой группы оставляет диаграмму $D(U, K)$ инвариантной и переставляет компоненты множества $(\mathfrak{h}_{p_*})_r = \mathfrak{h}_{p_*} \setminus D(U, K)$. Соответствие

$$\Phi: (kM, H) \rightarrow \text{Exp Ad}(k)H$$

отображает $K/M \times \mathfrak{h}_{p_*}$ на U/K . Напомним, что сингулярное множество в U/K определяется как образ

$$S_{U/K} = \Phi(U/K \times D(U, K)),$$

а регулярное множество — как дополнение

$$(U/K)_r = U/K \setminus S_{U/K}.$$

Лемма 7.1. Предположим, что пара (U, K) , связанная с (u, θ) , является симметрической парой. Тогда Φ отображает $K/M \times (\mathfrak{h}_{p_*})_r$ регулярно на $(U/K)_r$.

Доказательство. Поскольку регулярность уже установлена (предложение 3.2), нам нужно доказать только, что если $H_s \in D(U, K)$ и $H_r \in (\mathfrak{h}_{p_*})_r$, то соотношение

$$\exp \operatorname{Ad}(k_s) H_s = \exp \operatorname{Ad}(k_r) H_r \quad (1)$$

невозможно для $k_r, k_s \in K$. Из соотношения (1) следует, что для $k = k_r^{-1} k_s$

$$k \exp H_s k^{-1} = \exp H_r \quad (2)$$

для подходящего $k_1 \in K$. Применяя автоморфизм группы U , соответствующий θ , получаем, что

$$k \exp 2H_s k^{-1} = \exp 2H_r.$$

Значит, централизаторы элементов $\exp 2H_r$ и $\exp 2H_s$ в U изоморфны. Это противоречит лемме 4.3, так как $\alpha(2H_s) \in 2\pi i\mathbb{Z}$, если $\alpha(2H_r) \in 2\pi i\mathbb{Z}$, но не наоборот.

Лемма показывает, что Φ является локальным гомеоморфизмом многообразия $K/M \times (\mathfrak{h}_{p_*})_r$ на $(U/K)_r$. Отсюда легко следует, что если $p(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) — непрерывная кривая в $(U/K)_r$ и если точка $q_0 \in K/M \times (\mathfrak{h}_{p_*})_r$ удовлетворяет условию $\Phi(q_0) = p(0)$, то в $K/M \times (\mathfrak{h}_{p_*})_r$ существует единственная непрерывная кривая $q(t)$ ($0 \leq t \leq 1$), такая, что $\Phi(q(t)) = p(t)$ для всех t и $q(0) = q_0$. По аналогии с накрывающими пространствами говорят, что кривая $q(t)$ накрывает $p(t)$.

Теорема 7.2. Пусть σ — аналитический инволютивный автоморфизм компактной односвязной группы Ли. Тогда множество неподвижных точек автоморфизма σ связно.

Доказательство. Компактная односвязная группа Ли обязательно полупроста (предложение 6.6 гл. II). Поэтому в обозначениях леммы 7.1 достаточно проверить, что U/K односвязно¹⁾, если U односвязна, как мы теперь предполагаем.

Обозначим через Q_0 некоторую компоненту множества $(\mathfrak{h}_{p_*})_r$, замыкание которой содержит начало координат. Пусть (k^*M, H^*) — фиксированная точка в $K/M \times Q_0$ и пусть $p^* = \Phi(k^*M, H^*)$.

¹⁾ Действительно, если факторпространство G/H односвязно, то H связна (Шевалле [2], стр. 91). — Прим. перев.

Пусть $\gamma_0(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) — непрерывная кривая в U/K , которая начинается и кончается в точке $o = \{K\}$. В силу предложения 9.4 из добавления, γ_0 гомотопна пути $\gamma(t)$ ($0 \leq t \leq 1$), лежащему в $(U/K)_r$, за исключением точки $o = \gamma(0) = \gamma(1)$. Поскольку $(U/K)_r$ связно (следствие 9.5), можно предположить, что $\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = p^*$. Пусть теперь $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$; рассмотрим путь γ_ε , заданный формулой $\gamma_\varepsilon(t) = \gamma(t)$ ($\varepsilon \leq t \leq 1 - \varepsilon$). Обозначим через $\Gamma_\varepsilon(t)$ путь в $K/M \times (\mathfrak{h}_{p_*})_r$, накрывающий γ_ε и такой, что $\Gamma_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) = (k^*M, H^*)$. Положим $\Gamma_\varepsilon(t) = (k_tM, H_t)$ для $\varepsilon \leq t \leq 1 - \varepsilon$. Тогда, поскольку Γ_ε связан, $H_t \in Q_0$ для $\varepsilon \leq t \leq 1 - \varepsilon$. Пусть $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$. В силу единственности накрывающего пути,

$$\Gamma_{\varepsilon_1}(t) = \Gamma_{\varepsilon_2}(t) \quad \text{для } \varepsilon_2 \leq t \leq 1 - \varepsilon_2.$$

Следовательно, можно определить в $K/M \times Q_0$ такую непрерывную кривую

$$\Gamma(t) = (k_tM, H_t) \quad (0 < t < 1),$$

что $\Phi(\Gamma(t)) = \gamma(t)$. Множество Q_0 ограничено, так как все корни ограничены на нем. Пусть H_0 — некоторая предельная точка множества $\{H_t\}$ при $t \rightarrow 0$. Тогда существует такая последовательность $t_n \rightarrow 0$, что $k_{t_n} \rightarrow k_0 \in K$ и $H_{t_n} \rightarrow H_0$. Отсюда следует, что

$$\gamma(t_n) = \text{Exp Ad}(k_{t_n}) H_{t_n} \rightarrow \text{Exp Ad}(k_0) H_0.$$

С другой стороны, $\gamma(t_n) \rightarrow o$, так что

$$\text{Exp Ad}(k_0) H_0 = o, \text{ откуда } \exp H_0 \in K.$$

Следовательно, $\exp 2H_0 = e$, т. е. $2H_0 \in (\mathfrak{h}_{p_*})_e$.

Применим теперь теорему 6.1 для $t_0 = \mathfrak{h}_{t_0} + \mathfrak{h}_{p_*}$. Так как H_0 содержится в замыкании множества Q_0 , то значения каждого корня на отрезке, соединяющем 0 и $2H_0$, лежат в замкнутом интервале $[0, 2\pi i]$. Отсюда следует, что этот отрезок содержится в замкнутом полиэдре $\bar{P}_0$, где P_0 — подходящим образом выбранная компонента множества t_r . Так как $\alpha(2H_0) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ для всех $\alpha \in \Delta^*$, то $2H_0$ есть вершина полиэдра $\bar{P}_0$. Поскольку группа U односвязна, из теоремы 6.1 следует, что $H_0 = 0$. Значит, $\lim_{t \rightarrow 0} H_t = 0$.

Таким же образом получаем, что существует предел $H_1 = \lim_{t \rightarrow 1} H_t$ и $H_1 = 0$. Значит, кривая H_t ($0 \leq t \leq 1$) есть замкнутая кривая в $\bar{Q}_0$. Отображение

$$\alpha(s, t) = sH_t \quad (0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1)$$

есть гомотопия этой кривой и точки 0. Тогда отображение β , заданное формулами

$$\begin{aligned}\beta(s, t) &= \text{Exp}(\text{Ad}(k_t) s H_t) \quad (0 \leq s \leq 1, 0 < t < 1), \\ \beta(s, 0) &= \beta(s, 1) = o \quad (0 \leq s \leq 1),\end{aligned}$$

является гомотопией кривой γ и точки o . Тем самым теорема доказана.

Замечание. Теорема 7.2 перестает быть справедливой, если опустить предположение односвязности. Пусть, например,

$$s_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и пусть σ — инволютивный автоморфизм $u \rightarrow s_0 u s_0$ группы $SO(3)$. Множество K неподвижных точек состоит из двух компонент.

§ 8. Классификация локально изометричных пространств

Пусть $(\mathfrak{u}, \theta)$ — ортогональная симметрическая алгебра Ли компактного типа. Напомним, что риманово глобально симметрическое пространство M называется связанным с $(\mathfrak{u}, \theta)$, если риманова симметрическая пара $(I_0(M), K)$ связана с $(\mathfrak{u}, \theta)$, где K — подгруппа изотропии в $I_0(M)$ для некоторой точки многообразия M . Вернемся теперь к проблеме, сформулированной в § 1, а именно к задаче нахождения всех пространств M , связанных с заданной алгеброй $(\mathfrak{u}, \theta)$. При этом мы будем пользоваться теоремой 7.2.

Теорема 8.1. Пусть $(\mathfrak{u}, \theta)$ — ортогональная симметрическая алгебра Ли компактного типа. Предположим, что $\mathfrak{k}_0$, множество неподвижных точек автоморфизма θ , не содержит идеалов алгебры $\mathfrak{u}$, отличных от $\{0\}$. Обозначим через $\tilde{U}$ односвязную группу Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{u}$, через $\tilde{\theta}$ — такой автоморфизм группы $\tilde{U}$, что $d\tilde{\theta} = \theta$, и через $\tilde{K}$ — множество неподвижных точек автоморфизма $\tilde{\theta}$. Обозначим через $\tilde{Z}$ центр группы $\tilde{U}$.

Пусть S — некоторая подгруппа в $\tilde{Z}$. Положим

$$K_S = \{u \in \tilde{U} \mid u^{-1} \tilde{\theta}(u) \in S\}.$$

Римановы глобально симметрические пространства M , связанные с $(\mathfrak{u}, \theta)$, — это в точности пространства $M = U/K$, где

$$U = \tilde{U}/S, \quad K = K^*/K^* \cap S, \quad (1)$$

снабженные любой U -инвариантной метрикой. Здесь S пробегает вне подгруппы группы $\tilde{Z}$, а K^* пробегает все такие подгруппы в $\tilde{U}$, что $\tilde{K} \subset K^* \subset K_S$.

Доказательство. Рассмотрим сначала пару (U, K) , заданную равенствами (1):

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & & K^* \\ \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow \\ U = \tilde{U}/S & & K = K^*/K^* \cap S \\ \psi \downarrow & & \psi \downarrow \\ U' = U/N & & K' = K/N \end{array}$$

Ясно, что группы K^* и K_S компактны. Обозначим через φ естественную проекцию группы $\tilde{U}$ на U . Тогда $\varphi(K^*) = K$. Группа $N = \varphi(\tilde{K} \cap \tilde{Z})$ является нормальным делителем в U , содержащимся в K . Положим $U' = U/N$, $K' = K/N$. Построим теперь такой инволютивный автоморфизм θ' группы U' , что $d\theta' = \theta$ и что θ' оставляет каждую точку подгруппы K' на месте. Поскольку $U/K = U'/K'$, тем самым будет доказано, что U/K глобально симметрично. Обозначим через ψ естественную проекцию группы U на U/N .

Пусть $u' \in U'$. Выберем такой элемент $\tilde{u} \in \tilde{U}$, что $\psi\varphi\tilde{u} = u'$, и положим $\theta'u' = \psi\varphi\tilde{\theta}\tilde{u}$. Для доказательства корректности этого определения предположим, что $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in \tilde{U}$ таковы, что $\psi\varphi\tilde{u}_1 = \psi\varphi\tilde{u}_2 = u'$. Тогда $\varphi\tilde{u}_1 = \varphi(\tilde{u}_2)\varphi(k)$, где $k \in \tilde{K} \cap \tilde{Z}$, так что $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2ks$, где $s \in S$. Отсюда следует, что $\psi\varphi\tilde{\theta}\tilde{u}_1 = (\psi\varphi\tilde{\theta}\tilde{u}_2)(\psi\varphi\tilde{\theta}s)$. Значит, нам нужно доказать, что

$$\varphi\tilde{\theta}s \in \varphi(\tilde{K} \cap \tilde{Z}).$$

Однако $\varphi(s) = e$ и $s\tilde{\theta}(s) \in \tilde{K} \cap \tilde{Z}$, так что $\varphi\tilde{\theta}s = \varphi(s\tilde{\theta}(s)) \in \varphi(\tilde{K} \cap \tilde{Z})$. Отсюда видно, что θ' — корректно определенное отображение группы U' в себя. Далее, θ' — инволютивный автоморфизм и $d\theta' = d\tilde{\theta} = \theta$. Наконец, пусть $k' \in K'$. Тогда существует такой элемент $k^* \in K^*$, что $k' = \psi\varphi k^*$. Поскольку $K^* \subset K_S$, для подходящего элемента $s \in S$ имеем

$$\theta'(k') = \psi\varphi\tilde{\theta}(k^*) = \psi\varphi(k^*s) = \psi\varphi k^* = k'.$$

Тем самым доказано, что многообразие U/K глобально симметрично. Далее, множество элементов группы U , индуцирующих тождественное отображение многообразия U/K , есть замкнутая подгруппа D в K . Ее алгебра Ли равна $\{0\}$, будучи идеалом алгебры $\mathfrak{u}$, содержащимся в $\mathfrak{k}_0$. Отсюда следует, что U/D — полупростая подгруппа группы изометрий $I(U/K)$. Поэтому, в силу теоремы 4.1 гл. V, $U/D = I_0(U/K)$. В частности, группа $I(U/K)$ имеет алгебру Ли $\mathfrak{u}$, так что пространство U/K связано с $(\mathfrak{u}, \theta)$.

С другой стороны, предположим, что M — риманово глобально симметрическое пространство, связанное с $(\mathfrak{u}, \theta)$. Это значит, что

существует такая $o \in M$, что автоморфизм $\sigma: u \rightarrow s_o u s_o$ группы $I_o(M)$ имеет дифференциал $d\sigma = \theta$. Если $U = I_o(M)$ и K — подгруппа изотропии группы $I_o(M)$ в точке o , то пара (U, K) есть риманова симметрическая пара, связанная с (u, θ) . Существует такая подгруппа S в $\tilde{Z}$, что $U = \tilde{U}/S$. Обозначим через φ естественное отображение $\tilde{U} \rightarrow U$ и положим $K^* = \varphi^{-1}(K)$. Тогда $K = K^*/K^* \cap S$. Поскольку $\sigma \circ \varphi = \varphi \circ \tilde{\theta}$, мы имеем

$$\varphi(\tilde{\theta}k) = \sigma\varphi(k) = \varphi(k)$$

для $k \in K^*$. Следовательно, $k^{-1}\tilde{\theta}(k) \in S$, так что $K^* \subset K_S$. С другой стороны, $\tilde{K} \subset K^*$, так как $\tilde{K}$ связна. Доказательство закончено.

Если взять в (1) $K^* = \tilde{K}$, то получим

Следствие 8.2. Пусть (u, θ) — алгебра из теоремы 8.1, и пусть (U, K) — любая пара, связанная с (u, θ) , для которой группа K связна. Тогда пространство U/K глобально симметрично.

Следствие 8.3. Если $\tilde{Z}$ состоит только из одной единицы¹⁾, то $\tilde{U}/\tilde{K}$ есть единственное риманово глобально симметрическое пространство M , связанное с (u, θ) .

§ 9. Добавление. Результаты из теории размерности

В этом параграфе собраны некоторые результаты из теории размерности, которые использовались в настоящей главе. Речь здесь идет о понятии топологической размерности Брауэра, Менгера и Урысона, определенной для всех сепарабельных метрических пространств. Это определение относит пустому множеству размерность — 1, а размерность произвольного сепарабельного метрического пространства M определяется по индукции как наименьшее целое число n , для которого каждая точка $p \in M$ имеет произвольно малые окрестности с границами размерности меньше n . Всюду, где это возможно, мы отсылаем за доказательствами сформулированных ниже результатов к книге Гуревича и Волмэна [1]. Все рассматриваемые пространства предполагаются сепарабельными метрическими. Любое n -мерное многообразие имеет топологическую размерность n (Гуревич и Волмэн [1], стр. 72).

¹⁾ Так обстоит дело в случае особых алгебр e_8 , f_4 и g_2 .

Предложение 9.1. Если M — подпространство в N , то

$$\dim M \leq \dim N.$$

Доказательство см. Гуревич и Волмэн [1], стр. 48.

Теорема 9.2. Предположим, что пространство M является счетным объединением $M = \bigcup_n M_n$ замкнутых подпространств M_n .

Тогда

$$\dim M \leq \sup_n \dim M_n.$$

Доказательство см. Гуревич и Волмэн [1], стр. 52.

Лемма 9.3¹⁾. Пусть M и N — дифференцируемые многообразия и f — дифференцируемое отображение многообразия M в N . Тогда

$$\dim f(Q) \leq \dim Q$$

для каждого подмножества $Q \subset M$.

Доказательство. Обозначим через m и n размерности многообразий M и N соответственно. Пусть $p \in M$ и (B, φ) — локальная карта, покрывающая p . Множество B называется открытым шаром, если φ можно выбрать таким образом, что $\varphi(B)$ — открытый шар в $\mathbb{R}^m$ с центром в $\varphi(p)$. Так как f непрерывно, то существует счетное семейство $B_1, B_2, \dots$ открытых шаров в M , такое, что $M = \bigcup_i B_i$ и что для каждого i множество $f(B_i)$ содержится в открытом шаре B'_i в N . Имеем $Q = \bigcup_i (Q \cap B_i)$ и $f(Q) = \bigcup_i (f(Q) \cap B'_i)$. Поэтому, в силу теоремы 9.2, можно предположить, что $M = \mathbb{R}^m$ и $N = \mathbb{R}^n$ и что Q — ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^m$. Если $|\cdot|$ обозначает норму в $\mathbb{R}^m$ (и $\mathbb{R}^n$), то имеем

$$|f(x) - f(y)| < c|x - y| \quad (1)$$

для всех x, y в некотором кубе, содержащем Q , причем c — константа. Пусть $q = \dim Q$. Тогда $(q+1)$ -мерная хаусдорфова мера множества Q равна 0 (Гуревич и Волмэн [1], стр. 140). Из формулы (1) следует, что $(q+1)$ -мерная хаусдорфова мера множества $f(Q)$ равна 0 и, значит, $\dim f(Q) \leq q$.

Предложение 9.4²⁾. Пусть M — связное многообразие, и пусть S — такое замкнутое подмножество в M , что $\dim S \leq \dim M - 2$. Пусть $\gamma(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) — непрерывная кривая в M . Тогда γ гомотопна непрерывной кривой $\gamma'(t)$ ($0 \leq t \leq 1$), такой, что $\gamma'(t) \in M \setminus S$ для $0 < t < 1$.

¹⁾ Хариш-Чандра [6], стр. 615.

²⁾ Ср. Понтрягин [1], стр. 473.

Доказательство. Пусть B — открытый шар в M , и пусть a, b — две точки из $B \setminus S$. Покажем сначала, что a и b можно соединить непрерывной кривой, не пересекающей множества S . Пусть B' — открытый шар, concentричный шару B , такой, что $a, b \in B'$ и $\bar{B}' \subset B$. «Центральное проектирование» относительно b дает дифференцируемое отображение шара B на границу шара B' . Образ множества $B \cap S$ при этом отображении не содержит открытых подмножеств границы шара B' (лемма 9.3). Значит, если N_a — такая окрестность точки a в B , что $N_a \cap S = \emptyset$, то существует такая точка $a' \in N_a$, что отрезок с концами b и a' не пересекается с S . Рассматривая его вместе с отрезком aa' , получим нужный нам путь, соединяющий a и b .

Предположим теперь, что концы $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ не принадлежат S . Тогда существует такое положительное число $\varepsilon = \frac{1}{2n}$ (n целое), что каждый отрезок $\gamma(t)$ ($|t - t_0| \leq \varepsilon$) содержится в некотором открытом шаре $B(t_0)$ ($|t_0| \leq 1$). Пусть $0 < j < n$. Тогда точка $\gamma(2j\varepsilon)$ принадлежит пересечению $B((2j-1)\varepsilon) \cap B((2j+1)\varepsilon)$. Заменяем $\gamma(2j\varepsilon)$ другой точкой $\gamma'(2j\varepsilon)$ этого пересечения, не принадлежащей S . Наконец, положим $\gamma'(0) = \gamma(0)$ и $\gamma'(1) = \gamma(1)$. Из первой части доказательства следует, что точки $\gamma'(2j\varepsilon)$ и $\gamma'((2j+2)\varepsilon)$ можно соединить в $B((2j+1)\varepsilon)$ путем, не пересекающим S . Нужный нам путь γ' получается из этих маленьких путей. Кривая γ гомотопна γ' , так как каждый шар односвязен.

Наконец, предположим, что по крайней мере одна из точек $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ принадлежит множеству S . Предположим, например, что $\gamma(0) \in S$, $\gamma(1) \notin S$. Тогда существует последовательность $x_1, x_2, \dots$ в $M \setminus S$, сходящаяся к $\gamma(0)$. Выберем N таким большим, чтобы все x_n ($n \geq N$) и все $\gamma(t)$ ($0 \leq t \leq \frac{1}{N}$) принадлежали шару B с центром в точке $\gamma(0)$. Объединяя часть кривой γ от $\gamma(\frac{1}{N})$ до $\gamma(1)$ с кривой, соединяющей x_N с $\gamma(\frac{1}{N})$, получим кривую δ , соединяющую x_N с $\gamma(1)$, концы которой не лежат в S . В силу уже доказанного результата, существует кривая δ' в $M \setminus S$, гомотопная кривой δ . Если объединить δ' с последовательностью подходящих путей в $B \setminus S$, соединяющих x_n и x_{n+1} ($n \geq N$), то получим нужный нам путь γ' .

Следствие 9.5. В предположениях предложения 9.4 множество $M \setminus S$ связно.

Согласно Гуревичу и Волмэну [1], стр. 74, это следствие справедливо и в случае, когда S не замкнуто.

Предложение 9.6. Пусть M — связное многообразие и S — связное подмногообразие в M . Предположим, что $\dim S \leq$

$\leq \dim M - 3$ и что S — топологическое подпространство в M . Пусть $\gamma(t)$ и $\gamma'(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) — две непрерывные кривые в дополнении $M \setminus S$. Тогда если γ и γ' гомотопны в M , то они гомотопны и в $M \setminus S$.

Доказательство. Гомотопию $\gamma \sim \gamma'$ можно разбить на последовательность гомотопий

$$\gamma = \Gamma_0 \sim \Gamma_1 \sim \dots \sim \Gamma_{n-1} \sim \Gamma_n = \gamma',$$

где для каждого i кривые $\Gamma_{i-1}(t)$ и $\Gamma_i(t)$ совпадают всюду, за исключением отрезка I_i , содержащегося в $[0, 1]$, причем $\Gamma_{i-1}(I_i)$ и $\Gamma_i(I_i)$ лежат в одном и том же открытом шаре (ср. Зейферт и Трельфалль [1], § 44). Это значит, грубо говоря, что каждая деформация является конечной последовательностью малых деформаций. Поэтому можно предположить, что γ лежит в открытом шаре V и что γ' сводится к точке. Так как S — топологическое подпространство в M , то можно также допустить (предложение 3.2 гл. I), что V и координаты $\{x_1, \dots, x_m\}$ на V обладают тем свойством, что $S \cap V$ есть подмногообразие в V , заданное уравнениями $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Итак, можно допустить, что $M = \mathbf{R}^m$ и что S — подпространство, заданное уравнениями $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. Если обозначить через $|\cdot|$ норму в $\mathbf{R}^m$, то пусть $C(S)$ — множество точек в M , расстояние которых от S равно $|\gamma(0)|$. Тогда $C(S)$ гомеоморфно $S^2 \times \mathbf{R}^{m-3}$, в частности, $C(S)$ односвязно. Множество $M \setminus S$ можно отобразить на $C(S)$ при помощи «центрального проектирования» ϕ из S . Это отображение определяется следующим образом: если $p \in M \setminus S$, то обозначим через $s(p)$ единственную точку множества S , находящуюся на кратчайшем расстоянии от p . Луч, выходящий из точки $s(p)$ в p , пересекает $C(S)$ в точке, которую мы обозначим $\phi(p)$. Образ кривой γ при отображении ϕ гомотопен γ в $M \setminus S$ и, поскольку $C(S)$ односвязно, кривая $\phi \cdot \gamma$ гомотопна в $C(S) \subset M \setminus S$ точке $\gamma(0)$. Тем самым доказательство закончено.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти централизатор m_0 и группу Вейля $W(U, K)$ для римановой симметрической пары (U, K) , где $U = \mathbf{SU}(n)$, $K = \mathbf{SO}(n)$.
- 2*. Число стен камеры Вейля в $\mathfrak{h}_{p*}$ равно $\dim \mathfrak{h}_{p*}$ (Э. Картан [11], Г. Вейль [2]).
3. Пусть U — компактная полупростая связная группа Ли. Примем обозначения § 4—5.

(i) Вывести из леммы 4.5, что

$$\exp(s_\alpha H_0 - H_0) = e, \quad \text{если } \alpha \in \Delta^*, H_0 \in \mathfrak{t}_\alpha,$$

где s_α — отражение в плоскости $\alpha(H) = 0$.

(ii) Пусть n — целое число, и пусть H_0 лежит в плоскости $\alpha(H) = 2\pi i n$. Тогда отражение σ_α в этой плоскости можно записать в виде

$$\sigma_\alpha(H) = s_\alpha(H) - s_\alpha(H_0) + H_0.$$

(iii) Рассмотрим единичную решетку $\mathfrak{t}_e$ как группу переносов пространства $\mathfrak{t}_0$ и обозначим через Γ группу, порожденную группой Вейля $W(U)$ и группой $\mathfrak{t}_e$. Вывести из (i) и (ii), что $\sigma_\alpha \in \Gamma$.

(iv) Группа, порожденная отражениями в плоскостях диаграммы, транзитивно действует на множестве компонент множества $\mathfrak{t}_r$ (рассуждать так же, как в первой части доказательства теоремы 2.12).

4. Пользуясь теми же обозначениями, что в упражнении 3, предположим, что группа U односвязна.

(i) Вывести из теоремы 2.12 и теоремы 6.1, что Γ просто транзитивна на множестве компонент множества $\mathfrak{t}_r$.

(ii) Группа Γ совпадает с группой, порожденной отражениями в плоскостях диаграммы.

(iii) Каждая компонента множества $\mathfrak{t}_r$ является фундаментальной областью группы Γ , действующей на $\mathfrak{t}_r$.

5. Пусть σ — инволютивный автоморфизм компактной связной группы Ли U . Обозначим через H множество его неподвижных точек. Пусть на U задана любая двусторонне инвариантная риманова структура. Отображение

$$uH \rightarrow u\sigma(u^{-1})$$

является диффеоморфизмом многообразия U/H на замкнутое вполне геодезическое подмногообразие в U . Это подмногообразие является римановым глобально симметрическим по отношению к индуцированной римановой структуре (Э. Картан [16]).

6. Обозначим через Σ множество ограничений корней из Δ_p на $\mathfrak{h}_{p_0}$. Пусть Σ_1 и Σ_2 — множества положительных элементов в Σ , полученные при помощи двух различных упорядочений двойственного к $\mathfrak{h}_{p_0}$ пространства. Показать, что в группе Вейля $W(u, \theta)$ существует единственный такой элемент s , что $s \cdot \Sigma_1 = \Sigma_2$. (Указание: выбор упорядочения сводится к выбору камеры Вейля).

7. Каждое упорядочение пространства, двойственного к $\mathfrak{h}_p$, порождает разложение Ивасава $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{h}_{p_0} + \mathfrak{n}_0$. Используя

упражнение 6, вывести теорему сопряженности для таких разложений.

8*. Пусть Σ — множество из упражнения 6. Пусть $\mu, \lambda \in \Sigma$ таковы, что $\mu = c\lambda$ ($c \in \mathbb{C}$). Тогда $c = \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$ (Э. Картан [10], стр. 430, Хариш-Чандра [10] I, стр. 197).

ЗАМЕЧАНИЯ

§ 2. Группа $W(U)$ (см. § 4) была введена Г. Вейлем в [1], гл. III, § 4, где она была использована для нахождения характеров неприводимых представлений группы U . Более общая группа $W(U, K)$ была определена Э. Картаном [10] и вычислена в случаях, когда U — классическая компактная группа. Следствие 2.13 было также проверено для этих случаев (см. также Г. Вейль [2]). Теорему 2.15 использовали без доказательства Хариш-Чандра [8] (где она приписывается Шевалле) и Костант [1]. Теорема 2.5 принадлежит Хопфу [1].

§ 3. Результаты § 3 принадлежат Э. Картану [10]. См. также Хариш-Чандра [6], VI, § 12.

§ 4—7. Размерность сингулярного множества S ($\dim S = \dim U - 3$) была найдена в работе Г. Вейля [1], гл. IV, § 1. Это равенство широко использовалось Г. Вейлем и Э. Картаном. Г. Вейль использовал его в доказательстве теорем о сопряженности (теорема 6.4 (iii) гл. V) и о компактности универсальной накрывающей группы (теорема 6.9 гл. II). Для этих приложений достаточно знать, что S замкнуто и имеет размерность, не превосходящую $\dim U - 2$, так как нужно только предл. 9.4 (см. Понтрягин [1], § 64). Картан, с другой стороны, использовал равенство $\dim S = \dim U - 3$ для доказательства более тонких теорем 6.1 ([9], стр. 217—218) и 7.2 ([10], стр. 430), которые основаны на равенстве $\pi_1(U) = \pi_1(U \setminus S)$. Здесь Картан использовал предложение 9.6, не входя, однако, в трудности, связанные с тем фактом, что S не является многообразием. То, что эти трудности, действительно имеются, видно из того факта (указанного автору Уайтхедом), что предложение 9.6 не имеет места для некоторых 0-мерных подмножеств (ожерелье Антуана) в пространстве $\mathbb{R}^3$. Другое доказательство теоремы 6.1, а также богатую информацию о компактных группах Ли, можно найти в работе Дынкина и Онищика [1]. Рассуждение в действительности показывает, что $\pi_2(U) = 0$ (Э. Картан [20], см. также Борель [1]). Известно также, что если U проста, то $\pi_3(U) = \mathbb{Z}$ (Ботт [1]) и что группу $\pi_4(U)$ можно найти по диаграмме $D(U)$ и единичной решетке t_e (Ботт и Самельсон [1]). Результат состоит в том, что $\pi_4(U)$ состоит из двух элементов, если плоскость $\mu(H) = 2\pi i$ в t_0 содержит точку из t_e , где μ — наивысший корень относительно лексикографического упорядочения. В противном случае $\pi_4(U) = 0$. В работе Ботта и Самельсона [1] теорема 7.2 сводится к теореме 6.1 другим способом. Ботт распространил также (доказательство не опубликовано) теорему 7.2 на все, не обязательно инволютивные, автоморфизмы. Другое доказательство (также основанное на теореме 6.1) дано Борелем [8].

ЭРМИТОВЫ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Эрмитово симметрическое пространство — это риманово глобально симметрическое пространство, которое обладает комплексной структурой, инвариантной относительно каждой геодезической симметрии. Примерами являются все односвязные двумерные римановы глобально симметрические пространства. Мы будем заниматься преимущественно эрмитовыми симметрическими пространствами компактного типа и некомпактного типа. Они всегда односвязны и обладают тем характеристическим свойством, что их группы изотропии не полупросты и, значит, имеют недискретные центры. В § 7 показано, что эрмитовы симметрические пространства G_0/K_0 некомпактного типа — это в точности ограниченные симметрические области в пространстве многих комплексных переменных. Далее, пространство G_0/K_0 всегда можно вложить в компактное двойственное пространство U/K_0 в качестве открытого подмножества. Простейшим примером такого вложения является единичный круг $|z| < 1$, помещенный в расширенную комплексную плоскость.

В трех первых параграфах излагаются некоторые основные факты, касающиеся комплексных многообразий. Главнейшие рассмотренные здесь понятия — это эрмитова и кэлорова структуры, кривизна Риччи и кернфункция Бергмана.

§ 1. Почти комплексные многообразия

Определение. Пусть M — многообразие класса C^∞ . Почти комплексная структура на M есть тензорное поле J типа (1.1), такое, что $J(JX) = -X$ для каждого векторного поля X на M .

Таким образом, почти комплексная структура на M сводится к правилу, которое дифференцируемым образом сопоставляет каждой точке $p \in M$ эндоморфизм $J_p: M_p \rightarrow M_p$, такой, что $(J_p)^2 = -I$ для каждой $p \in M$. Почти комплексным многообразием называется пара (M, J) , где M — многообразие класса C^∞ и J — почти комплексная структура на M .

По причинам, которые будут ясны из приведенного ниже примера II, важно рассматривать отображение $S: \mathfrak{D}^1(M) \times \mathfrak{D}^1(M) \rightarrow \mathfrak{D}^1(M)$, определенное формулой

$$S(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] \quad (1)$$

для $X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)$. Из соотношения

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

для $f, g \in C^\infty(M)$ легко вывести, что $S(fX, gY) = fgS(X, Y)$. Как обычно, мы отождествляем S с полилинейным отображением $(\omega, X, Y) \rightarrow \omega(S(X, Y))$ модуля $\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}^1 \times \mathfrak{D}^1$ в $C^\infty(M)$. Таким образом, S — тензорное поле типа $(1, 2)$. Оно называется *тензором кручения* почти комплексной структуры J . Очевидно, S кососимметрично, т. е. $S(X, Y) = -S(Y, X)$. Если $S = 0$, то почти комплексная структура называется *интегрируемой*.

Пример I. Пусть M есть $\mathbf{R}^2$, рассматриваемое как многообразие, локальными координатами в котором являются обычные декартовы координаты (x, y) . Для каждой точки $p \in M$ эндоморфизм пространства M_p , заданный формулой

$$J_p: a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + b\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \rightarrow -b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + a\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p$$

для $a, b \in \mathbf{R}$, имеет квадрат $-I$. Тензорное поле $p \rightarrow J_p$ ($p \in M$) есть почти комплексная структура на M . Эта почти комплексная структура интегрируема, так как $S\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 0$.

Пример II. Пусть M — комплексное многообразие размерности m в смысле определения, данного в § 1 гл. I. Существует покрытие $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ многообразия M открытыми подмножествами U_α , каждое из которых гомеоморфно отображается на открытое подмножество в $\mathbf{C}^m$ при помощи φ_α , причем для каждой пары $\alpha, \beta \in A$ отображение $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ является голоморфным отображением¹⁾ множества $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ на $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$. Как было замечено в § 1 гл. I, мы всегда можем допустить, что система $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ является максимальной системой, обладающей этим свойством. В этом случае система называется *комплексной структурой* на данном топологическом пространстве M .

Пусть $p \in M$, и пусть α — такой индекс из A , что $p \in U_\alpha$. Если $q \in U_\alpha$, то $\varphi_\alpha(q) = (z_1(q), \dots, z_m(q))$, где каждое $z_j(q)$ есть комплексное число $x_j(q) + iy_j(q)$. Отображение

$$\psi_\alpha: q \rightarrow (x_1(q), y_1(q), \dots, x_m(q), y_m(q))$$

является гомеоморфизмом множества U_α на открытое подмножество в $\mathbf{R}^{2m}$. Набор открытых карт $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ на M превращает M в аналитическое многообразие, аналитическая структура которого называется *подчиненной* рассматривавшейся выше ком-

¹⁾ Если O и O' — открытые подмножества в $\mathbf{C}^m$ и $\mathbf{C}^n$ соответственно, то отображение $f: O \rightarrow O'$ называется *голоморфным*, если координаты точки $f(z_1, \dots, z_m)$ являются голоморфными функциями от $z_1, \dots, z_m$.

плексной структуре. Таким образом, комплексная структура обладает вполне определенной подчиненной аналитической структурой. С другой стороны, может случиться, что две различные комплексные структуры имеют одну и ту же подчиненную аналитическую структуру.

Касательное пространство M_p к аналитическому многообразию M имеет базис, состоящий из векторов

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_p.$$

Эндоморфизм $J^\alpha: M_p \rightarrow M_p$, заданный формулой

$$J^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p, \quad J^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p = -\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

для $1 \leq i \leq m$, удовлетворяет условию $(J^\alpha)^2 = -I$. Предположим теперь, что β — другой индекс из A , такой, что $p \in U_\beta$. Для $q \in U_\beta$ обозначим комплексные координаты точки $\varphi_\beta(q)$ через $(w_1(q), \dots, w_m(q))$ и положим $w_j(q) = u_j(q) + iv_j(q)$ ($1 \leq j \leq m$). Если рассматривать $(u_1, v_1, \dots, u_m, v_m)$ как локальные координаты на аналитическом многообразии M , то векторы

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial u_m}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial v_m}\right)_p$$

составляют базис касательного пространства M_p . Эндоморфизм $J^\beta: M_p \rightarrow M_p$, заданный формулами

$$J^\beta \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_p, \quad J^\beta \left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_p = -\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p$$

для $1 \leq i \leq m$, удовлетворяет условию $(J^\beta)^2 = -I$.

Лемма 1.1. Эндоморфизмы J^α и J^β совпадают между собой.

Доказательство. Так как $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ есть голоморфное отображение множества $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ на $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, то каждая функция $w_i(z_1, \dots, z_m)$ ($1 \leq i \leq m$) является голоморфной функцией в окрестности точки $\varphi_\alpha(p)$. Поэтому соответствующие вещественные функции $u_i(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m)$, $v_i(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m)$ удовлетворяют уравнениям Коши — Римана

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial y_j} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \quad (1 \leq i, j \leq m).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial u_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial v_i} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial u_i} - \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial v_i} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial u_i} + \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial v_i} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial u_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial v_i} \right),$$

и, значит,

$$J^\beta \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p, \quad J^\beta \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p = - \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p.$$

Тем самым лемма доказана.

Ввиду этой леммы эндоморфизм $J_p = J^\alpha = J^\beta$ не зависит от выбора локальных координат в окрестности точки p . Тензорное поле $J: p \rightarrow J_p$ является почти комплексной структурой на M , которую мы назовем *канонической* почти комплексной структурой, связанной с комплексной структурой на многообразии M .

Пусть (M, J) и (M', J') — почти комплексные многообразия и Φ — дифференцируемое отображение многообразия M в M' . Отображение Φ называется *почти комплексным*, если

$$d\Phi_p \circ J_p = J'_{\Phi(p)} \circ d\Phi_p \quad \text{для } p \in M. \quad (2)$$

Предположим теперь, что M и M' — комплексные многообразия и что J и J' — их соответствующие почти комплексные структуры. Отображение многообразия M в M' называется *голоморфным*, если его выражение в комплексных локальных координатах дается голоморфными функциями. Из уравнений Коши — Римана очевидно, что голоморфное отображение почти комплексно. С другой стороны, предположим, что отображение $\Phi: M \rightarrow M'$ удовлетворяет условию (2). Пусть $\{z_1, \dots, z_m\}$ и $\{w_1, \dots, w_n\}$ — комплексные локальные координаты в окрестностях точки p в M и точки $\Phi(p)$ в M' . Положим $z_j = x_j + iy_j$ ($1 \leq j \leq m$), $w_k = u_k + iv_k$ ($1 \leq k \leq n$). Тогда

$$u_k = \varphi_k(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m),$$

$$v_k = \psi_k(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m),$$

где φ_k и ψ_k — дифференцируемые функции ($1 \leq k \leq n$). Из условия (2) вытекает, что

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial \psi_k}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j} = - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j}.$$

Отсюда видно, что w_k — голоморфная функция каждой переменной z_j и поэтому, в силу классической теоремы о голоморфных функциях (см., например, Бохнер и Мартин [1], стр. 49), w_k — голоморфная функция от $(z_1, \dots, z_m)$. Мы доказали, что почти комплексное отображение одного комплексного многообразия в другое является голоморфным.

Пусть M — комплексное многообразие, и пусть J — связанная с ним каноническая почти комплексная структура. Тензорное поле J удовлетворяет условию интегрируемости

$$S(X, Y) = 0 \quad (X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)), \quad (3)$$

где S определено формулой (1). Действительно, поскольку отображение S является $C^\infty(M)$ -билинейным, достаточно проверить,

что (3) удовлетворяется в каждой координатной окрестности, а там это равенство очевидным образом справедливо для векторных полей $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}$. Таким образом, каноническая почти комплексная структура, связанная с комплексной структурой, интегрируема. Обратное утверждение содержится в следующей теореме, которая впервые была доказана в полной общности Ньюлендером и Ниренбергом [1].

Теорема 1.2. Пусть (M, J) — почти комплексное многообразие, удовлетворяющее условию интегрируемости (3). Тогда на M существует единственная комплексная структура, для которой J является связанной с ней почти комплексной структурой.

За доказательством этой теоремы, которое слишком длинно для того, чтобы быть помещенным здесь, мы отсылаем к цитированной выше статье. Однако мы будем использовать теорему 1.2 только в случае, когда M и J предполагаются аналитическими¹⁾. В этом случае имеются более простые доказательства, см., например, Фрелихер [1].

§ 2. Комплексные тензорные поля. Кривизна Риччи

Пусть M — многообразие класса C^∞ . Множество $C^\infty(M) + iC^\infty(M)$ всех комплекснозначных дифференцируемых функций на M есть алгебра над $\mathbb{C}$, которую мы обозначим через $\mathfrak{E}_0$. Комплексное векторное поле на M — это, по определению, дифференцирование алгебры $\mathfrak{E}_0$. Обозначим через $\mathfrak{E}^1$ множество комплексных векторных полей на M . Тогда $\mathfrak{E}^1$ является модулем над $\mathfrak{E}_0$. Далее, $\mathfrak{E}^1$ замкнуто относительно операций коммутирования $[X, Y] = XY - YX$ ($X, Y \in \mathfrak{E}^1$). Если s — целое число, $s \geq 1$, то рассмотрим $\mathfrak{E}_0$ -модуль

$$\mathfrak{E}^1 \times \dots \times \mathfrak{E}^1 \quad (s \text{ раз})$$

и обозначим $\mathfrak{E}_0$ -модуль всех $\mathfrak{E}_0$ -полилинейных отображений модуля $\mathfrak{E}^1 \times \dots \times \mathfrak{E}^1$ в $\mathfrak{E}_0$ через $\mathfrak{E}_s$. Элементы модуля $\mathfrak{E}_1$ называются комплексными 1-формами на M . Из леммы 2.3 гл. I следует, что $\mathfrak{E}^1$ и $\mathfrak{E}_1$ — двойственные друг другу модули. По аналогии с гл. I $\mathfrak{E}_0$ -полилинейные отображения модуля

$$\mathfrak{E}_1 \times \dots \times \mathfrak{E}_1 \times \mathfrak{E}^1 \times \dots \times \mathfrak{E}^1 \quad (\mathfrak{E}_1 \text{ } r \text{ раз; } \mathfrak{E}^1 \text{ } s \text{ раз})$$

в $\mathfrak{E}_0$ называются комплексными тензорными полями, r раз контравариантными и s раз ковариантными. Их множество обозначается через $\mathfrak{E}_s^r$ (или $\mathfrak{E}_s^r(M)$).

¹⁾ Строго говоря, теорема 1.2 даже не нужна для наших целей. Она будет использована только при доказательстве предложения 4.2, другое доказательство которого указано в упражнении к гл. VIII.

Операция перехода к комплексно-сопряженной функции в $\mathfrak{E}_0$ индуцирует аналогичную операцию в каждом $\mathfrak{E}_s^r$. Если $Z \in \mathfrak{E}_1^1$, то комплексное векторное поле $\bar{Z}$ определяется формулой $\bar{Z}f = \overline{Z\bar{f}}$ для всех $f \in \mathfrak{E}_0$. Если $\omega \in \mathfrak{E}_1$, то комплексная 1-форма $\bar{\omega}$ определяется формулой $\bar{\omega}(Z) = \overline{\omega(\bar{Z})}$. Наконец, если $\Omega \in \mathfrak{E}_s^r$, то тензорное поле $\bar{\Omega}$ определяется равенством

$$\bar{\Omega}(\omega_1, \dots, \omega_r, Z_1, \dots, Z_s) = \overline{\Omega(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_r, \bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_s)}$$

для $\omega_i \in \mathfrak{E}_1$, $Z_j \in \mathfrak{E}_1^1$. Каждый элемент $X \in \mathfrak{D}^1$ можно рассматривать как комплексное векторное поле на M , полагая

$$XF = X\left(\frac{1}{2}(F + \bar{F})\right) + iX\left(\frac{1}{2i}(F - \bar{F})\right) \quad (F \in \mathfrak{E}_0).$$

Аналогично, $\mathfrak{D}_1$ можно рассматривать как подмножество в $\mathfrak{E}_1$ и, вообще, в тех случаях, когда это будет нужно, мы будем рассматривать элементы модуля $\mathfrak{D}_s^r$ как комплексные тензорные поля на M .

Пусть $p \in M$, и пусть M_p^C — комплексная оболочка касательного пространства M_p . Согласно § 6 гл. III, M_p^C есть векторное пространство над $\mathbb{C}$, состоящее из всех символов $X + iY$, где $X, Y \in M_p$, с операциями, определенными формулами

$$(X_1 + iY_1) + (X_2 + iY_2) = (X_1 + X_2) + i(Y_1 + Y_2),$$

$$(a + ib)(X + iY) = aX - bY + i(bX + aY) \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Элементы пространства M_p^C называются *комплексными касательными векторами* в точке p . Каждый $X + iY \in M_p^C$ определяет комплексную линейную функцию на $\mathfrak{E}_0$, заданную формулой

$$(X + iY)(f + ig) = Xf - Yg + i(Xg + Yf),$$

где $f, g \in C^\infty(M)$. Имеет место формула

$$Z(FG) = F(p)ZG + G(p)ZF$$

для $Z \in M_p^C$ и $F, G \in \mathfrak{E}_0$. Если Z — комплексное векторное поле, то линейная функция $F \rightarrow (ZF)(p)$ на $\mathfrak{E}_0$ получается таким путем из некоторого комплексного касательного вектора $Z_p \in M_p^C$. Таким образом, комплексное векторное поле Z на M можно отождествить с набором $Z_p (p \in M)$ комплексных касательных векторов к M , которые дифференцируемым образом зависят от p . Элементы модуля $\mathfrak{E}_s^r$ можно описать подобным же образом.

Предположим теперь, что J — почти комплексная структура на M . Для каждой $p \in M$ эндоморфизм J_p можно единственным образом продолжить до комплексного линейного отображения пространства M_p^C на себя. Это продолжение, которое мы обозначим также через J_p , удовлетворяет условию $(J_p)^2 = -I$. Далее,

поскольку $J \in \mathfrak{D}_1^1 \subset \mathfrak{E}_1^1$, JZ есть комплексное векторное поле для каждого $Z \in \mathfrak{E}^1$. Ясно, что $(JZ)_p = J_p Z_p$ для всех $p \in M$.

Определение. Пусть (M, J) — почти комплексное многообразие, и пусть Z — комплексное векторное поле на M . Тогда Z называется полем типа $(1, 0)$, если $JZ = iZ$, и полем типа $(0, 1)$, если $JZ = -iZ$.

Каждое комплексное векторное поле Z на почти комплексном многообразии можно записать в виде суммы

$$Z = Z_{1,0} + Z_{0,1},$$

где $Z_{1,0}$ и $Z_{0,1}$ — комплексные векторные поля типов $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно. Действительно, достаточно положить $Z_{1,0} = \frac{1}{2}(Z - iJZ)$, $Z_{0,1} = \frac{1}{2}(Z + iJZ)$. В примере I из § 1 векторные поля $\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$ суть поля типов $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно. Они обычно обозначаются через $2\frac{\partial}{\partial z}$ и $2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, потому что если $f(z) = F(x, y)$ — голоморфная функция, то, согласно уравнениям Коши — Римана,

$$2\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} - i\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}.$$

Определение. Пусть M — связное многообразие с почти комплексной структурой J . Риманова структура g на M называется эрмитовой структурой, если

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \quad \text{для } X, Y \in \mathfrak{D}^1, \quad (1)$$

и кэлеровой структурой, если, кроме того,

$$\nabla_X J = 0 \quad \text{для } X \in \mathfrak{D}^1. \quad (2)$$

Иными словами, условие эрмитовости означает, что J_p есть изометрия пространства M_p для каждой $p \in M$. Условие кэлеровости значит, что, кроме того, тензорное поле J инвариантно при параллельных переносах.

Пусть g — любая риманова структура на связном многообразии M . Пусть $X \rightarrow \nabla_X$ ($X \in \mathfrak{D}^1$) — соответствующая риманова связность. Если теперь рассматривать g как комплексное тензорное поле, то при помощи соотношения (2) из § 9 гл. I можно определить ковариантную производную ∇_Z для всех $Z \in \mathfrak{E}^1$. Тогда

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \quad (X, Y \in \mathfrak{E}^1),$$

так как обе части равенства являются $\mathfrak{E}_0$ -билинейными и совпадают для $X, Y \in \mathfrak{D}^1$.

Лемма 2.1. Пусть M — связное многообразие с почти комплексной структурой J и римановой структурой g .

(i) Если структура g эрмитова, то $g(X, Y) = 0$, когда X и Y оба имеют тип $(1, 0)$ (или оба тип $(0, 1)$).

(ii) Если структура g кэлера и если R — тензор кривизны, то $R(X, Y) = 0$, когда X и Y оба имеют тип $(1, 0)$ (или оба тип $(0, 1)$).

Доказательство. Пусть X и Y — комплексные векторные поля типа $(1, 0)$. Тогда, если структура g эрмитова, то

$$g(X, Y) = g(JX, JY) = g(iX, iY) = -g(X, Y),$$

откуда $g(X, Y) = 0$. Пусть теперь Z, T — произвольные комплексные векторные поля на M . Из условия кэлеровости (2) вытекает, что $\nabla_Z(JX) = J\nabla_Z(X)$. Отсюда следует, что $R(Z, T)X$ есть поле типа $(1, 0)$, если этим свойством обладает X . Поэтому, в силу (i),

$$g(R(Z, T)X, Y) = 0; \quad (3)$$

4-линейная форма $g(R(Z, T)U, V)$ на $\mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^1$ удовлетворяет условиям (а), (б), (в) леммы 12.4 гл. I. Согласно этой лемме,

$$g(R(U, V)Z, T) = g(R(Z, T)U, V),$$

и из формулы (3) вытекает, что $g(R(X, Y)Z, T) = 0$. Так как Z и T произвольны, а g_p невырождена для каждой точки $p \in M$, то получаем нашу лемму.

Пусть M — связное комплексное многообразие размерности m . Пусть p — точка в M и $\{z_1, \dots, z_m\}$ — локальные координаты в открытой окрестности U точки p . Комплекснозначная функция f на M называется голоморфной в точке p , если существует окрестность точки p , в которой f задается сходящимся степенным рядом от локальных координат $z_1 - z_1(p), \dots, z_m - z_m(p)$. Если функция f голоморфна в каждой точке некоторого множества V , то говорят, что f голоморфна в множестве V . Если написать $x_j = \frac{1}{2}(z_j + \bar{z}_j)$, $y_j = \frac{1}{2i}(z_j - \bar{z}_j)$, то $\{x_1, y_1, \dots, x_m, y_m\}$ будет системой координат на подчиненном аналитическом многообразии U . Векторные поля, заданные формулами

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right),$$

$(1 \leq j \leq m)$ суть комплексные векторные поля на U типов $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно. Функция f , голоморфная на U , удовлетворяет равенствам

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z_j} \bar{f} = 0.$$

Дифференциальные формы

$$dz_j = dx_j + i dy_j, \quad d\bar{z}_j = dx_j - i dy_j \quad (1 \leq j \leq m)$$

являются комплексными 1-формами на U . Легко видеть, что

$$\left(\overline{\frac{\partial}{\partial z_j}}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \quad (\bar{dz}_j) = d\bar{z}_j \quad (1 \leq j \leq m)$$

и

$$dz_i \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) = d\bar{z}_i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right) = \delta^i_j,$$

$$dz_i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right) = d\bar{z}_i \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) = 0$$

для $1 \leq i, j \leq m$. Пусть T — комплексное тензорное поле на M типа $(1, 2)$. Коэффициенты T_{ij}^k , T_{ij*}^{k*} и т. д. определяются формулами

$$T\left(dz_k, \frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right) = T_{ij}^k, \quad T\left(d\bar{z}_k, \frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right) = T_{ij*}^{k*}.$$

Аналогичные обозначения употребляются для тензорных полей других типов. Мы пишем также для простоты $Z_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$, $Z_{j*} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$.

Если g — эрмитова структура на M , то по лемме 2.1

$$g_{ij} = g_{i*j*} = 0, \quad (4)$$

а если g кэлерава, то по той же лемме имеем

$$R_{\beta ij}^{\alpha} = R_{\beta i*j*}^{\alpha} = 0, \quad (5)$$

где α, β — произвольные индексы, снабженные звездочкой или нет.

Если $X \rightarrow \nabla_X$ — аффинная связность на M , то функции Γ_{ij}^k , Γ_{i*j*}^{k*} , ..., Γ_{i*j*}^{k*} определяются равенством

$$\nabla_{Z_i}(Z_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k Z_k + \sum_k \Gamma_{ij}^{k*} Z_{k*}$$

и аналогичными равенствами для $\nabla_{Z_{i*}}(Z_j)$, $\nabla_{Z_i}(Z_{j*})$ и $\nabla_{Z_{i*}}(Z_{j*})$.

Лемма 2.2. Эрмитова структура g на связном комплексном многообразии является кэлеровой тогда и только тогда, когда

$$\Gamma_{jk}^{l*} = \Gamma_{j*k}^l = \Gamma_{jk*}^{l*} = \Gamma_{j*k*}^l = 0 \quad (6)$$

в каждой координатной окрестности.

Доказательство. Если g кэлерава, то $J\nabla_{Z_i}(Z_j) = \nabla_{Z_i}(JZ_j) = i\nabla_{Z_i}(Z_j)$, откуда $\Gamma_{jk}^{l*} = 0$, и обратно. Остальные соотношения доказываются аналогично.

Пусть M — многообразие с аффинной связностью, имеющей тензор кривизны R . Пусть $p \in M$ и $X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)$. Отображение

$$L \rightarrow R_p(Y_p, L) \cdot X_p \quad (L \in M_p)$$

является эндоморфизмом пространства M_p . Его след будет обозначаться через $r_p(X_p, Y_p)$. Тензорное поле r , заданное формулой

$$(r(X, Y))(p) = r_p(X_p, Y_p),$$

называется *кривизной Риччи* аффинной связности.

Лемма 2.3. На римановом многообразии M кривизна Риччи является симметрическим тензором, т. е.

$$r(X, Y) = r(Y, X) \quad (X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)).$$

Доказательство. Пусть $p \in M$, и пусть $X_1, \dots, X_m$ — такой базис векторных полей и открытой окрестности U точки p , что $g(X_i, X_j) = \delta_j^i$ на U , где g — риманова структура. Тогда

$$R(X_i, X_j) \cdot X_l = \sum_k R_{lij}^k X_k,$$

откуда

$$r(X_l, X_i) = \sum_k R_{lik}^k.$$

С другой стороны, если X, Y, S, T — любые векторные поля на M , то

$$g(R(X, Y)S, T) = g(R(S, T)X, Y),$$

откуда

$$R_{lij}^m = R_{ilm}^j$$

и получаем равенство $r(X_l, X_i) = r(X_i, X_l)$.

Если M — комплексное многообразие, то будем рассматривать r как комплексное тензорное поле на M с коэффициентами r_{ij} , r_{i^*j} , r_{ij^*} , $r_{i^*j^*}$, определенными выше.

Напомним, что многообразие M называется *ориентируемым*, если существует такой набор $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ локальных карт, что $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ является покрытием многообразия M и что для любых $\alpha, \beta \in A$ отображение $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ имеет строго положительный якобиан в его области определения $\psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. Многообразие M называется *ориентированным*, если выбран такой набор $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Пусть M — комплексное многообразие размерности m . Пусть $(V_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ — набор локальных карт, покрывающий M и такой, что $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ голоморфно для каждой пары $\alpha, \beta \in A$. Положим

$$\varphi_\alpha(p) = (z_1, \dots, z_m), \quad \varphi_\beta(q) = (w_1, \dots, w_m)$$

для $p \in V_\alpha$, $q \in V_\beta$, и пусть $z_j = x_j + iy_j$, $w_j = u_j + iv_j$ ($1 \leq j \leq m$). Из уравнений Коши — Римана легко следует по индукции, что

$$\frac{\partial(u_1, v_1, \dots, u_m, v_m)}{\partial(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m)} = \left| \frac{\partial(w_1, \dots, w_m)}{\partial(z_1, \dots, z_m)} \right|^2. \quad (7)$$

Если определить ψ_α условием

$$\psi_\alpha: p \rightarrow (x_1, y_1, \dots, x_m, y_m),$$

то M , рассматриваемое с локальными картами $(V_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$, является ориентированным многообразием.

Пусть M — ориентированное многообразие с римановой структурой g . Пусть $\{x_1, \dots, x_m\}$ — система координат, действующая в открытой окрестности U на M . Положим

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right), \quad \bar{g} = \det(g_{ij}).$$

Тогда $\bar{g} > 0$, и можно рассмотреть m -форму

$$\sqrt{\bar{g}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \quad (8)$$

на U . Если $\{y_1, \dots, y_m\}$ — другая система координат в U , то легко видеть, что

$$\bar{g}(y_1, \dots, y_m)^{1/2} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m = \bar{g}(x_1, \dots, x_m)^{1/2} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m,$$

так как определитель матрицы Якоби $\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)$ положителен.

Отсюда следует, что на M существует m -форма ω , которая в произвольной координатной окрестности имеет выражение (8). Эта форма ω называется *элементом объема*, соответствующим римановой структуре g на ориентированном многообразии M .

Предложение 2.4. Пусть ω — элемент объема на ориентированном римановом многообразии M . Тогда

$$\nabla_X \omega = 0$$

для каждого векторного поля X на M .

Доказательство. Пусть $p \in M$, и пусть $\{x_1, \dots, x_m\}$ — система координат, действующая в окрестности точки p и такая, что касательные векторы $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ составляют ортонормированный базис пространства M_p . Пусть $X_1, \dots, X_m$ — векторные поля в нормальной окрестности N_p точки p , адаптированные к этому базису, и пусть $\omega^1, \dots, \omega^m$ — формы на N_p , определенные условиями $\omega^i(X_j) = \delta_j^i$. Тогда

$$\omega = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^m.$$

Поскольку $\nabla_X \omega^i = 0$ в точке p , соотношение $\nabla_X \omega = 0$ имеет место в точке p . Так как точка p произвольна, то предложение доказано.

Предложение 2.5. Пусть M — связное комплексное многообразие и g — риманова структура на M . Обозначим через ω соответствующий элемент объема. В локальной системе координат $\{z_1, \dots, z_m\}$ форма ω имеет выражение

$$\omega = G dz_1 \wedge \bar{d}z_1 \wedge \dots \wedge dz_m \wedge \bar{d}z_m,$$

где функция G определяется формулой

$$(-2i)^m G = \bar{g}(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m)^{1/2}.$$

Если структура g кэлорова, то кривизна Риччи удовлетворяет условиям

$$r_{ij*} = Z_i Z_{j*} \log |G|, \quad r_{ij} = r_{i*j*} = 0.$$

Доказательство. Выражение для ω очевидно, так как

$$dz_j \wedge d\bar{z}_j = (-2i) dx_j \wedge dy_j.$$

Предположим теперь, что g кэлорова. Тензор кривизны R удовлетворяет условию

$$g(R(Z_i, Z_{j*}) \cdot Z_l, Z_m) = g(R(Z_l, Z_m) \cdot Z_i, Z_{j*}), \quad (9)$$

и это выражение равно 0, в силу леммы 2.1. Так как форма g_p невырождена для $p \in M$, то получаем

$$R(Z_i, Z_{j*}) \cdot Z_l = \sum_k R_{lij*}^k Z_k, \quad (10)$$

$$R(Z_i, Z_{j*}) \cdot Z_{l*} = \sum_k R_{l*ij*}^{k*} Z_{k*}. \quad (11)$$

Далее, векторные поля Z_i, Z_{j*} определяют базис комплексного касательного пространства в каждой точке. След эндоморфизма векторного пространства равен следу продолжения этого эндоморфизма на комплексную оболочку векторного пространства. Поэтому число $r(Z_i, Z_{j*})$ равно следу комплексного эндоморфизма, заданного формулами

$$\begin{aligned} Z_m &\rightarrow R(Z_{j*}, Z_m) \cdot Z_i, \\ Z_{m*} &\rightarrow R(Z_{j*}, Z_{m*}) \cdot Z_i. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$r_{ij*} = \sum_m R_{ij*m}^m. \quad (12)$$

Аналогичным образом получаем $r_{ij} = r_{i*j*} = 0$. Теперь из леммы 2.2 и из того, что ковариантное дифференцирование перестановочно со свертываниями, следует, что

$$\nabla_{Z_l}(dz_i) = -\sum_j \Gamma_{lj}^i dz_j, \quad \nabla_{Z_l}(d\bar{z}_i) = 0.$$

Сопоставляя эти равенства и равенство

$$\nabla_{Z_l}(\omega) = 0,$$

получаем, что

$$Z_l G = G \sum_i \Gamma_{li}^i. \quad (13)$$

С другой стороны, из леммы 2.2 имеем

$$\begin{aligned} R(Z_{j*}, Z_k) \cdot Z_l &= (\nabla_{Z_{j*}} \nabla_{Z_k} - \nabla_{Z_k} \nabla_{Z_{j*}}) \cdot Z_l = \\ &= \nabla_{Z_{j*}} \left(\sum_s \Gamma_{kl}^s Z_s \right) = \sum_s (Z_{j*} \Gamma_{kl}^s) Z_s. \end{aligned}$$

Сравнивая с (10), получаем

$$R_{lj*k}^s = Z_{j*} \Gamma_{kl}^s. \quad (14)$$

Поскольку $\Gamma_{kl}^s = \Gamma_{lk}^s$, из формул (12) — (14) следует, что

$$r_{ij*} = Z_{j*} \left(\frac{1}{G} Z_i G \right).$$

Так как G отличается от функции $|G|$ постоянным множителем, то получаем нужное нам выражение для r_{ij*} .

§ 3. Ограниченные области. Керна функция

В этой главе под *ограниченной областью* будет пониматься ограниченное открытое связное подмножество пространства $\mathbb{C}^N$, где N — целое положительное число.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^N$. Обозначим через $L^2(D)$ гильбертово пространство комплексных функций на D , для которых $\int_D |f|^2 d\mu < \infty$, где $d\mu$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^{2N}$. Скалярное произведение в $L^2(D)$ имеет вид

$$(f, g) = \int_D f(\zeta) \overline{g(\zeta)} d\mu(\zeta)$$

и, как обычно, норма определяется формулой $\|f\| = (f, f)^{1/2}$. Функции, совпадающие всюду вне некоторого множества меры 0, рассматриваются как одинаковые элементы пространства $L^2(D)$. Обозначим через $\mathfrak{H}(D)$ множество функций из $L^2(D)$, голоморфных в D .

Предложение 3.1. Пусть A — компактное подмножество в D . Тогда существует такое число N_A , что

$$|f(z)| \leq N_A \|f\|$$

для всех $z \in A$ и всех $f \in \mathfrak{H}(D)$.

Доказательство. Пусть $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N) \in A$, и пусть $S(\zeta, \varepsilon)$ — любой цилиндр $|z_1 - \zeta_1| < \varepsilon_1, \dots, |z_N - \zeta_N| < \varepsilon_N$, содержащийся в D . Тогда разложение в степенной ряд для

функции f

$$f(z_1, \dots, z_N) = \sum_{r_i \geq 0} a_{r_1 \dots r_N} (z_1 - \zeta_1)^{r_1} \dots (z_N - \zeta_N)^{r_N}$$

абсолютно сходится в $C(\zeta, \varepsilon)$ (см. Бохнер и Мартин [1], стр. 49). Но члены этого ряда попарно ортогональны относительно скалярного произведения

$$(g, h)_\varepsilon = \int_{C(\zeta, \varepsilon)} g(z) \overline{h(z)} d\mu(z).$$

Следовательно,

$$\int_D |f(z)|^2 d\mu(z) \geq \int_{C(\zeta, \varepsilon)} |f(z)|^2 d\mu(z) \geq \int_{C(\zeta, \varepsilon)} |a_{0 \dots 0}|^2 d\mu(z), \quad (1)$$

откуда

$$\mu(C(\zeta, \varepsilon))^{1/2} |f(\zeta)| \leq \|f\|. \quad (2)$$

Так как A компактно, то существует такое $\varepsilon > 0$, что для каждой точки $(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \in A$ полицилиндр $|z_i - \zeta_i| < \varepsilon$ ($1 \leq i \leq N$) содержится в D . Если обозначить через $(1/N_A)^2$ объем этого полицилиндра, то предложение 3.1 будет следовать из формулы (2).

Следствие 3.2. Множество $\mathfrak{H}(D)$ является замкнутым линейным подпространством в $L^2(D)$ и, значит, гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $\int_D f(z) \overline{g(z)} d\mu(z)$.

Действительно, пусть (f_n) — последовательность в $\mathfrak{H}(D)$, сходящаяся к элементу $f \in L^2(D)$. Тогда, в силу предложения 3.1,

$$|f_n(\zeta) - f_m(\zeta)| \leq N_A \|f_n - f_m\| \quad (3)$$

для всех $\zeta \in A$. Отсюда следует, что существует такая функция g на D , что $f_n \rightarrow g$ равномерно на каждом компактном подмножестве в D . Значит, g голоморфна в D . В силу формулы (3), для $\zeta \in A$ получаем неравенство

$$|f_n(\zeta) - g(\zeta)| \leq N_A \|f_n - f\|. \quad (4)$$

Если задано A , то существует такое целое число K , что правая часть неравенства (4) не превосходит 1 для $n \geq K$ и что $\|f_K\| \leq \|f\| + 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \left[\int_A |g(\zeta)|^2 d\mu \right]^{1/2} &\leq \left[\int_A |f_K(\zeta) - g(\zeta)|^2 d\mu \right]^{1/2} + \\ &+ \left[\int_A |f_K(\zeta)|^2 d\mu \right]^{1/2} \leq \mu(D)^{1/2} + \|f\| + 1. \end{aligned}$$

Значит, $g \in \mathfrak{H}(D)$. Наконец, из равенств

$$\|f - g\|^2 = \lim \|f_n - g\|^2 = \int_D \lim |f_n(z) - g(z)|^2 d\mu = 0$$

следует, что $f = g$ почти всюду.

Теорема 3.3. Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ — любой ортонормированный базис гильбертова пространства $\mathfrak{H}(D)$. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z) \overline{\varphi_n(\zeta)}$$

равномерно сходится на каждом компактном подмножестве в $D \times D$. Его сумма, обозначаемая через $K(z, \bar{\zeta})$, не зависит от выбора ортонормированного базиса и

$$F(z) = \int_D K(z, \bar{\zeta}) F(\zeta) d\mu(\zeta)$$

для каждой функции $F \in \mathfrak{H}(D)$.

Доказательство. Пусть $z \in D$. Ввиду предложения 3.1, линейный функционал $F \rightarrow F(z)$ на $\mathfrak{H}(D)$ непрерывен. Но каждый непрерывный линейный функционал на гильбертовом пространстве представим в виде скалярного умножения на некоторый фиксированный вектор пространства. Значит, существует такая функция $K_z \in \mathfrak{H}(D)$, что

$$F(z) = \int_D F(\zeta) \overline{K_z(\zeta)} d\mu(\zeta) \quad (F \in \mathfrak{H}(D)). \quad (5)$$

Положим теперь $K(z, \bar{\zeta}) = \overline{K_z(\zeta)}$ для $z, \zeta \in D$. Вектор K_z можно выразить через базис $\varphi_0, \varphi_1, \dots$:

$$K_z(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(\zeta), \quad (6)$$

где ряд сходится по норме пространства L_2 и

$$a_n = \int_D K_z(\zeta) \overline{\varphi_n(\zeta)} d\mu(\zeta) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

В силу предложения 3.1, ряд (6) равномерно сходится на каждом компактном подмножестве D . Из (5) получаем, что $a_n = \overline{\varphi_n(z)}$, и поэтому

$$K(z, \bar{\zeta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z) \overline{\varphi_n(\zeta)}. \quad (7)$$

Отсюда видно, что $\overline{K(\zeta, z)} = K(z, \bar{\zeta})$. Следовательно, для заданного ζ функция $z \rightarrow K(z, \bar{\zeta})$ принадлежит пространству $\mathfrak{H}(D)$. Для доказательства сходимости ряда (7) на каждом компактном подмножестве в $D \times D$ достаточно, в силу неравенства

$$2|\varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\zeta)}| \leq |\varphi_n(z)|^2 + |\varphi_n(\zeta)|^2,$$

показать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(z)|^2$ сходится к $K(z, \bar{z})$ равномерно на каждом компактном подмножестве A в D . Пусть $\varepsilon > 0$. Существует такое число $\delta > 0$, что для каждого $(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \in A$ замкнутый полицилиндр $|z_1 - \zeta_1| \leq \delta, \dots, |z_N - \zeta_N| \leq \delta$ содержится в D . Обозначим через A_δ объединение этих полицилиндров. Тогда, в силу (1), существует такая константа M_δ , что

$$|f(z)|^2 \leq M_\delta \int_{A_\delta} |f(\zeta)|^2 d\mu$$

для всех $z \in A$ и всех $f \in \mathfrak{H}(D)$. Поскольку

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_\delta} |\varphi_n(\zeta)|^2 d\mu = \int_{A_\delta} K(\zeta, \bar{\zeta}) d\mu < \infty$$

существует такое целое P , что

$$\sum_{n=P+1}^{\infty} |\varphi_n(z)|^2 \leq M_\delta \sum_{n=P+1}^{\infty} \int_{A_\delta} |\varphi_n(\zeta)|^2 d\mu < \varepsilon$$

для всех $z \in A$. Доказательство закончено.

Определение. Функция K называется *кern-функцией Бергмана* области D .

Обозначим через $(z_1, \dots, z_N)$ координаты точки $z \in \mathbb{C}^N$ и рассмотрим комплексное тензорное поле H на D , заданное формулой

$$H = \sum_{1 \leq i, j \leq N} Z_i Z_j^* \log K(z, \bar{z}) dz_i \otimes d\bar{z}_j.$$

Здесь через $dz_i \otimes d\bar{z}_j$ обозначено комплексное тензорное поле

$$(X, Y) \rightarrow dz_i(X) d\bar{z}_j(Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{E}^1(D)),$$

которое два раза ковариантно. Обозначим через g вещественную часть ограничения поля H на $\mathfrak{D}^1(D) \times \mathfrak{D}^1(D)$.

Предложение 3.4. Тензорное поле g есть риманова структура на D , которая является кэлеровой.

Доказательство. Если f — голоморфная функция на D , то

$$Z_i \bar{f} = Z_j^* f = 0 \quad (1 \leq i, j \leq N),$$

в силу уравнений Коши — Римана. Применим это к ряду

$$K(z, \bar{\zeta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z) \overline{\varphi_n(\zeta)},$$

который, согласно теореме 3.3, можно дифференцировать почленно. Получим

$$Z_j^* \log K(z, \bar{\zeta}) = \frac{1}{K} \sum_n \varphi_n(z) (Z_j^* \bar{\varphi}_n)(\zeta).$$

Так как

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} \log K(z, \bar{\zeta}) \right\}_{\zeta=z} = \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \log K(z, \bar{z}),$$

то

$$\begin{aligned} Z_i Z_j^* \log K = \frac{1}{K^2} \left\{ \sum_n \varphi_n \bar{\varphi}_n \sum_m (Z_i \varphi_m) (Z_j^* \bar{\varphi}_m) - \right. \\ \left. - \sum_m \bar{\varphi}_m (Z_i \varphi_m) \sum_n \varphi_n (Z_j^* \bar{\varphi}_n) \right\} \end{aligned}$$

(мы пишем $\log K$ вместо $\log K(z, \bar{z})$). Отсюда

$$Z_i Z_j^* \log K = \frac{1}{K^2} \sum_{n>m} (\varphi_n (Z_i \varphi_m) - \varphi_m (Z_i \varphi_n)) \overline{(\varphi_n (Z_j \varphi_m) - \varphi_m (Z_j \varphi_n))}, \quad (8)$$

так как $\overline{Z_j f} = Z_j^* \bar{f}$. Пусть $X, Y \in \mathfrak{E}^1(D)$, и пусть $\xi_i = dz_i(X)$, $\eta_j = d\bar{z}_j(Y)$. Тогда, в силу формулы (8),

$$H(X, \bar{X}) = \sum_{i,j} (Z_i Z_j^* \log K) \xi_i \bar{\xi}_j \geq 0, \quad (9)$$

$$H(X, Y) = \sum_{i,j} (Z_i Z_j^* \log K) \xi_i \eta_j = \overline{H(Y, \bar{X})}. \quad (10)$$

Для $X, Y \in \mathfrak{D}^1(D)$ отсюда вытекает, что $g(X, X) \geq 0$ и $2g(X, Y) = H(X, Y) + \overline{H(X, Y)} = H(X, Y) + H(Y, X)$, так что $g(X, Y) = g(Y, X)$. Предположим теперь, что $g(X, X) = 0$ в некоторой точке $p \in D$. Тогда, в силу формулы (8), в точке p

$$\sum \xi_i (\varphi_n (Z_i \varphi_m) - \varphi_m (Z_i \varphi_n)) = 0 \quad (11)$$

для всех n, m . Но, поскольку D ограничена, функции $1, z_1, \dots, z_N$ все принадлежат пространству $\mathfrak{E}(D)$. Систему $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ можно

выбрать таким образом, чтобы функции $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N$ получались из $1, z_1, \dots, z_N$ при помощи обычного процесса ортонормирования. Тогда матрица (b_{ij}) , заданная формулами

$$b_{ij} = Z_i \varphi_j \quad (1 \leq i, j \leq N),$$

есть верхняя треугольная матрица, диагональными элементами которой являются ненулевые константы. Значит, $\det(b_{ij}) \neq 0$. С другой стороны, так как φ_0 константа, то из формулы (11) следует, что

$$\sum_i \xi_i (Z_i \varphi_j) = 0 \quad (1 \leq j \leq N)$$

в точке p . Отсюда вытекает, что все ξ_i равны 0 в точке p , так что $X_p = 0$. Мы показали, что g — риманова структура на D . Из соотношений $dz_i(JX) = i dz_i(X)$ и $d\bar{z}_j(JY) = -i d\bar{z}_j(Y)$ вытекает, что $g(JX, JY) = g(X, Y)$, так что g эрмитова. Предположим теперь, что g продолжена до комплексного тензорного поля. Тогда

$$2g(X, Y) = H(X, Y) + H(Y, X) \quad (X, Y \in \mathfrak{E}^1(D)),$$

так как обе части этого равенства являются комплексными тензорными полями, совпадающими для $X, Y \in \mathfrak{D}^1(D)$. Из равенств (9) и (10) следует, что

$$g_{ij} = g_{i^*j^*} = 0, \quad g_{ij^*} = \frac{1}{2} Z_i Z_{j^*} \log K. \quad (12)$$

Если $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — любые индексы, снабженные звездочками или нет, то из формулы (2) § 9 гл. I имеем

$$2 \sum_{\delta} g_{\alpha\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} = Z_{\beta} g_{\alpha\gamma} + Z_{\gamma} g_{\alpha\beta} - Z_{\alpha} g_{\gamma\beta}. \quad (13)$$

Используя невырожденность формы g , из формул (12) и (13) получаем

$$\Gamma_{jk}^{l*} = \Gamma_{j^*k}^l = \Gamma_{jk^*}^{l*} = \Gamma_{j^*k^*}^l = 0. \quad (14)$$

По лемме 2.2 структура g кэлерова.

Определение. Метрика, индуцированная римановой структурой g , называется *метрикой Бергмана* в области D .

Пусть φ — голоморфный диффеоморфизм ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^N$ на ограниченную область $D' \subset \mathbb{C}^N$. Если выразить его в координатах, то получим

$$\varphi(z_1, \dots, z_N) = (\omega_1(z_1, \dots, z_N), \dots, \omega_N(z_1, \dots, z_N)).$$

Тогда якобиан

$$J_{\varphi} = \frac{\partial(\omega_1, \dots, \omega_N)}{\partial(z_1, \dots, z_N)}$$

является голоморфной функцией в D . Для вещественных координат, заданных равенствами $z_j = x_j + iy_j$, $w_j = u_j + iv_j$ ($1 \leq j \leq N$),

$$|J_\varphi|^2 = \frac{\partial(u_1, v_1, \dots, u_N, v_N)}{\partial(x_1, y_1, \dots, x_N, y_N)}, \quad (15)$$

как было замечено раньше. Обозначим через μ и μ' евклидовы меры в D и D' соответственно. Тогда

$$\mu'(\varphi(M)) = \int_M |J_\varphi|^2 d\mu$$

для каждого борелевского подмножества M в D . Следовательно, отображение $f \rightarrow (f \circ \varphi) J_\varphi$ является изометрией пространства $\mathfrak{H}(D')$ на $\mathfrak{H}(D)$. Отсюда следует, что керна функции K и K' связаны соотношением

$$K(z, \bar{z}) = K'(\varphi(z), \overline{\varphi(z)}) |J_\varphi|^2 \quad (z \in D). \quad (16)$$

Предложение 3.5. Пусть D и D' — ограниченные области в $\mathbb{C}^N$, и пусть g и g' — римановы структуры в D и D' , индуцированные керна функциями. Тогда каждый голоморфный диффеоморфизм φ области D на D' является изометрией.

Доказательство. Используя введенные выше обозначения, можем записать

$$dw_j = du_j + i dv_j, \quad d\bar{w}_j = du_j - i dv_j.$$

Далее,

$$\varphi^*(du_j) = \sum_k \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial u_j}{\partial y_k} dy_k \right)$$

и аналогично для $\varphi^*(dv_j)$. Так как

$$dw_j(d\varphi \cdot X) = \varphi^*(du_j)(X) + i\varphi^*(dv_j)(X) \quad (X \in \mathfrak{D}^1(D)),$$

то из уравнений Коши — Римана следует, что

$$dw_j(d\varphi \cdot X) = \sum_k \frac{\partial w_j}{\partial z_k} dz_k(X),$$

$$d\bar{w}_j(d\varphi \cdot X) = \sum_k \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k(X).$$

Отсюда

$$g'(d\varphi \cdot X, d\varphi \cdot X) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \log K'}{\partial w_i \partial \bar{w}_j} dw_i(d\varphi X) d\bar{w}_j(d\varphi X) =$$

$$= \sum_{k,l} Z_k Z_{l*} \log K'(\varphi(z), \overline{\varphi(z)}) dz_k(X) d\bar{z}_l(X) =$$

$$= \sum_{k,l} Z_k Z_{l*} \log K(z, \bar{z}) dz_k(X) d\bar{z}_l(X) = g(X, X).$$

где использована формула (16) и соотношение

$$\frac{\partial^2 \log |f|^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} = 0,$$

имеющее место для любой голоморфной функции f , не обращающейся в 0 на D . Действительно, в окрестности каждой точки области D

$$\log |f|^2 = \log f + \log \bar{f} = \log f + \overline{\log f},$$

так что

$$Z_k Z_l^* \log |f|^2 = Z_k Z_l^* \log f + Z_l^* Z_k \overline{\log f} = 0.$$

Пусть M — комплексное многообразие, и пусть φ и ψ — голоморфные диффеоморфизмы многообразия M на M . Тогда диффеоморфизмы $\varphi \circ \psi$ и φ^{-1} почти комплексны и, значит, голоморфны. Следовательно, множество голоморфных диффеоморфизмов многообразия M на себя образует группу, обозначаемую через $H(M)$, групповой операцией в которой является композиция отображений. Если $H(M)$ транзитивна на M , то многообразие M называется *однородным*.

Пусть D — ограниченная область с римановой структурой, заданной при помощи кернфункции. Согласно предложению 3.5,

$$H(D) \subset I(D).$$

Если, как обычно, снабдить группу $I(D)$ компактно-открытой топологией (гл. IV, § 2), то ясно, что $H(D)$ — замкнутая подгруппа в $I(D)$.

Предложение 3.6. Пусть D — ограниченная область с римановой структурой g , заданной при помощи кернфункции K . Если область D однородна, то

$$K(z, \bar{z}) = c \bar{g}(x_1, y_1, \dots, x_N, y_N)^{1/2} \quad (c — константа) \quad (17)$$

и

$$r = 2g,$$

где r — кривизна Риччи.

Доказательство. Пусть $\varphi \in H(D)$. Тогда из формулы (16) вытекает, что

$$K(z, \bar{z}) = K(\varphi(z), \overline{\varphi(z)}) |J_\varphi|^2.$$

Далее, соотношение (15) показывает, что

$$\bar{g}(x, y_1, \dots, x_N, y_N) = \bar{g}(u_1, v_1, \dots, u_N, v_N) |J_\varphi|^4.$$

Теперь формула (17) следует из предположения однородности. Формула $r = 2g$ следует из соотношения (12) и из предложения 2.5.

§ 4. Эрмитовы симметрические пространства компактного и некомпактного типа

Пусть M — связное комплексное многообразие с эрмитовой структурой. Множество голоморфных изометрий многообразия M образует группу, обозначаемую через $A(M)$, групповой операцией в которой является композиция отображений. Очевидно, имеем

$$A(M) = H(M) \cap I(M).$$

Определение. Пусть M — связное комплексное многообразие с эрмитовой структурой. Многообразие M называется *эрмитовым симметрическим пространством*, если каждая точка $p \in M$ является изолированной неподвижной точкой некоторой инволютивной голоморфной изометрии s_p многообразия M .

Эрмитово симметрическое пространство, разумеется, является римановым симметрическим пространством четной размерности. Значит, группа $I(M)$ имеет структуру группы Ли, совместимую с компактно-открытой топологией (лемма 3.2 гл. IV), и является группой Ли преобразований многообразия M . Группа $A(M)$ есть замкнутая подгруппа в $I(M)$ и поэтому также является группой Ли преобразований многообразия M . Она транзитивна на M , так как содержит все симметрии. Компонента единицы $A_0(M)$ группы $A(M)$ также транзитивна на M (гл. II, предложение 4.3). Пусть $o \in M$, и пусть K — подгруппа группы $G = A_0(M)$, оставляющая точку o неподвижной. Пара (G, K) является римановой симметрической парой с автоморфизмом $g \rightarrow s_o g s_o$ группы G , и M диффеоморфно многообразию G/K .

Пусть $X \in M_o$, и пусть $\gamma_X(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) — геодезическая в M , имеющая при $t=0$ касательный вектор X . Обозначим через s_t геодезическую симметрию (продолженную на M) относительно точки $\gamma_X(t)$. Мы видели (гл. IV, § 3), что если $T_t = s_{t/2} s_o$, то $t \rightarrow T_t$ есть однопараметрическая подгруппа в G , $T_t \cdot o = \gamma_X(t)$ и $(dT_t)_o$ есть параллельный перенос вдоль γ_X . Так как элементы группы G , по определению, оставляют комплексную структуру на M инвариантной, то тем же свойством обладает параллельный перенос $(dT_t)_o$. Тем самым доказано

Предложение 4.1. Эрмитова структура эрмитова симметрического пространства является кэлеровой.

Рассмотрим теперь задачу о построении комплексной структуры на заданном факторпространстве. Пусть G — связная группа Ли, H — замкнутая подгруппа в G . Предположим, что J — почти комплексная структура на факторпространстве $M = G/H$, инвариантная относительно действия группы G . Обозначим через o точку $\{H\}$ в G/H . Тогда J_o есть эндоморфизм касательного пространства M_o , удовлетворяющий следующим условиям:

$$(i) J_o^2 = -I;$$

(ii) J_o перестановочен с каждым элементом линейной группы изотропии H^* .

С другой стороны, если J_o — эндоморфизм пространства M_o , удовлетворяющий условиям (i) и (ii), то факторпространство $M = G/H$ обладает единственной почти комплексной структурой, совпадающей с J_o в точке o и инвариантной относительно действия группы G .

Предложение 4.2. Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара. Обозначим через π естественное отображение группы G на $M = G/K$ и положим $o = \pi(e)$. Пусть Q — любая G -инвариантная риманова структура на M . Предположим, что A — такой эндоморфизм касательного пространства M_o , что

$$(a) A^2 = -I.$$

$$(б) Q_o(AX, AY) = Q_o(X, Y) \text{ для } X, Y \in M_o.$$

(в) A перестановочен с каждым элементом линейной группы изотропии K^* .

Тогда M обладает единственной G -инвариантной почти комплексной структурой J , такой, что $J_o = A$. Структура Q эрмитова, J интегрируема и, будучи снабженным соответствующей¹⁾ комплексной структурой, M является эрмитовым симметрическим пространством.

Доказательство. Существование и единственность структуры J были уже отмечены выше. Эрмитовость структуры Q ясна из (б), так как Q и J являются G -инвариантными. Проверим теперь, что J инвариантна относительно симметрии s_o (и, значит, относительно каждой симметрии s_p , $p \in M$). Пусть σ — некоторый инволютивный аналитический автоморфизм группы G , такой, что $(K_\sigma)_o \subset K \subset K_\sigma$. Тогда, согласно предложению 3.4 гл. IV, $s_o \circ \pi = \pi \circ \sigma$. Пусть $p \in M$ и $Z \in M_p$. Выберем такой $g \in G$, что $\tau(g) \cdot o = p$, и положим $Z_o = d\tau(g^{-1})Z$. Тогда из инвариантности структуры J относительно G и из соотношений $s_o \circ \tau(g) = \tau(\sigma(g)) \circ s_o$, $ds_o J_o = J_o ds_o$ следует, что

$$\begin{aligned} ds_o(J_p Z) &= ds_o d\tau(g) J_o Z_o = d\tau(\sigma(g)) \circ J_o (d\sigma_o Z_o) = \\ &= J_{s_o \cdot p} (ds_o d\tau(g) Z_o) = J_{s_o \cdot p} (ds_o Z). \end{aligned}$$

Значит, J инвариантна относительно s_o . Проверим теперь, что J удовлетворяет условию интегрируемости

$$[X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] = 0 \quad (1)$$

для произвольных векторных полей X, Y на M . В силу однородности многообразия M , достаточно проверить (1) в точке o .

¹⁾ См. теорему 1.2.

Далее, так как левая часть равенства (1) является $C^\infty(M)$ -билинейной, то можно допустить, что векторные поля X, Y адаптированы (в окрестности точки o) к их значениям X_o, Y_o в точке o . Так как J инвариантна относительно G и, в частности, относительно параллельных переносов, то отсюда следует, что векторные поля JX, JY адаптированы к их значениям в точке o . Но поскольку кручение равно 0,

$$[U, V]_o = (\nabla_U(V))_o - (\nabla_V(U))_o = 0$$

для любых векторных полей U, V , адаптированных к их значениям в точке o . Отсюда следует (1). Комплексная структура на M , соответствующая структуре J (теорема 1.2), является, в силу ее единственности, инвариантной относительно всех s_p . Значит, M — эрмитово симметрическое пространство.

Замечание. Приведенное выше доказательство использует глубокую теорему 1.2, которая в этой книге не доказывается. В упражнении к настоящей главе мы наметим прямое доказательство предложения 4.2 (при слабых ограничениях), не использующее теорему 1.2.

Пример пространства $\mathbb{C}^2$ показывает, что иногда группы $A_0(M)$ и $I_0(M)$ являются различными. Однако, как показывает следующая лемма, этот пример является в каком-то смысле исключительным.

Лемма 4.3. Пусть M — эрмитово симметрическое пространство. Тогда группа $I_0(M)$ полупроста в том и только том случае, когда $A_0(M)$ полупроста. В этом случае $A_0(M) = I_0(M)$.

Доказательство. Пусть $G = I_0(M)$, и пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G . Обозначим через s автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, соответствующий автоморфизму $g \rightarrow s_o g s_o$ группы G , и через $\mathfrak{p}$ — множество таких векторов $X \in \mathfrak{g}$, что $sX = -X$. Так как $A(M)$ содержит симметрии относительно всех точек многообразия M , то ясно, что $A(M)$ содержит все однопараметрические подгруппы $\exp tX$, где $X \in \mathfrak{p}$. Значит, алгебра Ли группы $A(M)$ содержит $\mathfrak{p}$ и $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. Если $I(M)$ полупроста, то $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] + \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$, так что $A_0(M) = I_0(M)$. С другой стороны, если $A_0(M)$ полупроста, то $A_0(M) = I_0(M)$ по теореме 4.1 гл. V.

Определение. Пусть M — эрмитово симметрическое пространство. Говорят, что M — пространство компактного типа или некомпактного типа, в зависимости от типа римановой симметрической пары $(A_0(M), K)$, где K — подгруппа изотропии в $A_0(M)$ относительно некоторой точки $o \in M$.

Предложение 4.4. Пусть M — односвязное эрмитово симметрическое пространство. Тогда M является прямым произведением

$$M = M_0 \times M_- \times M_+,$$

где все сомножители суть односвязные эрмитовы симметрические пространства, $M_0 = \mathbf{C} \times \dots \times \mathbf{C}$, M_- и M_+ — пространства компактного типа и некомпактного типа соответственно.

Доказательство. Пусть $G = A_0(M)$, пусть o — точка в M и K — подгруппа изотропии группы G в точке o . Пусть $(\tilde{G}, \varphi)$ — универсальная накрывающая группа группы G , и пусть $\tilde{K}$ — компонента единицы группы $\varphi^{-1}(K)$. Если обозначить через ψ отображение $g\tilde{K} \rightarrow \varphi(g)K$ многообразие $\tilde{G}/\tilde{K}$ на G/K , то пара $(\tilde{G}/\tilde{K}, \psi)$ является накрывающим пространством для G/K (лемма 13.4 гл. I). Следовательно, $M = \tilde{G}/\tilde{K}$. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G и через s — автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, соответствующий автоморфизму $g \rightarrow s_o g s_o$ группы G . Тогда пара $(\mathfrak{g}, s)$ является эффективной ортогональной симметрической алгеброй Ли. Алгебру $\mathfrak{g}$ и алгебру Ли $\mathfrak{k}$ группы $\tilde{K}$ можно разложить в соответствии с теоремой 1.1 гл. V:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_- + \mathfrak{g}_+, \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{k}_- + \mathfrak{k}_+.$$

Группы $\tilde{G}$ и $\tilde{K}$ разлагаются соответственно:

$$\tilde{G} = G_0 \times G_- \times G_+, \quad \tilde{K} = K_0 \times K_- \times K_+.$$

Пространства $M_0 = G_0/K_0$, $M_- = G_-/K_-$, $M_+ = G_+/K_+$ суть односвязные римановы глобально симметрические пространства, и их прямым произведением является M . Обозначим через $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}_-$, $\mathfrak{p}_+$ собственные подпространства, отвечающие собственному значению -1 автоморфизма s . Как обычно, их можно отождествить с касательными пространствами к M , M_0 , M_- , M_+ и

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}_- + \mathfrak{p}_+. \quad (2)$$

Обозначим через J и Q соответственно почти комплексную структуру и риманову структуру на M . Так как $\mathfrak{p}$ отождествлено с касательным пространством к M в точке o , то Q_o есть билинейная форма на $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$, а J_o — эндоморфизм пространства $\mathfrak{p}$. Пусть $Y_o \in \mathfrak{p}_0$. Тогда $J_o Y_o$, в соответствии с разложением (2), представляется в виде

$$J_o Y_o = X_0 + X_- + X_+. \quad (3)$$

Обозначим через Ad присоединенное представление группы $\tilde{G}$. Тогда

$$\text{Ad}(k) Z_o = Z_o \quad \text{для} \quad k \in K_- \times K_+, \quad Z_o \in \mathfrak{p}_0 \quad (4)$$

по лемме 1.5 гл. V. Поскольку $\text{Ad}(k)$ и J_o перестановочны, из формул (3) и (4) следует, что

$$\text{Ad}(k)(X_- + X_+) = X_- + X_+ \text{ для } k \in K_- \times K_+.$$

Однако это последнее соотношение справедливо для всех $k \in \tilde{K}$, так как для $k_0 \in K_0$ автоморфизм $\text{Ad}(k_0)$ оставляет каждый вектор из $\mathfrak{p}_- + \mathfrak{p}_+$ неподвижным. Поэтому из следствия 1.7 гл. V вытекает, что $X_- + X_+ = 0$, так что $J_o \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_0$. Поскольку J_o оставляет Q_o инвариантной, ясно, что $J_o(\mathfrak{p}_- + \mathfrak{p}_+) \subset \mathfrak{p}_- + \mathfrak{p}_+$. Повторяя приведенное выше рассуждение, получим, что $\mathfrak{p}_-$ и $\mathfrak{p}_+$ инвариантны относительно J_o . Теперь из предложения 4.2 следует, что пространства M_- и M_+ являются эрмитовыми симметрическими.

Теорема 4.5. Пусть M — эрмитово симметрическое пространство, для которого группа $A_0(M)$ полупроста. Пусть $o \in M$, и пусть K — подгруппа изотропии в $A_0(M)$ относительно точки o . Обозначим соответствующую линейную группу изотропии и ее алгебру Ли через K^* и $\mathfrak{k}^*$. Тогда

(i) комплексная структура J_o в пространстве M_o принадлежит центру с алгебры $\mathfrak{k}^*$;

(ii) симметрия s_o содержится в компоненте единицы центра Z_K группы K .

Доказательство. Обозначим через Q и R соответственно риманову структуру и тензор кривизны на M . Тогда, согласно теореме 4.1 гл. V, алгебра Ли $\mathfrak{k}^*$ состоит из тех эндоморфизмов пространства M_o , которые, будучи продолжены на смешанную тензорную алгебру над M_o в качестве дифференцирований, перестановочных со свертываниями аннулируют Q_o и R_o . Если $X, Y \in M_o$, то, в силу формул (1) и (2) из § 5 гл. IV, имеем

$$(J_o \cdot Q_o)(X, Y) = -Q_o(X, J_o Y) - Q_o(J_o X, Y), \quad (5)$$

$$(J_o \cdot R_o)(X, Y) = [J_o, R_o(X, Y)] - R_o(J_o X, Y) - R_o(X, J_o Y). \quad (6)$$

Правая часть равенства (5) равна 0, так как структура Q эрмитова. Первый член в правой части равенства (6) равен 0, так как J_o перестановочен с каждым элементом группы K^* и $R_o(X, Y) \in \mathfrak{k}^*$. Наконец, рассматривая R как комплексное тензорное поле, получаем по лемме 2.1, что

$$R_o(X - iJ_o X, Y - iJ_o Y) = 0.$$

Рассматривая в равенстве (7) мнимую часть, находим, что правая часть равенства (6) равна 0. Значит, $J_o \in \mathfrak{k}^*$ и поэтому $J_o \in \mathfrak{s}$. Отождествляя алгебры Ли $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{k}^*$, имеем

$$\exp(tJ_o) \in Z_K \text{ для каждого } t \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Но на пространстве $M_o (= \mathfrak{p})$

$$e^{\pi J_o} = -I,$$

откуда $\exp(\pi J_o) = s_o$. Доказательство закончено.

Компактная связная полупростая группа Ли U является римановым глобально симметрическим пространством относительно любой двусторонне инвариантной римановой структуры. Однако, как показывает теорема 4.5, пространство U нельзя сделать эрмитовым симметрическим.

Теорема 4.6. Пусть M — эрмитово симметрическое пространство компактного или некомпактного типа. Тогда M односвязно.

Доказательство. Так как каждое риманово глобально симметрическое пространство некомпактного типа односвязно, то можно предположить, что M — пространство компактного типа. Пусть $U = I_o(M) (= A_o(M))$. В обозначениях теоремы 4.5 имеем $M = U/K$. Алгебра Ли и группы U представляется в виде $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_*$, где $\mathfrak{k}_0$ — алгебра Ли группы K и $\mathfrak{p}_*$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{k}_0$ в $\mathfrak{u}$ по отношению к форме Киллинга алгебры $\mathfrak{u}$. Поскольку $\mathfrak{k}_0$ можно рассматривать как алгебру Ли линейной группы изотропии, соответствующей группе K , имеем по теореме 4.5 $J_o \in \mathfrak{k}_0$. Обозначим через S замыкание однопараметрической подгруппы $\exp tJ_o$ ($t \in \mathbf{R}$) в K . Так как J_o не аннулирует ни одного вектора из $\mathfrak{p}_*$, то $\mathfrak{k}_0$ является централизатором элемента J_o в $\mathfrak{u}$. Значит, централизатор Z_S группы S в U имеет алгебру Ли $\mathfrak{k}_0$. Из формулы (8) заключаем, что $K \subset Z_S$. Будучи централизатором тора, подгруппа Z_S связна, так что K связна.

Пусть $(\tilde{U}, \varphi)$ — универсальная накрывающая группа группы U . Отображение $\sigma: u \rightarrow s_o u s_o$ является автоморфизмом группы U . Обозначим через $\tilde{\sigma}$ такой автоморфизм группы $\tilde{U}$, что $d\tilde{\sigma} = d\sigma$. Обозначим через $\tilde{K}$ множество неподвижных точек автоморфизма $\tilde{\sigma}$. По теореме 7.2 гл. VII группа $\tilde{K}$ связна. Значит, $\varphi(\tilde{K}) = K$, и по теореме 4.5 существует такой элемент $z \in \tilde{K}$, что $\varphi(z) = s_o$. Автоморфизм $\Sigma: u \rightarrow z u z^{-1}$ группы $\tilde{U}$ удовлетворяет условию $\varphi \circ \Sigma = \sigma \circ \varphi$, откуда $d\Sigma = d\sigma$. Отсюда следует, что $\tilde{\sigma} = \Sigma$ и $\tilde{K}$ — централизатор элемента z в $\tilde{U}$. В частности, $\tilde{K}$ содержит центр группы $\tilde{U}$, так что $\tilde{K} = \varphi^{-1}(K)$. Следовательно, $U/K = \tilde{U}/\tilde{K}$ и поэтому односвязно.

Замечание. В настоящей главе будет доказано, что класс симметрических ограниченных областей совпадает с классом эрмитовых симметрических пространств некомпактного типа.

Пример. Может случиться так, что два римановых глобально симметрических пространства M_1 и M_2 связаны с одной и той же ортогональной симметрической алгеброй Ли, причем M_1 — эрмитово симметрическое, а M_2 — нет. В качестве примера возьмем $M_1 = S^2$ (двумерная сфера) и $M_2 = P^2$ (двумерное проективное пространство). Оба эти пространства являются римановыми глобально симметрическими (гл. VII, предложение 1.2), причем S^2 — эрмитово симметрическое. Однако P^2 не является эрмитовым симметрическим пространством, так как оно даже не ориентируемо.

§ 5. Неприводимые ортогональные симметрические алгебры Ли

Сейчас удобно произвести дальнейшее разложение ортогональных симметрических алгебр Ли компактного и некомпактного типов.

Определение. Пусть $(\mathfrak{l}, s)$ — ортогональная симметрическая алгебра Ли, а $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{e}$ — собственные подпространства автоморфизма s , отвечающие собственным значениям $+1$ и -1 соответственно. Алгебра $(\mathfrak{l}, s)$ называется *неприводимой*, если выполняются следующие два условия:

- (i) $\mathfrak{l}$ полупроста и $\mathfrak{u}$ не содержит ненулевых идеалов алгебры $\mathfrak{l}$.
- (ii) Алгебра $\text{ad}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{u})$ неприводимым образом действует на $\mathfrak{e}$.

Пусть (L, U) — пара, связанная с $(\mathfrak{l}, s)$. Тогда (L, U) называется неприводимой, если алгебра $(\mathfrak{l}, s)$ неприводима. Риманово глобально симметрическое пространство M называется неприводимым, если пара $(I_0(M), K)$ неприводима, здесь K — подгруппа изотропии группы $I_0(M)$ в некоторой точке многообразия M .

Пусть (L, U) — неприводимая риманова симметрическая пара. Тогда все L -инвариантные римановы структуры на L/U совпадают с точностью до постоянного множителя. Действительно, $\text{Ad}_L(U)$ есть компактная линейная группа, неприводимым образом действующая на $\mathfrak{e}$, и эндоморфизм $b: \mathfrak{e} \rightarrow \mathfrak{e}$ (из доказательства леммы 1.2 гл. V) перестановочен с каждым элементом группы $\text{Ad}_L(U)$. Значит, b может иметь только одно собственное значение, и формы $Q(X, X)$ и $B(X, X)$ в цитированной лемме пропорциональны. Таким образом, L/U обладает, по существу, единственной L -инвариантной римановой структурой. Поэтому мы всегда можем предполагать, что эта риманова структура индуцирована формой $\pm B$, где B — форма Киллинга алгебры $\mathfrak{l}$.

Очевидно, что $(\mathfrak{l}, s)$ неприводима тогда и только тогда, когда двойственная алгебра $(\mathfrak{l}^*, s^*)$ неприводима.

Введенное выше условие (ii) можно описать в других терминах.

Предложение 5.1. В принятых выше обозначениях предположим, что условие (i) удовлетворяется. Тогда условие (ii)

имеет место в том и только том случае, когда u — максимальная собственная подалгебра в I .

Доказательство. Предположим сначала, что справедливо (ii). Если u не максимальна, то существует такая подалгебра u^* в I , что имеют место строгие включения $u \subset u^* \subset I$. Положим $e^* = u^* \cap e$. Тогда $[u, e^*] \subset u^* \cap e = e^*$, откуда, в силу неприводимости, $e^* = \{0\}$ или $e^* = e$. Из равенства $e^* = e$ вытекает, что $u^* = I$, а это невозможно. Равенство $e^* = \{0\}$ также невозможно, так как если $Z \in u^*$, $Z \notin u$, то $Z = T + X$, где $T \in u$, $X \in e$, $X \neq 0$. Отсюда следует, что $X = Z - T \in u^* \cap e = e^*$, что дает противоречие. Обратное утверждение тривиально. Действительно, если e' — собственное инвариантное подпространство в e , то $u + e'$ есть собственная подалгебра в I , строго содержащая u .

Предложение 5.2. Пусть (I, s) — ортогональная симметрическая алгебра Ли. Пусть $I = u + e$ — разложение алгебры I на собственные подпространства автоморфизма s , отвечающие собственным значениям $+1$ и -1 соответственно. Допустим, что I полупроста и что u не содержит ненулевых идеалов алгебры I . Тогда существуют такие идеалы I_i в I , что

$$(a) \quad I = \sum_i I_i \text{ (прямая сумма);}$$

(б) идеалы I_i попарно ортогональны по отношению к форме Киллинга B алгебры I и инвариантны относительно s ;

(в) если обозначить через s_i ограничение автоморфизма s на I_i , то (I_i, s_i) — неприводимая ортогональная симметрическая алгебра Ли.

Доказательство. Предложение доказывается аналогично теореме 1.1 гл. V. Пусть Q и b таковы, как в лемме 1.2 гл. V. Тогда b — эндоморфизм пространства e , симметрический относительно Q , т. е.

$$Q(bX, Y) = Q(X, bY) \quad (X, Y \in e).$$

Пусть

$$e = \sum_j f_j$$

— разложение пространства e на собственные подпространства эндоморфизма b . Пространства f_j попарно ортогональны по отношению к Q и B . Каждое f_j инвариантно относительно $\text{ad}_I(u)$ и может быть разложено на неприводимые подпространства, попарно ортогональные по отношению к Q и B . Таким образом, получаем прямое разложение:

$$e = \sum_i e_i,$$

ортогональное по отношению к Q и B , где подпространства e_i инвариантны и неприводимы относительно $\text{ad}_1(u)$. Положим $u_i = [e_i, e_i]$ и $I_i = u_i + e_i$. Так же, как в § 1 гл. V, можно доказать, что пространства I_i обладают свойствами, сформулированными в предложении 5.2.

Следующие важные теоремы дают описание неприводимых ортогональных симметрических алгебр Ли.

Теорема 5.3. *Неприводимые ортогональные симметрические алгебры Ли компактного типа суть*

I. (I, s) , где I — компактная простая алгебра Ли и s — любой инволютивный автоморфизм алгебры I ;

II. (I, s) , где компактная алгебра I является прямой суммой $I = I_1 + I_2$ простых идеалов, которые переставляются при помощи инволютивного автоморфизма s алгебры I .

Теорема 5.4. *Неприводимые ортогональные симметрические алгебры Ли некомпактного типа суть*

III. (I, s) , где I — простая некомпактная алгебра Ли над $\mathbb{R}$, комплексная оболочка $I^{\mathbb{C}}$ которой является простой алгеброй Ли над $\mathbb{C}$, и s — такой инволютивный автоморфизм алгебры I , что его неподвижные точки составляют компактно вложенную подалгебру;

IV. (I, s) , где $I = \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли над $\mathbb{C}$. Здесь s — сопряжение алгебры I по отношению к максимальной компактно вложенной подалгебре.

Кроме того, если обозначить через (I^*, s^*) алгебру, двойственную к (I, s) , то

$$(I, s) \text{ типа III} \iff (I^*, s^*) \text{ типа I,}$$

$$(I, s) \text{ типа IV} \iff (I^*, s^*) \text{ типа II.}$$

Доказательство теоремы 5.3. Из предложения 5.2 очевидно, что каждая (I, s) типа I неприводима. Далее, пусть (I, s) — алгебра типа II. Тогда, согласно следствию 6.3 гл. II, единственными идеалами в I являются $\{0\}$, I_1 , I_2 и I . Снова предложение 5.2 показывает, что (I, s) неприводима

С другой стороны, предположим, что (I, s) неприводима и что $I = u + e$ компактна. Пусть

$$I = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

— разложение алгебры I на простые идеалы (следствие 6.3 из гл. II). Тогда s переставляет идеалы α_i . Если $s\alpha_i = \alpha_i$, то положим $I_i = \alpha_i$. Если $s\alpha_i \neq \alpha_i$, то положим $I_i = \alpha_i + s\alpha_i$. Тогда имеет место прямое разложение

$$I = \sum_i I_i,$$

где каждый I_i есть идеал в I , инвариантный относительно s , и поэтому может быть разложен на собственные подпространства $I_i = u_i + e_i$. Поскольку $u = \sum_i u_i$, из неприводимости алгебры (I, s) следует, что все e_i равны $\{0\}$, кроме одного, например e_1 . Но тогда условие (i) неприводимости показывает, что $u_i = \{0\}$ для $i \neq 1$. Итак, $I_i = \{0\}$ для $i \neq 1$, и теорема доказана.

Доказательство теоремы 5.4. Пусть (I, s) — ортогональная симметрическая алгебра Ли и (I^*, s^*) — двойственная ей алгебра. Так как при двойственности сохраняется неприводимость, то достаточно доказать последние два утверждения теоремы. Предположим сначала, что (I^*, s^*) — алгебра типа I. Тогда разложение $I = u + e$ на собственные подпространства автоморфизма s есть разложение Картана алгебры I . Если I не проста, то мы имеем $I = a_1 + a_2$, где a_1 и a_2 — ненулевые идеалы. Пусть $a_1 = f_1 + p_1$, $a_2 = f_2 + p_2$ — разложения Картана для a_1 и a_2 . (Если a_1 или a_2 компактна, то p_1 или p_2 равно $\{0\}$.) Так как разложения Картана $I = u + e$ и $I = (f_1 + f_2) + (p_1 + p_2)$ сопряжены, то можно допустить, что $f_1 + f_2 = u$, $p_1 + p_2 = e$. Но тогда $(f_1 + ip_1) + (f_2 + ip_2)$ есть разложение алгебры I^* на ненулевые идеалы. Значит, I должна быть простой. Комплексная алгебра I^C также проста, так как иначе I^C была бы прямой суммой $I^C = n_1 + n_2$, где n_1, n_2 — ненулевые идеалы. Так как последние полупросты, то пусть f_1, f_2 — компактные вещественные формы алгебр n_1 и n_2 соответственно. Тогда I^* изоморфна алгебре $f_1 + f_2$, которая не проста. Таким образом, (I, s) — алгебра типа III. С другой стороны, пусть (I, s) — алгебра типа III. Тогда (I, s) , и значит (I^*, s^*) неприводима. Если бы (I^*, s^*) была типа II, то комплексная оболочка $(I^*)^C = I^C$ не была бы простой. Значит, (I^*, s^*) — алгебра типа I. Предположим теперь, что (I^*, s^*) — алгебра типа II. Тогда $I^* = I_1^* + I_2^*$, где I_1^* и I_2^* — простые идеалы, переставляемые автоморфизмом s^* . Из теоремы 2.4 гл. V и следующего за ней замечания мы знаем, что I обладает комплексной структурой J и что если $I = f + Jf$ — разложение Картана алгебры I , то f и I_1^* изоморфны. Значит, f проста и I проста (как алгебра Ли над $\mathbb{C}$). Итак, (I, s) — алгебра типа IV. Обращая эти рассуждения и используя теорему 2.4 гл. V, получаем, что если (I, s) — алгебра типа IV, то (I^*, s^*) — алгебра типа II.

Предложение 5.5. Пусть M — односвязное риманово глобально симметрическое пространство компактного или некомпактного типа. Тогда M является прямым произведением

$$M = M_1 \times \dots \times M_r,$$

где сомножители M_i неприводимы. Если M эрмитово, то каждое пространство M_i эрмитово.

Доказательство. Как в доказательстве предложения 4.2 гл. V, положим $G = I_0(M)$ и обозначим через K подгруппу изотропии группы G в некоторой точке o многообразия M . Если $(\tilde{G}, \varphi)$ — универсальная накрывающая группа группы G и $\tilde{K}$ — компонента единицы группы $\varphi^{-1}(K)$, то $M = \tilde{G}/\tilde{K}$. Применяя предложение 5.2, получаем разложения

$$\begin{aligned}\tilde{G} &= G_1 \times \dots \times G_r, \\ \tilde{K} &= K_1 \times \dots \times K_r,\end{aligned}\tag{1}$$

где каждая пара (G_i, K_i) неприводима. Если положить $M_i = G_i/K_i$, то получим

$$M = M_1 \times \dots \times M_r.$$

Далее, G_i полупроста и алгебра Ли подгруппы K_i не содержит ненулевых идеалов алгебры Ли группы G_i . В силу теоремы 4.1 гл. V, G_i и $I(M_i)$ имеют одинаковые алгебры Ли. Значит, M_i неприводимо. Наконец, предположим, что M — эрмитово симметрическое пространство, и обозначим через J соответствующую почти комплексную структуру на M . Как доказано в § 4, группы $A_0(M)$ и $I_0(M)$ совпадают и J_0 лежит в центре алгебры Ли группы K . В соответствии с разложением (1) J_0 представляется в виде $J_0 = J_1 \times \dots \times J_r$, где каждый J_i есть эндоморфизм с квадратом $-I$ касательного пространства к M_i в точке $\{K_i\}$ и J_i лежит в центре алгебры Ли группы K_i . Поскольку каждая K_i связна, J_i перестановочен со всеми элементами группы $\text{Ad}_{G_i}(K_i)$. Теперь из предложения 4.2 видно, что пространство M_i эрмитово.

§ 6. Неприводимые эрмитовы симметрические пространства

Теорема 6.1.

(i) Некомпактными неприводимыми эрмитовыми симметрическими пространствами являются в точности многообразия G/K , где G — связная некомпактная простая группа Ли с центром $\{e\}$, а K — максимальная компактная подгруппа в G , имеющая не дискретный центр.

(ii) Компактными неприводимыми эрмитовыми симметрическими пространствами являются в точности многообразия U/K , где U — связная компактная простая группа Ли с центром $\{e\}$, а K — максимальная связная собственная подгруппа в U , имеющая не дискретный центр.

Доказательство. Пусть M — неприводимое эрмитово симметрическое пространство. Тогда $M = \tilde{G}/\tilde{K}$, где $\tilde{G}$ — односвязная накрывающая группа группы $I_0(M)$, а $\tilde{K}$ связна и содержит центр группы $\tilde{G}$ (теорема 1.1 гл. VI и теорема 4.6). Значит,

$M = \text{Ad}(\tilde{G})/\text{Ad}(\tilde{K})$, где $\text{Ad} = \text{Ad}_{\tilde{G}}$. Это представление пространства M обладает свойствами, сформулированными в (i) и (ii), как видно из теорем 4.5, 5.3 и 5.4 и из предложения 5.1.

С другой стороны, предположим, что U и K имеют свойства, перечисленные в (ii). Тогда центр группы K содержит элемент j порядка 4. Пусть $s = j^2$, и пусть Z_s — централизатор элемента s в U . Поскольку $s \neq e$, имеем $Z_s \neq U$, так что K совпадает с компонентой единицы группы Z_s . Автоморфизм $\sigma: u \rightarrow sus^{-1}$ ($u \in U$) превращает (U, K) в риманову симметрическую пару. Обозначим через $\mathfrak{p}_*$ собственное подпространство автоморфизма $d\sigma$, отвечающее собственному значению -1 , и через J — ограничение автоморфизма $\text{Ad}_U(j)$ на $\mathfrak{p}_*$. Тогда $J^2 = -I$, так что J порождает U -инвариантную почти комплексную структуру на U/K . Согласно предложению 4.2, U/K является эрмитовым симметрическим пространством. Утверждение (i) следует из доказанного при помощи двойственности.

§ 7. Ограниченные симметрические области

Определение. Ограниченная область D называется *симметрической*, если каждая точка $p \in D$ является изолированной неподвижной точкой некоторого инволютивного голоморфного диффеоморфизма области D на себя.

Теорема 7.1.

(i) Каждая ограниченная симметрическая область D , будучи снабжена метрикой Бергмана, является эрмитовым симметрическим пространством некомпактного типа. В частности, ограниченная симметрическая область обязательно односвязна.

(ii) Пусть M — эрмитово симметрическое пространство некомпактного типа. Тогда существуют ограниченная симметрическая область D и голоморфный диффеоморфизм многообразия M на D .

Доказательство утверждения (i). Пусть D — ограниченная симметрическая область. Пусть Q — риманова структура на D , соответствующая метрике Бергмана. Из предложения 3.5 видно, что D — эрмитово симметрическое пространство. Пусть o — фиксированная точка в D . Обозначим через σ автоморфизм $g \rightarrow s_o g s_o$ группы $A_0(D)$ и через $\mathfrak{l}$ — алгебру Ли группы $A_0(D)$. Если положить $s = d\sigma$, то $(\mathfrak{l}, s)$ будет эффективной ортогональной симметрической алгеброй Ли. Из теоремы 1.1 гл. V получаем прямые разложения:

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{u} + \mathfrak{e}, \quad \mathfrak{e} = \mathfrak{e}_0 + \mathfrak{e}_- + \mathfrak{e}_+.$$

Чтобы доказать утверждение (i), достаточно показать, что $\mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_- = \{0\}$. Пусть $X \in \mathfrak{e}$. Как и раньше, обозначим через T_X ограничение эндоморфизма $(\text{ad}_{\mathfrak{l}} X)^2$ на $\mathfrak{e}$. Тогда тензор кривизны R

многообразия D удовлетворяет равенству

$$R_o(X, Y)X = T_X Y \quad (X, Y \in e). \quad (1)$$

Поэтому, в силу предложения 3.6,

$$2Q_o(X, X) = \text{Tr}(T_X). \quad (2)$$

Но $[e_0, e] = \{0\}$ по лемме 1.3 гл. V, так что из равенства (2) вытекает, что $e_0 = \{0\}$. Предположим теперь, что $X \in e_-$. Тогда $T_X e_+ = \{0\}$, $T_X e_- \subset e_-$ и

$$Q_o(T_X Y, Y) = Q_o(R_o(X, Y)X, Y) \leq 0$$

для $Y \in e_-$, так как кривизна в направлении двумерного подпространства из e_- неотрицательна. Значит, из формулы (2) следует, что $X = 0$, т. е. $e_- = \{0\}$. Тем самым (i) доказано.

Доказательство теоремы 7.1 (ii) (алгебраическая часть). Ввиду теоремы 4.6 и предложения 5.5 можно допустить, что M неприводимо. Тогда по теореме 6.1 группа $I_0(M)$ проста. Обозначим через $\mathfrak{g}_0$ ее алгебру Ли, через θ — инволютивный автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}_0$, порожденный симметрией относительно некоторой точки многообразия M . Пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ — разложение алгебры $\mathfrak{g}_0$ на собственные подпространства автоморфизма θ , отвечающие собственным значениям $+1$ и -1 соответственно. Пусть $\mathfrak{c}_0$ — центр алгебры $\mathfrak{k}_0$ и $\mathfrak{h}_0$ — некоторая максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{k}_0$. Тогда $\mathfrak{c}_0 \subset \mathfrak{h}_0$ и $\mathfrak{h}_0$ является максимальной абелевой подалгеброй в $\mathfrak{g}_0$. Действительно, централизатор подалгебры $\mathfrak{c}_0$ в $\mathfrak{g}_0$ содержит $\mathfrak{k}_0$, но отличен от $\mathfrak{g}_0$. Поэтому, согласно предложению 5.1, он должен совпадать с $\mathfrak{k}_0$.

Максимальность подалгебры $\mathfrak{h}_0$ приводит к важной связи между разложением Картана $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ и разложением комплексной оболочки $\mathfrak{g}$ алгебры $\mathfrak{g}_0$ на корневые подпространства. Пусть $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$ — подпространства в $\mathfrak{g}$, натянутые на $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{p}_0$. Тогда $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{p}_0$ — компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$. Обозначим через σ и τ сопряжения алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к формам $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{u}$ соответственно и через B — форму Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$. Эрмитова форма B_τ на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, заданная равенством $B_\tau(X, Y) = -B(X, \tau Y)$, положительно определена и

$$B_\tau([Z, X], Y) + B_\tau(X, [Z, Y]) = 0$$

для $Z \in \mathfrak{u}$, $X, Y \in \mathfrak{g}$. Отсюда следует, что эндоморфизм $\text{ad } H$ пространства $\mathfrak{g}$ является полупростым для каждого $H \in \mathfrak{h}_0 \cup i\mathfrak{h}_0$. Так как все $\text{ad } H$ ($H \in \mathfrak{h}$) перестановочны между собой, то они являются полупростыми эндоморфизмами пространства $\mathfrak{g}$. Значит, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$. Обозначим через Δ множество ненулевых корней алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{h}$. Пусть $\alpha \in \Delta$. Поскольку $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$ и $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, ясно, что либо $\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{k}$, либо $\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{p}$. В пер-

вом случае корень α называется *компактным*, во втором случае — *некомпактным*. Мы имеем прямые разложения

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha} \mathfrak{g}^{\alpha}, \quad \mathfrak{p} = \sum_{\beta} \mathfrak{g}^{\beta}, \quad (3)$$

где α пробегает все компактные корни, а β — все некомпактные корни. Обозначим через Δ_c множество корней из Δ , тождественно не равных 0 на $\mathfrak{s}$. Ввиду леммы 3.1 гл. VI каждый корень α принимает на $i\mathfrak{h}_0$ вещественные значения. Введем в пространствах, двойственных вещественным векторным пространствам $i\mathfrak{h}_0$ и $i\mathfrak{s}_0$, совместимые упорядочения. Отсюда получится упорядочение множества Δ , которым мы будем пользоваться до конца доказательства. Обозначим через Δ^+ множество положительных корней из Δ , положим $Q_+ = \Delta^+ \cap \Delta_c$ и

$$\mathfrak{p}_+ = \sum_{\beta \in Q_+} \mathfrak{g}^{\beta}, \quad \mathfrak{p}_- = \sum_{-\beta \in Q_+} \mathfrak{g}^{\beta}.$$

Предложение 7.2. *Пространства $\mathfrak{p}_+$ и $\mathfrak{p}_-$ являются абелевыми подалгебрами в $\mathfrak{g}$ и*

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}_-] \subset \mathfrak{p}_-, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}_+] \subset \mathfrak{p}_+, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_- + \mathfrak{p}_+.$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in \Delta$ — компактный корень. Тогда $[\mathfrak{s}, \mathfrak{g}^{\alpha}] = \{0\}$, так что α тождественно равен 0 на $\mathfrak{s}$. Следовательно, $\mathfrak{p}_- + \mathfrak{p}_+ \subset \mathfrak{p}$. Используя, кроме того, совместимость упорядочений, получаем $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{p}_+] \subset \mathfrak{p}_+$, $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{p}_-] \subset \mathfrak{p}_-$. Так как соотношения $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}_-] \subset \mathfrak{p}_-$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}_+] \subset \mathfrak{p}_+$ очевидны, то из (3) выводим, что $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}_-] \subset \mathfrak{p}_-$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}_+] \subset \mathfrak{p}_+$.

Пусть теперь $\beta, \gamma \in Q_+$. Тогда $[\mathfrak{g}^{\beta}, \mathfrak{g}^{\gamma}] \subset \mathfrak{g}^{\beta+\gamma}$ и, если $\beta + \gamma$ является корнем, $\beta + \gamma \in Q_+$. Но, с другой стороны, $[\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_+] \subset \mathfrak{k}$, откуда $[\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_+] = \{0\}$. Пространство $\mathfrak{p}_-$ также абелево, так как $\tau \cdot \mathfrak{g}^{\delta} = \mathfrak{g}^{-\delta}$ для любого $\delta \in \Delta$ (лемма 3.1 гл. VI).

Наконец, для доказательства равенства $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_- + \mathfrak{p}_+$ обозначим через $\mathfrak{q}$ ортогональное дополнение к $\mathfrak{p}_- + \mathfrak{p}_+$ в $\mathfrak{p}$ по отношению к B_{τ} и положим

$$\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{p}_+ + \mathfrak{p}_- + [\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-].$$

Докажем, что $\mathfrak{g}_+$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Для этого достаточно доказать, что

$$[\mathfrak{p}_+, \mathfrak{q}] = [\mathfrak{p}_-, \mathfrak{q}] = \{0\}. \quad (4)$$

Пусть $T \in \mathfrak{k}$, $X \in \mathfrak{p}_+$, $Y \in \mathfrak{q}$. Поскольку $\tau \cdot T \in \mathfrak{k}$ и $\tau \cdot [X, \tau \cdot T] \in \mathfrak{p}_-$, мы имеем

$$B_{\tau}([X, Y], T) = -B([X, Y], \tau \cdot T) = -B_{\tau}(Y, \tau \cdot [X, \tau \cdot T]) = 0.$$

Отсюда $[\mathfrak{p}_+, \mathfrak{q}] = \{0\}$ и аналогично $[\mathfrak{p}_-, \mathfrak{q}] = \{0\}$. Ортогональная симметрическая алгебра Ли $(\mathfrak{g}_0, \theta)$ есть алгебра типа III, так что по теореме 5.4 $\mathfrak{g}$ проста. Поэтому либо $\mathfrak{g}_+ = \{0\}$, либо $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{g}$. В первом случае все корни из Δ тождественно равны 0 на $\mathfrak{s}$, что

невозможно. Итак, $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{g}$, откуда $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_- + \mathfrak{p}_+$, и предложение доказано.

Следствие 7.3. Корень $\alpha \in \Delta$ компактен тогда и только тогда, когда он тождественно равен 0 на $\mathfrak{s}$.

В главах VI и VII неоднократно использовались максимальные абелевы подпространства $\mathfrak{a}_0$ в $\mathfrak{p}_0$. Принимая во внимание, что все они сопряжены относительно линейной группы изотропии, выберем в нашем случае подпространство $\mathfrak{a}_0$, специальным образом связанное с Δ . Для каждого $\alpha \in \Delta$ возьмем ненулевой вектор $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$.

Предложение 7.4. Существует такое подмножество $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ в Q_+ , что подпространство

$$\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^s \mathbb{C} (X_{\gamma_i} + X_{-\gamma_i}) \quad (5)$$

является максимальным абелевым подпространством в $\mathfrak{p}$.

Для доказательства нужно сделать некоторые приготовления. Если Q — некоторое подмножество в Q_+ , то пусть

$$\mathfrak{p}_Q = \sum_{\gamma \in Q} (\mathfrak{g}^\gamma + \mathfrak{g}^{-\gamma}).$$

Пусть β — наименьший корень в Q . Обозначим через $Q(\beta)$ множество всех таких $\gamma \in Q$, что $\gamma \neq \beta$ и ни $\gamma + \beta$, ни $\gamma - \beta$ не является корнем. Тогда централизатор подпространства $\mathfrak{g}^{-\beta} + \mathfrak{g}^\beta$ в $\mathfrak{p}_Q$ совпадает с $\mathfrak{p}_{Q(\beta)}$.

Лемма 7.5. Централизатор элемента $X_\beta + X_{-\beta}$ в $\mathfrak{p}_Q$ равен $\mathbb{C}(X_\beta + X_{-\beta}) + \mathfrak{p}_{Q(\beta)}$.

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{p}_Q$, и пусть Q' — дополнение к $\{\beta\}$ в Q . Тогда

$$X = c_\beta X_\beta + c_{-\beta} X_{-\beta} + \sum_{\gamma \in Q'} (c_\gamma X_\gamma + c_{-\gamma} X_{-\gamma}),$$

где коэффициенты суть комплексные числа. Имеем $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha$,

и составляющая элемента $[X, X_\beta + X_{-\beta}]$ в $\mathfrak{h}$ равна $(c_\beta - c_{-\beta}) [X_\beta, X_{-\beta}]$. Предположим, что X и $X_\beta + X_{-\beta}$ перестановочны. Тогда $c_\beta = c_{-\beta}$, и вектор

$$Y = \sum_{\gamma \in Q'} (c_\gamma X_\gamma + c_{-\gamma} X_{-\gamma})$$

перестановочен с $X_\beta + X_{-\beta}$. Так как $\mathfrak{p}_+$ и $\mathfrak{p}_-$ абелевы, то получаем

$$[Y, X_\beta + X_{-\beta}] = \sum_{\gamma \in Q'} (c_\gamma [X_\gamma, X_{-\beta}] + c_{-\gamma} [X_{-\gamma}, X_\beta]) = 0.$$

Здесь

$$c_\gamma [X_\gamma, X_{-\beta}] = c_{-\gamma} [X_{-\gamma}, X_\beta] = 0 \quad (6)$$

для каждого $\gamma \in Q'$. Действительно, предположим, например, что $c_\gamma [X_\gamma, X_{-\beta}] \neq 0$. Тогда $\mathfrak{g}^{\gamma-\beta}$ и $\mathfrak{g}^{\beta-\gamma}$ — ненулевые подпространства и существует такой $\delta \in Q'$, что

$$c_\gamma [X_\gamma, X_{-\beta}] + c_{-\delta} [X_{-\delta}, X_\beta] = 0.$$

Отсюда вытекает, что $\alpha = \gamma - \beta = -\delta + \beta$ является ненулевым корнем. Но соотношения $\gamma = \alpha + \beta$, $\delta = \beta - \alpha$ противоречат тому, что β — наименьший корень в Q . Из формулы (6) следует, что $Y \in \mathfrak{p}_{Q(\beta)}$, и лемма доказана.

Доказательство предложения 7.4. Определим последовательность подпространств $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{p}_{s+1} = \{0\}$, каждое из которых имеет вид $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_{Q_i}$ ($Q_i \subset Q_+$), следующим образом. Пусть $Q_1 = Q_+$, и пусть γ_1 — наименьший положительный корень в Q_1 . Обозначим через $\mathfrak{p}_2$ централизатор подпространства $\mathfrak{g}^{-\gamma_1} + \mathfrak{g}^{\gamma_1}$ в $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_{Q_1}$. Тогда $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_{Q_2}$, где $Q_2 = Q_1(\gamma_1)$. Обозначим через γ_2 наименьший положительный корень в Q_2 , через $\mathfrak{p}_3$ — централизатор подпространства $\mathfrak{g}^{-\gamma_2} + \mathfrak{g}^{\gamma_2}$ в $\mathfrak{p}_2$ и т. д. Тогда все корни $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ различны и образуют нужное нам подмножество в Q_+ . Действительно, из построения ясно, что пространство $\mathfrak{a}$, заданное формулой (5), абелево. Далее, предположим, что $X \in \mathfrak{p}$ перестановочен с каждым элементом из $\mathfrak{a}$. Мы хотим доказать, что $X \in \mathfrak{a}$. Предположим, что это неверно. Тогда существует такое целое r ($1 \leq r \leq s$), что $X \in \mathfrak{p}_r + \mathfrak{a}$, но $X \notin \mathfrak{p}_{r+1} + \mathfrak{a}$. Пусть $X = Y + Z$ ($Y \in \mathfrak{p}_r$, $Z \in \mathfrak{a}$). Поскольку X и Z перестановочны с $X_{\gamma_r} + X_{-\gamma_r}$, тем же свойством обладает Y . Поэтому из леммы 7.5 вытекает, что

$$Y = c(X_{\gamma_r} + X_{-\gamma_r}) + Y_1,$$

где $Y_1 \in \mathfrak{p}_{r+1}$ и $c \in \mathbb{C}$. Но $Z_1 = Z + c(X_{\gamma_r} + X_{-\gamma_r})$ лежит в $\mathfrak{a}$ и поэтому

$$X = Y_1 + Z_1 \in \mathfrak{p}_{r+1} + \mathfrak{a},$$

что противоречит определению числа r . Тем самым предложение 7.4 доказано.

Следствие 7.6. В соответствии с леммой 3.1 гл. VI выберем векторы $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ таким образом, чтобы для каждого $\alpha \in \Delta$ выполнялись соотношения

$$X_\alpha - X_{-\alpha}, \quad i(X_\alpha + X_{-\alpha}) \in \mathfrak{u},$$

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha.$$

Тогда пространство

$$\mathfrak{a}_0 = \sum_{i=1}^s R(X_{\gamma_i} + X_{-\gamma_i})$$

совпадает с $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_0$ и потому является максимальным абелевым подпространством в $\mathfrak{p}_0$.

Действительно, в силу выбора векторов X_α , имеем $X_{\gamma_i} + X_{-\gamma_i} \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0$, откуда $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_0$. С другой стороны, если

$$X = \sum_{i=1}^s c_i (X_{\gamma_i} + X_{-\gamma_i}) \in \mathfrak{p}_0 \quad (c_i \in \mathbb{C}),$$

то $\tau \cdot X = -X$, так что $c_i \in \mathbb{R}$.

Лемма 7.7. Пусть $\mathfrak{l}$ — трехмерная алгебра Ли над $\mathbb{C}$, заданная на векторном пространстве $\mathbb{C}H + \mathbb{C}X + \mathbb{C}Y$ при помощи следующей операции коммутирования:

$$[X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y.$$

Если L — любая группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$, то

$$\exp t(X + Y) = \exp(\operatorname{th} t) Y \exp(\log \operatorname{ch} t) H \exp(\operatorname{th} t) X \quad (7)$$

для $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим группу $SL(2, \mathbb{C})$ всех комплексных матриц порядка 2 с определителем 1. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ этой группы состоит из всех комплексных матриц порядка 2 со следом 0. Она изоморфна алгебре $\mathfrak{l}$, как показывает отображение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow H, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Y.$$

Группа $SL(2, \mathbb{C})$ содержит $SU(2)$ в качестве максимальной компактной подгруппы. Эта подгруппа состоит из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

с определителем 1. Значит, $SU(2)$ гомеоморфна трехмерной сфере S^3 ; в частности, $SU(2)$ односвязна. В силу теоремы 2.2 гл. VI, группа $SL(2, \mathbb{C})$ также односвязна. Поэтому достаточно доказать формулу (7) для группы $L = SL(2, \mathbb{C})$. Это можно сделать путем прямого вычисления, которое мы оставляем читателю.

Доказательство теоремы 7.1 (ii) (геометрическая часть). Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является (как векторное пространство) прямой суммой алгебр Ли $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}_-$ и $\mathfrak{p}_+$. Мы изучим теперь соответствующую глобальную ситуацию.

Обозначим через G односвязную группу Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$. Обозначим через U , K , P_- , P_+ , A^* аналитические подгруппы в G , соответствующие подалгебрам $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}_-$, $\mathfrak{p}_+$ и $i\mathfrak{h}_0$ соответственно,

рассматриваемым как вещественные подалгебры в $\mathfrak{g}^R$. Как в § 6 гл. VI, положим

$$\mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{n}_- = \sum_{-\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha$$

и рассмотрим их как вещественные подалгебры в $\mathfrak{g}^R$. Обозначим через N_+ , N_- , G_0 , K_0 аналитические подгруппы в G , соответствующие подалгебрам $\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{n}_-$, $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{k}_0$ соответственно. Обозначим через $\exp$ обычное экспоненциальное отображение алгебры $\mathfrak{g}^R$ в G и через ad и Ad — присоединенные представления алгебры $\mathfrak{g}^R$ и группы G соответственно. Обозначим через θ , σ , τ автоморфизмы группы G , соответствующие автоморфизмам θ , σ , τ алгебры $\mathfrak{g}^R$.

Лемма 7.8. *Отображение $\exp$ индуцирует диффеоморфизм пространства $\mathfrak{p}_-$ на P_- и пространства $\mathfrak{p}_+$ на P_+ .*

Доказательство. Согласно лемме 3.5 гл. VI, в $\mathfrak{g}$ существует базис, в котором $\text{ad}(\mathfrak{n}_+)$ выражается нижними треугольными матрицами с нулями на диагонали. В силу следствия 4.4 и леммы 4.5 гл. VI, отображение $\text{ad } X \rightarrow e^{\text{ad } X} = \text{Ad}(\exp X)$ есть диффеоморфизм алгебры $\text{ad}(\mathfrak{n}_+)$ на $\text{Ad}(N_+)$. Поскольку ad взаимно однозначно, а Ad взаимно однозначно на N_+ , отображение $\exp: \mathfrak{n}_+ \rightarrow N_+$ является диффеоморфизмом алгебры $\mathfrak{n}_+$ на N_+ . Теперь лемма следует из того, что $\mathfrak{p}_+ \subset \mathfrak{n}_+$ и $\tau \cdot \mathfrak{p}_+ = \mathfrak{p}_-$.

Лемма 7.9. *Отображение $(q, k, p) \rightarrow qkr$ является диффеоморфизмом многообразия $P_- \times K \times P_+$ на открытое подмногообразие в G , содержащее G_0 .*

Доказательство. Докажем сначала, что $P_-K \cap P_+ = \{e\}$. Предположим, что $y \in P_-K \cap P_+$, $y \neq e$. Выберем такой $Y \in \mathfrak{p}_+$, что $\exp Y = y$. Поскольку $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}_-] \subset \mathfrak{p}_-$, имеем $\text{Ad}(y)\mathfrak{p}_- \subset \mathfrak{p}_-$. Запишем $Y = \sum_{\alpha \in Q_+} c_\alpha X_\alpha$ ($c_\alpha \in \mathbb{C}$) и обозначим через β наименьший корень из Q_+ , для которого $c_\beta \neq 0$. Тогда $[Y, X_{-\beta}] \equiv c_\beta [X_\beta, X_{-\beta}] \pmod{\mathfrak{n}_+}$, откуда следует, что

$$\text{Ad}(y) X_{-\beta} \equiv X_{-\beta} + c_\beta [X_\beta, X_{-\beta}] \pmod{\mathfrak{n}_+}.$$

Приводя это соотношение по $\text{mod}(\mathfrak{n}_- + \mathfrak{n}_+)$, получаем, что $\text{Ad}(y) X_{-\beta} \notin \mathfrak{p}_-$, что противоречит включению $\text{Ad}(y)\mathfrak{p}_- \subset \mathfrak{p}_-$. Отсюда видно, что $P_-K \cap P_+ = \{e\}$. Применяя отображение $x \rightarrow \tau(x^{-1})$ ($x \in G$), получаем, что $P_- \cap KP_+ = \{e\}$. Для доказательства взаимной однозначности отображения леммы предположим, что $q_1 k_1 p_1 = q_2 k_2 p_2$. Тогда

$$(k_2^{-1} q_2^{-1} q_1 k_2) k_2^{-1} k_1 = p_2 p_1^{-1},$$

$$q_1^{-1} q_2 = k_1 k_2^{-1} (k_2 p_1 p_2^{-1} k_2^{-1}),$$

откуда видно, что $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$, $k_1 = k_2$. Регулярность устанавливается путем двукратного применения леммы 5.2 из гл. VI сначала к алгебре $\mathfrak{p}_- + \mathfrak{k}$, а затем к алгебре $(\mathfrak{p}_- + \mathfrak{k}) + \mathfrak{p}_+$. Образ является подмногообразием в G размерности

$$\dim_R \mathfrak{p}_- + \dim_R \mathfrak{k} + \dim_R \mathfrak{p}_+ = \dim \mathfrak{g}^R$$

и, следовательно, открытым подмногообразием в G . Наконец, из теоремы 1.1 гл. VI мы знаем, что $G_0 = P_0 K_0 = K_0 P_0$, где $P_0 = \exp \mathfrak{p}_0$. Пусть $X \in \mathfrak{p}_0$ и $p = \exp \frac{1}{2} X$. Из теоремы 6.3 гл. VI получаем, что

$$p = u a n \quad (u \in U, a \in A^*, n \in N_+).$$

Применяя τ , получаем

$$\tau(p) = p^{-1} = u a^{-1} \tau(n),$$

откуда

$$\exp X = p^2 = \tau(n^{-1}) a^2 n \in N_- A^* N_+.$$

Далее, $\mathfrak{n}_+ + \mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}_+ + \mathfrak{k}$, $\mathfrak{n}_- \subset \mathfrak{p}_- + \mathfrak{k}$, так что

$$N_- A^* N_+ \subset P_- K P_+,$$

и лемма доказана.

З а м е ч а н и е. В общем случае $P_- K P_+ \neq G$, что можно увидеть из рассмотрения примера $G = SL(2, \mathbb{C})$, $G_0 = SL(2, \mathbb{R})$, $K_0 = SO(2)$. Здесь $K = SO(2, \mathbb{C})$ — группа комплексных ортогональных матриц порядка 2 с определителем 1. Вследствие теоремы 1.1 гл. VI каждую комплексную матрицу можно единственным образом записать в виде $\alpha e^{i\beta}$, где α — вещественная ортогональная матрица, а β — вещественная кососимметрическая матрица. Значит, $K = K_0 \times \mathbb{R}$ как топологические пространства. Таким образом, $P_- K P_+$ имеет фундаментальную группу $\mathbb{Z}$, в то время как G односвязна.

Л е м м а 7.10. Множество $G_0 K P_+$ открыто в $P_- K P_+$ и $G_0 \cap K P_+ = K_0$.

Доказательство. Предположим, что $p \in P_0$ имеет вид $p = k p_+$, где $k \in K$ и $p_+ \in P_+$. Применяя автоморфизм $\theta = \sigma \tau$, получим $p^{-1} = k p_+^{-1}$, откуда $p^2 = p_+^2$. Применяя τ , получаем $p^{-2} \in \tau(P_+) \subset P_-$, откуда $p_+^2 \in P_-$. Значит, $p = k = p_+ = e$. Поскольку $G_0 = K_0 P_0$, отсюда видно, что $G_0 \cap K P_+ = K_0$.

Рассмотрим теперь группу $K P_+$. Группа P_+ замкнута в N_+ и, значит, замкнута в G . Группа K замкнута в G , так как она является компонентой единицы для множества неподвижных точек автоморфизма θ . Пусть $(k_n p_n)$ — последовательность в $K P_+$, сходящаяся в G . Применяя θ , видим, что последовательность (p_n^2) сходится. Значит, последовательности (k_n) и (p_n) сходятся. Таким образом, подгруппа $K P_+$ замкнута в G и, в силу леммы 7.9, ее алгеброй Ли

является $\mathfrak{k} + \mathfrak{p}_+$. Рассмотрим отображение $\psi: (g, x) \rightarrow gx$ многообразия $G_0 \times (KP_+)$ в G . Пусть $Y \in \mathfrak{g}_0$, $Z \in \mathfrak{k} + \mathfrak{p}_+$. Тогда

$$\psi(g, \exp tY, x) = gx \exp(t \operatorname{Ad}(x^{-1})Y),$$

$$\psi(g, x \exp tZ) = gx \exp tZ$$

и, следовательно,

$$d\psi_{(g, x)}(dL_g Y, dL_x Z) = dL_{gx}(\operatorname{Ad}(x^{-1})Y + Z).$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} d\psi(\{G_0 \times (KP_+)\}_{(g, x)}) &= dL_{gx} \circ \operatorname{Ad}(x^{-1})(\mathfrak{g}_0 + \operatorname{Ad}(x)(\mathfrak{k} + \mathfrak{p}_+)) = \\ &= dL_{gx} \circ \operatorname{Ad}(x^{-1})(\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{k} + \mathfrak{p}_+). \end{aligned}$$

Из равенств

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_0 + \mathfrak{k} + \mathfrak{p}_+ = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{k} + \mathfrak{p}_+$$

следует, что этот образ (при $d\psi$) покрывает все касательное пространство G_{gx} . Теперь лемма вытекает из леммы 7.9.

Лемма 7.11. Пусть $Z \in \mathfrak{a}_0$, т. е.

$$Z = \sum_{i=1}^s t_i (X_{\gamma_i} + X_{-\gamma_i}) \quad (t_i \in \mathbf{R}). \quad (8)$$

Тогда

$$\exp Z = \exp Y \exp H \exp X,$$

где

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{i=1}^s (\operatorname{th} t_i) X_{-\gamma_i}, \quad X = \sum_{i=1}^s (\operatorname{th} t_i) X_{\gamma_i}, \\ H &= \sum_{i=1}^s \log(\operatorname{ch} t_i) [X_{\gamma_i}, X_{-\gamma_i}]. \end{aligned}$$

Это следует из леммы 7.7 и из того, что X_{γ_i} и $X_{-\gamma_j}$ перестановочны при $i \neq j$.

Комплексное векторное пространство $\mathfrak{g}$ является конечномерным гильбертовым пространством относительно скалярного произведения B_τ . Положим $\|X\| = B_\tau(X, X)^{1/2}$ для $X \in \mathfrak{g}$.

Согласно лемме 7.8, $\exp$ индуцирует взаимно однозначное отображение пространства $\mathfrak{p}_-$ на P_- . Обозначим через $\log$ обратное отображение. Для $x \in G_0$ обозначим через $\zeta(x)$ единственный элемент из P_- , такой, что $x \in \zeta(x)KP_+$ (лемма 7.9).

Лемма 7.12. Норма $\|\log \zeta(x)\|$ ограничена, когда x пробегает G_0 .

Доказательство. Так как $[\mathfrak{f}, \mathfrak{p}_-] \subset \mathfrak{p}_-$, то $\zeta(kxk') = k\zeta(x)k^{-1}$ для $x \in G_0$, $k, k' \in K_0$. Из леммы 6.3 гл. V и равенства $G_0 = K_0P_0$ следует, что $G_0 = K_0A_0K_0$, где A_0 — аналитическая подгруппа в G_0 с алгеброй Ли $\mathfrak{a}_0$. Записывая произвольный элемент $x \in G_0$ в виде $x = kak'$ ($k, k' \in K_0$, $a \in A_0$), получаем, что $\zeta(x) = k\zeta(a)k^{-1}$ и

$$\|\log \zeta(x)\| = \|\operatorname{Ad}(k) \log \zeta(a)\| = \|\log \zeta(a)\|.$$

Далее, $a = \exp Z$, где Z имеет вид (8), и из леммы 7.11 следует, что

$$\log \zeta(a) = \sum_{i=1}^s (\operatorname{th} t_i) X_{-\gamma_i}.$$

Так как $|\operatorname{th} t| \leq 1$ для $t \in \mathbb{R}$, то

$$\|\log \zeta(x)\| \leq \sum_{i=1}^s \|X_{-\gamma_i}\|$$

для всех $x \in G_0$, и лемма доказана.

Завершение доказательства. Эрмитово многообразие M диффеоморфно многообразию G_0/K_0 (теорема 1.1 гл. VI), и комплексная структура на M соответствует некоторому эндоморфизму J_0 пространства $\mathfrak{p}_0$, перестановочному со всеми $\operatorname{Ad}(k)$ ($k \in K_0$) и удовлетворяющему условию $J_0^2 = -I$.

Для любого факторпространства X/Y , как обычно, обозначим через $\tau(x)$ отображение $\xi Y \rightarrow x\xi Y$ пространства X/Y на себя.

Как было замечено раньше, группа KP_+ замкнута в G и факторпространство G/KP_+ содержит P_-KP_+/KP_+ в качестве открытого подмножества, которое в свою очередь содержит G_0KP_+/KP_+ в качестве открытого подмножества. Обозначим эти вложения через I_2 и I_1 соответственно (см. диаграмму):

$$\begin{array}{ccccc} G_0KP_+/KP_+ & \xrightarrow{I_1} & P_-KP_+/KP_+ & \xrightarrow{I_2} & G/KP_+ \\ \psi_1 \downarrow & & \psi_2 \downarrow & & \\ G_0/K_0 & \xrightarrow{\psi_0} & P_- & \xrightarrow{\log} & \mathfrak{p}_-. \end{array}$$

В этой диаграмме через ψ_0 , ψ_1 и ψ_2 обозначены отображения

$$\psi_1: gkpKP_+ \rightarrow gK_0 \quad (g \in G_0, k \in K, p \in P_+),$$

$$\psi_2: qkpKP_+ \rightarrow q \quad (q \in P_-, k \in K, p \in P_+),$$

$$\psi_0 = \psi_2 \circ I_1 \circ \psi_1^{-1}.$$

Отображение ψ_1 есть диффеоморфизм многообразия G_0KP_+/KP_+ на G_0/K_0 (лемма 7.10). Отображение ψ_2 есть диффеоморфизм многообразия P_-KP_+/KP_+ на P_- (лемма 7.9). Поэтому из леммы 7.10 следует, что ψ_0 есть диффеоморфизм многообразия G_0/K_0 на откры-

тое подмножество в P_- . Связывая это с леммой 7.12, получаем, что отображение $\psi = \log \circ \psi_0$ является диффеоморфизмом многообразия G_0/K_0 на ограниченную область D в комплексном векторном пространстве $\mathfrak{p}_-$. Далее,

$$\psi(xK_0) = \log \zeta(x) \quad (x \in G_0),$$

откуда

$$\psi \circ \tau(k) = \text{Ad}(k) \circ \psi \quad (k \in K_0) \quad (9)$$

и

$$d\psi(\text{Ad}(k)X) = \text{Ad}(k) d\psi(X) \quad (10)$$

для $k \in K_0$, $X \in \mathfrak{p}_0$. Обозначим через J^* эндоморфизм пространства $\mathfrak{p}_-$, определенный формулой $d\psi(J_0X) = J^* d\psi(X)$ для всех $X \in \mathfrak{p}_0$. Тогда $(J^*)^2 = -I$ и J^* перестановочен со всеми $\text{Ad}(k)$ ($k \in K_0$). Так как группа $\text{Ad}(K_0)$ неприводима на $\mathfrak{p}_-$, то из леммы Шура (см., например, Шевалле [2], предложение 2, стр. 265) следует, что эндоморфизм J^* является скалярным кратным тождественного эндоморфизма. Значит, $J^* = \pm iI$ и ψ (или отображение ψ вместе с комплексным сопряжением) есть голоморфный диффеоморфизм.

Теорема 7.13. При введенных выше обозначениях отображение $f: uK_0 \rightarrow uKP_+$ является аналитическим диффеоморфизмом многообразия U/K_0 на G/KP_+ . Таким образом, компакное эрмитово симметрическое пространство U/K_0 содержит двойственное пространство G_0/K_0 в качестве открытого подмногообразия.

Доказательство. Пусть $u \in U \cap KP_+$. Ясно, что $u^{-1}\theta(u) \in P_+$. Применяя τ , получаем, что $\theta(u) = u$. Так как U односвязна, то из теоремы 7.2 гл. VII следует, что $u \in K_0$. Итак, $U \cap KP_+ = K_0$ и, следовательно, отображение f взаимно однозначно. Так как f регулярно и $\dim U/K_0 = \dim G/KP_+$, образ $f(U/K_0)$ является открытым подмногообразием в G/KP_+ . Будучи компактным, это подмногообразие должно совпадать с G/KP_+ . Отображение $\varphi = I_2 \circ I_1 \circ \psi_1^{-1}$ является диффеоморфизмом многообразия G_0/K_0 на открытое подмножество в U/K_0 и удовлетворяет условию $\varphi \circ \tau(k) = \tau(k) \circ \varphi$ для $k \in K_0$. Отсюда следует, что

$$d\varphi \text{Ad}(k)X = \text{Ad}(k) d\varphi X$$

для $X \in \mathfrak{p}_0$, $k \in K_0$. Если определить эндоморфизм J^* условием $d\varphi J_0X = J^* d\varphi X$ ($X \in \mathfrak{p}_0$), то J^* имеет квадрат $-I$ и перестановочен с каждым $\text{Ad}(k)$ ($k \in K_0$). Таким образом, U/K_0 — эрмитово симметрическое пространство, а отображение φ почти комплексно и, значит, голоморфно (§ 1).

Замечание. Пользуясь тем фактом, что $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\mathbb{C}$, можно показать, что G — комплексная группа Ли, т. е.

обладает комплексной структурой, относительно которой групповые операции голоморфны. Группы K и P_+ также являются комплексными группами Ли и факторпространство G/KP_+ обладает комплексной структурой, инвариантной относительно группы G . Используя неприводимость, нетрудно показать, что эта структура (с точностью до знака) совпадает с U -инвариантной комплексной структурой на U/K_0 . В частности, каждое отображение $\tau(g)$ ($g \in G_0$) многообразия G_0/K_0 на себя продолжается до голоморфного диффеоморфизма многообразия U/K_0 .

Пример. Пусть $G_0 = SL(2, \mathbb{R})$, $K_0 = SO(2)$. Тогда G_0/K_0 — эрмитово симметрическое пространство некомпактного типа. Если сопоставить каждой матрице

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_0$$

преобразование $T_g: z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ верхней полуплоскости, то отображение $gK_0 \rightarrow T_g(i)$ является голоморфным диффеоморфизмом многообразия G_0/K_0 на верхнюю полуплоскость. Представление многообразия G_0/K_0 в виде ограниченной области можно получить, отобразив верхнюю полуплоскость на открытый круг $|z-i| < 1$ при помощи инверсии и отражения относительно оси x . В этом случае $K = SO(2, \mathbb{C})$, $U = SU(2)$ и $G = SL(2, \mathbb{C})$. Двойственное пространство U/K_0 есть сфера Римана, а пространство G/KP_+ отождествляется с комплексной плоскостью, дополненной точкой ∞ .

УПРАЖНЕНИЯ

А. Комплексные структуры

1. Пусть g — эрмитова структура на почти комплексном многообразии (M, J) . Показать, что тензорное поле ω , заданное формулой

$$\omega(X, Y) = g(X, JY) \quad (X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)),$$

является 2-формой на M . Показать, что следующие условия эквивалентны:

- (i) Структура g кэлера.
- (ii) $\nabla_X(\omega) = 0$ для $X \in \mathfrak{D}^1(M)$.
- (iii) $d\omega = 0$.

2. Пусть G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ обладает комплексной структурой. Показать, что G обладает комплексной структурой, относительно которой она является комплексной группой Ли. (Указание. Комплексная струк-

тура на $\mathfrak{g}$ индуцирует левоинвариантную почти комплексную структуру на G . Вследствие теоремы 1.7 гл. II $\exp$ является почти комплексным отображением алгебры $\mathfrak{g}$ в G .)

3. Показать, что риманова структура, соответствующая керн-функции в единичном круге $|z| < 1$, превращает круг в риманово многообразие постоянной отрицательной кривизны.

4. Пусть D — ограниченная симметрическая область. Представляя D в виде $H(D)/K$ (группа $H(D)$ определена в § 3, K компактна), можно двумя различными способами ввести на D естественную метрику: во-первых, при помощи керн-функции области D и, во-вторых, при помощи формы Киллинга B алгебра Ли группы $H(D)$. Показать, что эти две метрики совпадают. (В силу равенства (2) из § 7, достаточно доказать, что $B(X, X) = 2 \operatorname{Tr} T_X$ для $X \in \mathfrak{e}$.)

В. Обобщенная верхняя полуплоскость Зигеля

Обозначим через I единичную матрицу порядка n и положим

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $Sp(n, \mathbf{R})$ группу всех вещественных матриц g порядка $2n$, удовлетворяющих условию

$${}^t g J g = J.$$

1. Показать, что группа $G = Sp(n, \mathbf{R})$ полупроста и что группа $K = Sp(n, \mathbf{R}) \cap SO(2n)$ является ее максимальной компактной подгруппой.

2. Пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ — разложение Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ группы G , где $\mathfrak{k}_0$ — алгебра Ли группы K . Тогда ограничение автоморфизма $\operatorname{Ad}_G(J)$ на $\mathfrak{p}_0$ равно $-I$. Далее, $z^2 = J$ и z лежит в центре группы K .

3. Ограничение автоморфизма $\operatorname{Ad}_G(z)$ на $\mathfrak{p}_0$ порождает на пространстве

$$M = Sp(n, \mathbf{R}) / (SO(2n) \cap Sp(n, \mathbf{R}))$$

инвариантную комплексную структуру, превращающую M в эрмитово симметрическое пространство некомпактного типа.

4. Отображение $p \rightarrow g\sigma(g^{-1})$ из упражнения 5 к гл. VI является диффеоморфизмом многообразия M на подмногообразие S в $Sp(n, \mathbf{R})$, образованное теми матрицами из $Sp(n, \mathbf{R})$, которые симметричны и положительно определены.

5. В комплексном многообразии комплексных симметрических матриц порядка n рассмотрим открытое подмногообразие $\mathcal{S}_n$

комплексных симметрических матриц $Z = X + iY$, где X и Y вещественны и Y положительно определена. Каждый $g \in Sp(n, \mathbb{R})$ порождает голоморфный диффеоморфизм

$$T_g: Z \rightarrow (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

многообразия $\mathcal{S}_n$, где матрица g записана в виде

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Доказать, что отображение $gK \rightarrow T_g(iI)$ является корректно определенным голоморфным диффеоморфизмом многообразия M на $\mathcal{S}_n$.

6. Доказать, что отображение

$$Z \rightarrow (I + iZ)(I - iZ)^{-1}$$

является голоморфным диффеоморфизмом многообразия $\mathcal{S}_n$ на ограниченную область в $\mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, состоящую из всех комплексных симметрических матриц W порядка n , для которых матрица $I - \overline{W}W$ положительно определена (обобщенный единичный круг).

С. Другое доказательство предложения 4.2

Примем допущения предложения 4.2, но предположим дополнительно, что компонента единицы K_0 группы K не оставляет неподвижным ни одного вектора $X \neq 0$ в M_0 . Показать при помощи следующих шагов¹⁾, что $M = G/K$ является эрмитовым симметрическим пространством.

1. Пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ — разложение алгебры Ли группы G на собственные подпространства автоморфизма $d\sigma$. Перейдем к комплексным оболочкам $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{p}$ алгебр $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}_0$ и $\mathfrak{p}_0$ соответственно. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ и J_0 продолжается до эндоморфизма пространства $\mathfrak{p}$ с квадратом $-I$. Пусть $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ + \mathfrak{p}_-$ — разложение пространства $\mathfrak{p}$ на собственные подпространства эндоморфизма J_0 , отвечающие собственным значениям $+i$ и $-i$ соответственно. Как в § 5 гл. II, показать, что существует односвязная группа Ли G^c с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$.

2. Обозначим через L аналитическую подгруппу в G^c с алгеброй Ли $\mathfrak{k} + \mathfrak{p}_-$. Тогда L замкнута в G^c (рассмотреть нормализатор подалгебры $\mathfrak{k} + \mathfrak{p}_-$ в G^c).

3. Используя то, что группы Ли L и G^c комплексны (см. выше упражнение А. 2), показать, что G^c/L обладает комплексной структурой, инвариантной относительно действия группы G^c .

¹⁾ Здесь мы следуем указанию Сингера, см. Фрелихер [1], § 20.

4. Тожественное отображение $\mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}$ индуцирует отображение $g \rightarrow \varphi(g)$ окрестности точки e в G в группу G^c . Обозначим через ψ индуцированное отображение $gK \rightarrow \varphi(g)L$ окрестности точки $\{K\}$ группы G/K в G^c/L . Показать, что ψ регулярно в точке $\{K\}$ и, значит, является диффеоморфизмом окрестности точки $\{K\}$ в G/K на окрестность точки $\{L\}$ в G^c/L .

5. Показать, что

$$d\psi_K(J_o X) = id\psi_K(X) \quad (X \in \mathfrak{p}_0),$$

$$\tau(g) \circ \psi = \psi \circ \tau(g)$$

для всех g из подходящей окрестности точки e в G . Вывести отсюда, что отображение ψ почти комплексно и, стало быть, G/K обладает комплексной структурой, соответствующей структуре J .

ЗАМЕЧАНИЯ

§ 1—3. Тензор кручения S был введен Экманом и Фрелихером, см. Фрелихер [1]. Эквивалентность понятий «комплексная структура» и «интегрируемая почти комплексная структура» была впервые доказана Ньюлендером и Ниренбергом [1]. Аналитический случай был до этого исследован несколькими авторами, см. Либерман [1]. В работе [1] Кэлер впервые изучил класс эрмитовых структур, названный его именем. Лемма 2.1 и предложение 2.5 доказаны Бохнером [1]. Метрика, определяемая керн-функцией, была введена Бергманом [1].

§ 5. Разложение симметрического пространства на неприводимые пространства принадлежит Э. Картану [16]. Там же содержится теорема 5.3.

§ 4, 6, 7. Теоремы 4.5, 4.6 и 6.1 доказаны в работе Бореля и Лихнеровича [1]. Теория ограниченных симметрических областей была развита Э. Картаном [19]. Он доказал теорему 7.1 (i), состоящую в том, что ограниченная симметрическая область является симметрическим пространством некомпактного типа. Его доказательство использует теорему Лиувилля, согласно которой функция $f(z)$, ограниченная и голоморфная при $|z| < \infty$, постоянна. Это доказательство отличается от данного здесь. Вторая часть теоремы 7.1 утверждает, что ограниченные симметрические области исчерпывают весь класс эрмитовых симметрических пространств некомпактного типа. Этот факт был проверен Э. Картаном [19] при помощи явной конструкции для тех неприводимых эрмитовых симметрических пространств, у которых $A_0(M)$ — классическая группа. При этом остаются нерассмотренными два особых эрмитовых симметрических пространства, для которых Картан сформулировал результат без доказательства ([19], стр. 151). Первое доказательство аргюи дал Хариш-Чандра [6], стр. 591. Оно воспроизводится в тексте книги. В работе [19] Картан поставил вопрос, всегда ли ограниченная однородная область является симметрической. На этот вопрос был дан отрицательный ответ Пятецким-Шапиро [1] (в размерностях 4 и 5). Хотя Э. Картан положительно решил этот вопрос в размерностях 1, 2, 3, он воздержался в работе [19] от догадок, каким будет результат в более высоких размерностях. Несмотря на это, в литературе последних лет этот вопрос часто называют «гипотезой Картана». Теорема вложения (теорема 7.13) принадлежит Борелю [2, 3].

О КЛАССИФИКАЦИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В своих работах 1926 и 1927 гг. Э. Картан дал полную классификацию неприводимых римановых глобально симметрических пространств. С локальной точки зрения вопрос сводится к классификации всех простых алгебр Ли над $\mathbb{R}$. Эту трудную проблему Э. Картан решил еще в 1914 г. В настоящей главе формулируются результаты классификации и рассматриваются некоторые общие методы, приводящие к этим результатам. Что касается проведения классификации во всех деталях, мы отсылаем читателя к литературе, которая будет указана далее.

§ 1. Редукция задачи

Напомним, что две ортогональные симметрические алгебры Ли $(\mathfrak{l}_1, s_1)$ и $(\mathfrak{l}_2, s_2)$ называются изоморфными, если существует такой изоморфизм φ алгебры $\mathfrak{l}_1$ на $\mathfrak{l}_2$, что $\varphi \circ s_1 = s_2 \circ \varphi$.

Следующая лемма показывает, что классификация односвязных неприводимых римановых глобально симметрических пространств с точностью до изометрии эквивалентна классификации неприводимых ортогональных симметрических алгебр Ли с точностью до изоморфизма. Здесь, как обычно, предполагается, что риманова структура индуцирована формой Киллинга.

Лемма 1.1.

(i) Пусть M_1 и M_2 — два неприводимых римановых глобально симметрических пространства и Φ — изометрия пространства M_1 на M_2 . Пусть $p_1 \in M_1$, $p_2 \in M_2$ таковы, что $\Phi(p_1) = p_2$. Обозначим через σ_i автоморфизм группы $I_0(M_i)$, заданный формулой $\sigma_i(g) = s_{p_i} \circ g \circ s_{p_i}$ ($i = 1, 2$). Обозначим через s_i соответствующий автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{l}_i$ группы $I_0(M_i)$. Тогда дифференциал изоморфизма $g \rightarrow \Phi \circ g \circ \Phi^{-1}$ группы $I_0(M_1)$ на $I_0(M_2)$ является изоморфизмом ортогональной симметрической алгебры Ли $(\mathfrak{l}_1, s_1)$ на $(\mathfrak{l}_2, s_2)$.

(ii) Пусть $(\mathfrak{l}_1, s_1)$ и $(\mathfrak{l}_2, s_2)$ — две неприводимые ортогональные симметрические алгебры Ли. Пусть (L_1, U_1) и (L_2, U_2) — соот-

ветствующие римановы симметрические пары, причем L_1 и L_2 односвязны, а U_1 и U_2 связны. Пусть φ — изоморфизм алгебры $(\mathfrak{l}_1, s_1)$ на $(\mathfrak{l}_2, s_2)$. Тогда существует такая изометрия Φ пространства L_1/U_1 на L_2/U_2 , что φ является дифференциалом изоморфизма $g \rightarrow \Phi \circ g \circ \Phi^{-1}$ группы $I_0(L_1/U_1)$ на $I_0(L_2/U_2)$.

Доказательство, которое является совершенно стандартным, можно опустить.

Мы видели, что если задана неприводимая ортогональная симметрическая алгебра Ли некомпактного типа, то с ней связано в точности одно риманово глобально симметрическое пространство, причем это пространство односвязно. Поэтому, в силу двойственности для симметрических пространств (гл. V, § 1), достаточно классифицировать неприводимые компактные римановы симметрические пространства.

Определение. Пусть $(\mathfrak{l}, s)$ — неприводимая ортогональная симметрическая алгебра Ли, и пусть M — риманово глобально симметрическое пространство, связанное с $(\mathfrak{l}, s)$. Пространство M называется пространством типа i ($i = \text{I, II, III, IV}$), если $(\mathfrak{l}, s)$ — алгебра типа i в обозначениях теорем 5.3 и 5.4 гл. VIII.

Как было отмечено выше, достаточно рассмотреть типы I и II. Рассмотрим сначала тип II.

Предложение 1.2. Римановы глобально симметрические пространства типа II — это в точности компактные связные простые группы Ли, снабженные римановой структурой, инвариантной относительно левых и правых сдвигов.

Доказательство. Из § 6 гл. IV ясно, что компактная связная простая группа Ли с двусторонне инвариантной римановой структурой является римановым глобально симметрическим пространством типа II.

С другой стороны, пусть $(\mathfrak{l}, s)$ — ортогональная симметрическая алгебра Ли типа II. Тогда $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2$ (прямая сумма), причем автоморфизм s переставляет идеалы $\mathfrak{l}_1$ и $\mathfrak{l}_2$. Пусть $\mathfrak{l}_0$ — алгебра Ли, изоморфная каждой из алгебр $\mathfrak{l}_1$ и $\mathfrak{l}_2$, и пусть I_i — изоморфизм алгебры $\mathfrak{l}_i$ на $\mathfrak{l}_0$ ($i = 1, 2$). Тогда отображение

$$I_0: X + Y \rightarrow (I_1X, I_2Y) \quad (X \in \mathfrak{l}_1, Y \in \mathfrak{l}_2)$$

является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{l}$ на прямое произведение алгебр $\bar{\mathfrak{l}} = \mathfrak{l}_0 \times \mathfrak{l}_0$. Рассмотрим автоморфизмы $\bar{s}$ и σ алгебры $\bar{\mathfrak{l}}$, заданные формулами.

$$\bar{s}(I_1X, I_2Y) = (I_2Y, I_1X),$$

$$\sigma(I_1X, I_2Y) = (I_1X, I_1sY),$$

$X \in \mathfrak{l}_1, Y \in \mathfrak{l}_2$. Тогда отображение $\sigma \circ I_0: \mathfrak{l} \rightarrow \bar{\mathfrak{l}}$ есть изоморфизм алгебры $(\mathfrak{l}, s)$ на $(\bar{\mathfrak{l}}, \bar{s})$. Пусть (L, H) и $(\bar{L}, \bar{H})$ — соответствующие

римановы симметрические пары, где L и $\bar{L}$ односвязны, H и $\bar{H}$ связны. Тогда $\bar{L}$ есть прямое произведение $L_0 \times L_0$, где L_0 — односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{l}_0$ и $\bar{H} = \{(x, x) \mid x \in L_0\}$. Пусть Q и $\bar{Q}$ — римановы структуры на L/H и $\bar{L}/\bar{H}$ соответственно, и пусть $\psi: L/H \rightarrow \bar{L}/\bar{H}$ — изометрия из леммы 1.1, индуцированная изоморфизмом $\sigma \circ I_0: \mathfrak{l} \rightarrow \bar{\mathfrak{l}}$. Пространство $\bar{L}/\bar{H}$ есть группа $\bar{G}$ с умножением

$$(x_1, x_2) \bar{H} \cdot (y_1, y_2) \bar{H} = (x_1 x_2^{-1} y_1 y_2^{-1}, e) \bar{H}.$$

(§ 6 гл. IV). Заметим, что $\bar{H}$ не является нормальным делителем в $\bar{L}$. Риманова структура $\bar{Q}$ инвариантна относительно левых и правых сдвигов группы $\bar{G}$. Отображение ψ превращает L/H в группу G , изоморфную $\bar{G}$, и Q инвариантна относительно левых и правых сдвигов группы G .

Чтобы закончить доказательство предложения 1.2, нам нужна простая лемма.

Лемма 1.3. Пусть N — такая подгруппа группы L , что H — нормальный делитель в N . Тогда умножение в L/H удовлетворяет условию

$$(xH)(nH) = xnH \quad (x \in L, n \in N).$$

В частности, факторгруппа N/H является подгруппой в L/H (заметим, что H не есть нормальный делитель в L).

Доказательство. Обозначим через $\bar{N}$ подгруппу группы $\bar{L}$, соответствующую N при изоморфизме $\sigma \circ I_0: \mathfrak{l} \rightarrow \bar{\mathfrak{l}}$. Тогда $\bar{H}$ — нормальный делитель в $\bar{N}$, и лемму достаточно доказать для групп $\bar{N}$, $\bar{L}$ и $\bar{H}$ вместо N , L и H . Рассмотрим два произвольных элемента $(n_1, n_2) \bar{H} \in \bar{N}/\bar{H}$ и $(x_1, x_2) \bar{H} \in \bar{L}/\bar{H}$. Так как $(n_1, n_2)(x, x)(n_1, n_2)^{-1} \in \bar{H}$ для каждого $x \in L_0$, то элемент $n_1^{-1}n_2$ и, значит, $n_1 n_2^{-1}$ принадлежит центру группы L_0 . Поэтому произведение в $\bar{G} = \bar{L}/\bar{H}$ равно

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \bar{H} (n_1, n_2) \bar{H} &= (x_1 x_2^{-1} n_1 n_2^{-1}, e) \bar{H} = \\ &= (x_1 n_1 n_2^{-1} x_2^{-1}, e) \bar{H} = (x_1 n_1, x_2 n_2) \bar{H}, \end{aligned}$$

и лемма доказана.

Вернемся теперь к предложению 1.2. Пусть M — произвольное риманово глобально симметрическое пространство, связанное с $(\mathfrak{l}, s)$. Тогда существует симметрическая пара (L_1, H_1) , связанная с $(\mathfrak{l}, s)$ и такая, что $L_1 = I_0(M)$ и $M = L_1/H_1$. Обозначим через π такой гомоморфизм группы L на L_1 , что $d\pi$ — тождественное отображение $\mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{l}$. Тогда $\pi(H) \subseteq H_1$. Обозначим через φ отображение

$xH \rightarrow \pi(x)H_1$ группы $G = L/H$ на многообразии $M = L_1/H_1$ (см. диаграмму). Тогда (G, φ) — накрывающее многообразие для M (лемма 13.4 гл. I). Если $o = \varphi(e)$, то геодезические симметрии s_e и s_o многообразий G и M соответственно связаны соотношением $\varphi \circ s_e = s_o \circ \varphi$. Рассмотрим замкнутое подмножество $\Gamma = \varphi^{-1}(o)$ группы G . Мы докажем, что Γ — нормальный делитель в G . Множество $\tilde{H} = \pi^{-1}(H_1)$ является замкнутой подгруппой в L . Ее компонента единицы есть H и $\Gamma = \tilde{H}/H$ (как подмножества в G). Так как H — нормальный делитель в $\tilde{H}$, то лемма 1.3 показывает, что $\varphi(g\gamma) = \varphi(g)$ для $g \in G, \gamma \in \Gamma$. Таким образом, Γ — подгруппа в G , и можно определить отображение $\beta: g\Gamma \rightarrow \varphi(g)$ факторпространства G/Γ на M :

$$\begin{array}{ccc} G = L/H & & \\ \varphi \downarrow & & \\ M & \xleftarrow{\beta} & G/\Gamma \\ s_o \downarrow & & \downarrow \eta \\ M & \xleftarrow{\beta} & G/\Gamma \end{array}$$

Если $\varphi(x_1H) = \varphi(x_2H)$, то $x_2^{-1}x_1 = h \in \tilde{H}$, откуда $(x_2H)(hH) = x_1H$. Отсюда видно, что отображение β взаимно однозначно. Наконец, рассмотрим отображение $\eta: G/\Gamma \rightarrow G/\Gamma$, соответствующее при β симметрии s_o . Тогда, поскольку $s_e(g) = g^{-1}$ и $\varphi \circ s_e = s_o \circ \varphi$, получаем, что $\eta(g\Gamma) = g^{-1}\Gamma$ ($g \in G$). Отсюда следует, что $(g\gamma)^{-1}\Gamma = g^{-1}\Gamma$ для всех $g \in G, \gamma \in \Gamma$, так что Γ — нормальный делитель в G . Мы можем превратить $M = \beta(G/\Gamma)$ в группу, потребовав, чтобы β было изоморфизмом. Наконец, так как β — изометрия, то метрика на M инвариантна относительно левых и правых сдвигов. На этом доказательство предложения 1.2 заканчивается.

Обратимся теперь к типу I. Ввиду леммы 1.1 и теоремы 5.3 гл. VIII и теоремы 8.1 гл. VII задача классификации для типа I сводится к следующим трем задачам.

А. Найти все компактные простые алгебры Ли, не различая изоморфных алгебр Ли.

В. Для каждой компактной простой алгебры Ли и найти все ее инволютивные автоморфизмы, не различая автоморфизмов, сопряженных в группе $\text{Aut}(\mathfrak{u})$.

С. Найти центры всех компактных простых односвязных групп Ли.

Но каждая комплексная полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ обладает компактной вещественной формой $\mathfrak{u}$, которая единственна с точностью до внутренних автоморфизмов (следствие 7.3 гл. III). Ясно, что алгебра $\mathfrak{g}$ проста тогда и только тогда, когда $\mathfrak{u}$ проста. Поэтому задача А эквивалентна следующей задаче:

А'. Найти все простые алгебры Ли над $\mathbb{C}$, не различая изоморфных алгебр Ли.

Если u пробегает все компактные вещественные формы комплексной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а s пробегает все инволютивные автоморфизмы алгебры u , то форма $\mathfrak{g}_0$ из алгебры $(\mathfrak{g}_0, s^*)$, двойственной к (u, s) , пробегает все некомпактные вещественные формы алгебры $\mathfrak{g}$. Мы видели также (предложение 2.2 гл. VI), что сопряженные автоморфизмы s соответствуют изоморфным вещественным формам $\mathfrak{g}_0$. Значит, задача В эквивалентна следующей задаче:

В'. Для каждой простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$ найти все ее некомпактные вещественные формы с точностью до изоморфизма.

Простейшее решение задачи А' имеет в качестве отправной точки теорему 5.4 гл. III. Согласно этой теореме и теореме 6.5 гл. V, достаточно классифицировать все возможные системы Γ векторов H_α ($\alpha \in \Delta$) в евклидовом пространстве $\mathfrak{h}^*$ со скалярным произведением B . Система Γ далеко не произвольна, так как она удовлетворяет следующим условиям, установленным в § 4 гл. III:

(а) Если $\lambda \in \Gamma$, то целочисленное кратное $n\lambda$ принадлежит к Γ тогда и только тогда, когда $n = \pm 1$.

(б) Пусть λ, μ — два непропорциональных вектора из Γ и $-p \geq 0, q \geq 0$ — наибольшие такие целые числа, что $\lambda + n\mu \in \Gamma$ для целых n , удовлетворяющих неравенству $p \leq n \leq q$. Тогда

$$p + q = -2 \frac{B(\lambda, \mu)}{B(\mu, \mu)}.$$

Для простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$ имеет место следующее дополнительное свойство:

(в) Система Γ неразложима, т. е. Γ нельзя записать в виде объединения $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, такого, что каждый вектор из Γ_1 ортогонален каждому вектору из Γ_2 .

Действительно, предположим, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ — такое разложение системы Γ . Пусть $H_\alpha \in \Gamma_1, H_\beta \in \Gamma_2$. Тогда $\beta(H_\alpha) = B(H_\alpha, H_\beta) = 0$, $B(H_\alpha, H_\alpha \pm H_\beta) \neq 0$ и $B(H_\beta, H_\alpha \pm H_\beta) \neq 0$. Отсюда видно, что ни $\alpha + \beta$, ни $\alpha - \beta$ не является корнем, так как ни $H_{\alpha+\beta}$, ни $H_{\alpha-\beta}$ не принадлежит $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Следовательно, подпространства $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ алгебры $\mathfrak{g}$, определенные формулами

$$\mathfrak{g}_1 = \sum_{H_\alpha \in \Gamma_1} \mathbb{C}H_\alpha + \sum_{H_\alpha \in \Gamma_1} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{g}_2 = \sum_{H_\beta \in \Gamma_2} \mathbb{C}H_\beta + \sum_{H_\beta \in \Gamma_2} \mathfrak{g}^\beta,$$

являются идеалами в $\mathfrak{g}$, и мы получаем противоречие с предполагавшейся простотой алгебры $\mathfrak{g}$.

Все системы Γ , удовлетворяющие условиям (а), (б) и (в), можно классифицировать при помощи методов элементарной геометрии (см, например, Понтрягин [1], § 66). Возможности для Γ оказываются такими ограниченными, что можно проверить, что каждая

система Γ возникает из некоторой простой алгебры Ли. По поводу этой проверки см. Э. Картан [1], стр. 138 — 139 (а также Хариш-Чандра [3], теорема 1). Список компактных форм всех простых алгебр Ли над $\mathbb{C}$ дается в § 4.

§ 2. Автоморфизмы

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, и пусть $\mathfrak{h}$ — под-алгебра Картана. Пусть Δ — множество ненулевых корней алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{h}$. Предположим, что Δ упорядочено некоторым образом. Как обычно, обозначим через $\mathfrak{h}^*$ вещественное векторное пространство $\sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}H_\alpha$.

Определение. Корень $\alpha > 0$ называется *простым*, если его нельзя записать в виде суммы $\alpha = \beta + \gamma$, где β и γ — положительные корни.

Лемма 2.1. Пусть α, β — простые корни, $\alpha \neq \beta$. Тогда $\beta - \alpha$ не является корнем и $B(H_\alpha, H_\beta) \leq 0$.

Доказательство. Если $\beta - \alpha$ — корень, то, обозначая его через γ , имеем включение $\gamma \in \Delta$. Напишем $\beta = \alpha + \gamma$, если $\gamma > 0$, и $\alpha = \beta - \gamma$, если $\gamma < 0$. Получаем противоречие с простотой корней α и β . В обозначениях теоремы 4.3 гл. III имеем $p = 0$, $q \geq 0$. Поскольку

$$-2B(H_\beta, H_\alpha) = B(H_\alpha, H_\alpha)(p + q),$$

получаем нашу лемму.

Теорема 2.2. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ — множество всех простых корней. Тогда $r = \dim \mathfrak{h}^*$ и каждый $\beta \in \Delta$ имеет вид $\beta = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$, где n_i — целые числа, которые либо все неотрицательны, либо все неположительны.

Доказательство. Простые корни линейно независимы. В противном случае мы имели бы соотношение

$$\sum_i a_i \alpha_i = \sum_j b_j \alpha_j,$$

где a_i, b_j — неотрицательные вещественные числа, не все равные 0. Если $\gamma = \sum a_i \alpha_i$ и если $H_\gamma \in \mathfrak{h}^*$ определяется условием $B(H, H_\gamma) = \gamma(H)$ ($H \in \mathfrak{h}$), то

$$B(H_\gamma, H_\gamma) = \sum_{i,j} a_i b_j B(H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j}).$$

Левая часть неотрицательна, а правая часть неположительна, в силу леммы. Значит, $\gamma = 0$, что приводит к противоречию.

Пусть теперь β — положительный корень. Если β не прост, то его можно записать в виде $\beta = \gamma + \delta$, где γ, δ — положительные корни. По индукции доказывается, что $\beta = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$, где каждое n_i — неотрицательное целое число. Теперь очевидно, что $r = \dim \mathfrak{h}^*$, и теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{u}$ — компактная полупростая алгебра Ли. Группа $\text{Aut}(\mathfrak{u})$ всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{u}$ есть замкнутая подгруппа группы $GL(\mathfrak{u})$ всех обратимых эндоморфизмов пространства $\mathfrak{u}$. Каждый элемент группы $\text{Aut}(\mathfrak{u})$ оставляет инвариантной форму Киллинга алгебры $\mathfrak{u}$. Отсюда следует, что $\text{Aut}(\mathfrak{u})$ компактна. Присоединенная группа $\text{Int}(\mathfrak{u})$ является компонентой единицы группы $\text{Aut}(\mathfrak{u})$. Пусть $\mathfrak{t}_0$ — максимальная абелева подалгебра алгебры $\mathfrak{u}$, и пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра, порожденная подалгеброй $\mathfrak{t}_0$ в комплексной оболочке $\mathfrak{g}$ алгебры $\mathfrak{u}$. Тогда $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана, и мы можем пользоваться полученными выше результатами. Эндоморфизм φ пространства $\mathfrak{t}_0$ будет называться *вращением*, если он отображает множество векторов $iH_\alpha (\alpha \in \Delta)$ на себя. Каждый элемент группы Вейля $W = W(\mathfrak{u})$ алгебры $\mathfrak{u}$ является вращением. Обозначим через W' группу всех вращений.

Определение. Пусть $\mathfrak{u}$ — компактная полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{t}_0$ — максимальная абелева подалгебра, $\mathfrak{g}$ — комплексная оболочка алгебры $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{h}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, порожденная подалгеброй $\mathfrak{t}_0$. *Базисом Вейля* алгебры $\mathfrak{g}$ по $\text{mod } \mathfrak{h}$ по отношению к $\mathfrak{u}$ называется базис $\{X_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ алгебры $\mathfrak{g}$ по $\text{mod } \mathfrak{h}$, обладающий следующими свойствами:

- (i) $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ и $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ для каждого $\alpha \in \Delta$;
- (ii) $[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta}$, если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$, где константы $N_{\alpha, \beta}$ удовлетворяют условию $N_{\alpha, \beta} = -N_{-\alpha, -\beta}$;
- (iii) $X_\alpha - X_{-\alpha} \in \mathfrak{u}$, $i(X_\alpha + X_{-\alpha}) \in \mathfrak{u}$ для каждого $\alpha \in \Delta$. Чтобы получить такой базис, можно положить $X_\alpha = \left(\frac{\alpha(H_\alpha)}{2}\right)^{1/2} E_\alpha$ в лемме 3.1 гл. VI. Действительно, (i) и (iii) получаются непосредственно. Из этих свойств следует, что $\tau X_\alpha = -X_{-\alpha}$ (где τ — сопряжение алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{u}$), откуда вытекает (ii).

Теорема 2.3. Пусть A — автоморфизм алгебры $\mathfrak{u}$, оставляющий подалгебру $\mathfrak{t}_0$ инвариантной. Тогда ограничение автоморфизма A на $\mathfrak{t}_0$ является вращением. С другой стороны, каждое вращение пространства $\mathfrak{t}_0$ можно продолжить до автоморфизма алгебры $\mathfrak{u}$.

Доказательство. Ясно, что A единственным образом продолжается до автоморфизма алгебры $\mathfrak{g}$. Обозначая это продолжение через A , имеем $A\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$. Для каждого $\alpha \in \Delta$ линейная функция α^A на $\mathfrak{h}$, заданная формулой $\alpha^A(H) = \alpha(A^{-1}H)$, является

корнем. Так как $A \cdot H_\alpha = H_{\alpha A}$, то ограничение автоморфизма A на t_0 есть вращение. С другой стороны, пусть φ — вращение пространства t_0 . Продолжение эндоморфизма φ до эндоморфизма пространства $\mathfrak{h}$ обозначим также через φ . Определим $\alpha' \in \Delta$ равенством $H_{\alpha'} = \varphi H_\alpha$. Тогда по теореме 4.3 гл. III имеем

$$\frac{\beta'(H_{\alpha'})}{\alpha'(H_{\alpha'})} = \frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} \quad (\alpha, \beta \in \Delta). \quad (1)$$

Как было показано при доказательстве теоремы 5.4 гл. III, из соотношения (1) вытекает, что

$$B(\varphi H, \varphi H') = B(H, H') \quad \text{для } H, H' \in \mathfrak{h}. \quad (2)$$

Из формулы (2) легко вывести, что ${}^t\varphi \cdot \alpha' = \alpha$ ($\alpha \in \Delta$) в смысле теоремы 5.4 гл. III. Значит, φ можно продолжить до автоморфизма A алгебры $\mathfrak{g}$. Заменяем теперь A автоморфизмом, который оставляет подалгебру $\mathfrak{u}$ инвариантной и совпадает с A на $\mathfrak{h}$. Пусть $\{X_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ — базис Вейля алгебры $\mathfrak{g}$ по mod $\mathfrak{h}$ по отношению к $\mathfrak{u}$. Для каждого $\alpha \in \Delta$ определим число a_α формулой $A X_\alpha = a_\alpha X_{\alpha'}$. Поскольку $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$,

$$a_\alpha a_{-\alpha} = 1. \quad (3)$$

Числа $N_{\alpha, \beta}$, определенные равенствами $[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta}$, удовлетворяют условиям (теорема 5.5 гл. III):

$$N_{\alpha, \beta}^2 = \frac{1}{2} \alpha(H_\alpha) q(1-p),$$

а это последнее число определяется системой корней. Отсюда следует, что $N_{\alpha, \beta} = \pm N_{\alpha', \beta'}$, так что

$$a_\alpha a_\beta = \pm a_{\alpha+\beta}, \quad \text{если } \alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta. \quad (4)$$

Пусть $H' \in \mathfrak{h}$. Тогда автоморфизм $B = e^{\text{ad } H'}$ алгебры $\mathfrak{g}$ оставляет неподвижной каждую точку из $\mathfrak{h}$ и

$$B X_\alpha = e^{\alpha(H')} X_\alpha \quad (\alpha \in \Delta).$$

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ — система простых корней. Поскольку $a_\alpha \neq 0$, ясно, что $H' \in \mathfrak{h}$ можно выбрать таким образом, чтобы

$$a_{\alpha_i} = e^{-\alpha_i(H')} \quad (1 \leq i \leq r).$$

Тогда из равенства (4) по индукции выводится, что

$$a_\alpha = \pm \prod a_{\alpha_i}^{n_i} = \pm e^{-\alpha(H')},$$

если $\alpha = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$. Отсюда вытекает, что

$$ABX_\alpha = \pm X_\alpha \quad \text{и} \quad ABX_{\alpha_i} = X_{\alpha'_i} \quad (5)$$

для $1 \leq i \leq r$. Так как u натянута на векторы из it_0 и $X_\alpha - X_{-\alpha}$, $i(X_\alpha + X_{-\alpha})$ ($\alpha \in \Delta$), то ясно, что AB оставляет u инвариантной и, значит, дает желаемое продолжение вращения φ .

Следствие 2.4. Пусть A — автоморфизм алгебры u , относительно которого подалгебра t_0 инвариантна. Тогда продолжение автоморфизма A на $\mathfrak{g}$ удовлетворяет условию

$$AX_\alpha = a_\alpha X_{\alpha A},$$

где $a_\alpha a_{-\alpha} = 1$ и $|a_\alpha| = 1$.

Действительно, $a_\alpha a_{-\alpha} = 1$, как и выше, но теперь мы, кроме того, имеем $A\tau = \tau A$. Так как $\tau X_\alpha = -X_{-\alpha}$, то отсюда следует, что $a_{-\alpha} = \bar{a}_\alpha$, так что $|a_\alpha| = 1$.

Предложение 2.5. Автоморфизм A алгебры u оставляет неподвижной каждую точку из t_0 тогда и только тогда, когда он имеет вид

$$A = e^{\text{ad } H}$$

для некоторого элемента $H \in t_0$.

Доказательство. Обозначим продолжение автоморфизма A на $\mathfrak{g}$ также через A . В обозначениях, введенных выше, $\alpha = \alpha'$. Значит, равенства (4) и (5) приобретают вид $a_\alpha a_\beta = a_{\alpha+\beta}$ и $ABX_\alpha = +X_\alpha$, так что AB — тождественный автоморфизм. Таким образом, $A = e^{\text{ad } H}$ для некоторого $H \in \mathfrak{h}$. Собственными значениями автоморфизма A являются 1 и $e^{\alpha(H)}$ ($\alpha \in \Delta$). Так как степени автоморфизма A образуют ограниченное множество, то $\alpha(H)$ должно быть чисто мнимым для каждого $\alpha \in \Delta$. Значит, $H \in t_0$, и предложение доказано.

Теорема 2.6. Факторгруппа $\text{Aut}(u)/\text{Int}(u)$ изоморфна группе W'/W , где W — группа Вейля, W' — группа всех вращений пространства t_0 .

Доказательство. Пусть $E \in \text{Aut}(u)$. Тогда Et_0 есть максимальная абелева подалгебра в u , так что существует такой элемент $B_1 \in \text{Int}(u)$, что $B_1 Et_0 = t_0$. Следовательно, каждый элемент группы $\text{Aut}(u)/\text{Int}(u)$ содержит автоморфизм, относительно которого t_0 инвариантно. С другой стороны, W состоит из вращений пространства t_0 , индуцированных теми элементами группы $\text{Int}(u)$, относительно которых t_0 инвариантно. Так как W порожд-

дается отражениями в плоскостях $\alpha(H) = 0$, то легко видеть, что W — нормальный делитель в W' . Построим теперь следующим образом отображение S группы $\text{Aut}(u)/\text{Int}(u)$ в W'/W . В каждом классе группы $\text{Aut}(u)$ по $\text{mod Int}(u)$ выберем элемент A , относительно которого t_0 инвариантно. Обозначим через A_t ограничение автоморфизма A на t_0 и положим

$$S: A \rightarrow A_t W.$$

Так как W — нормальный делитель в W' , то S — гомоморфизм. Из предложения 2.5 ясно, что S взаимно однозначен, а теорема 2.3 показывает, что S является отображением «на».

§ 3. Инволютивные автоморфизмы

Напомним, что ранг компактной алгебры Ли определяется как размерность любой ее максимальной абелевой подалгебры.

Теорема 3.1. Пусть θ — инволютивный автоморфизм компактной полупростой алгебры Ли u . Обозначим через $\mathfrak{f}_0$ множество неподвижных точек автоморфизма θ . Тогда $\theta \in \text{Int}(u)$ в том и только том случае, когда ранг u равен рангу $\mathfrak{f}_0$.

Доказательство. Пусть U — связная группа Ли с алгеброй Ли u . Предположим сначала, что $\theta \in \text{Int}(u)$. Тогда $\theta = \text{Ad}(u)$ для некоторого $u \in U$. Элемент u лежит в максимальном торе T алгебры U , и θ оставляет неподвижной каждую точку алгебры Ли t_0 тора T . Значит, $t_0 \subset \mathfrak{f}_0$ и ранг $\mathfrak{f}_0$ равен рангу u . С другой стороны, если $\mathfrak{f}_0$ и u имеют равные ранги, то существует подалгебра $t_0 \subset \mathfrak{f}_0$, являющаяся максимальной абелевой в u . Из предложения 2.5 сразу следует, что $\theta \in \text{Int}(u)$.

Теорема 3.2. Пусть $(\mathfrak{g}_0, \theta)$ — ортогональная симметрическая алгебра Ли некомпактного типа, и пусть $\mathfrak{f}_0$ — множество неподвижных точек автоморфизма θ . Тогда $\theta \in \text{Int}(\mathfrak{g}_0)$ в том и только том случае, когда $\mathfrak{f}_0$ содержит максимальную абелеву подалгебру алгебры $\mathfrak{g}_0$.

Пусть, как обычно, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{f}_0 + \mathfrak{p}_0$, и пусть u — подпространство $\mathfrak{f}_0 + i\mathfrak{p}_0$ комплексной оболочки $\mathfrak{g}$ алгебры $\mathfrak{g}_0$. Тогда θ продолжается до инволютивного автоморфизма алгебры $\mathfrak{g}$, который мы также обозначим через θ , оставляющего компактную вещественную форму u инвариантной. Предположим, что $\mathfrak{f}_0$ — максимальная абелева подалгебра алгебры $\mathfrak{g}_0$, содержащаяся в $\mathfrak{f}_0$. Тогда t_0 является также максимальной абелевой в u , откуда $\theta = e^{\text{ad } H}$, где $H \in t_0$. С другой стороны, предположим, что $\theta \in \text{Int}(\mathfrak{g}_0)$. Поскольку $\theta \in \text{Aut}(u)$, мы видим, что θ лежит в подгруппе Ли $\text{Int}(\mathfrak{g}_0) \cap \text{Aut}(u)$ группы $\text{Int}(\mathfrak{g}_0)$, алгебра Ли которой есть $\mathfrak{g}_0 \cap u = \mathfrak{f}_0$. Из теоремы 1.1 гл. VI следует, что $\text{Int}(\mathfrak{g}_0) \cap \text{Aut}(u) = \text{Int}(\mathfrak{g}_0) \cap$

$\cap \text{Int}(u)$. Значит, $\theta \in \text{Int}(u)$ и теорема 3.2 вытекает из теоремы 3.1.

Следствие 3.3. Пусть $M = I_0(M)/K$ — риманово глобально симметрическое пространство некомпактного типа, где K — подгруппа изотропии группы $I_0(M)$ в некоторой точке $o \in M$. Пусть $I_0(M)$ и K имеют алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{k}_0$ соответственно. Тогда геодезическая симметрия s_o принадлежит группе $I_0(M)$ в том и только том случае, когда $\mathfrak{k}_0$ содержит максимальную абелеву подалгебру алгебры $\mathfrak{g}_0$.

Действительно, если $s_o \in I_0(M)$ и если обозначить через Ad присоединенное представление группы $I_0(M)$, то $\theta = \text{Ad}(s_o) \in \text{Int}(\mathfrak{g}_0)$. С другой стороны, если $\theta \in \text{Int}(\mathfrak{g}_0)$, то $\theta \in \text{Int}(\mathfrak{g}_0) \cap \text{Aut}(u) = \text{Ad}(K)$ по теореме 1.1 гл. VI. Пусть $s \in K$ — такой элемент, что $\text{Ad}(s) = \theta$. Тогда $(ds)_o = -I$, откуда $s = s_o$.

Пусть θ_1, θ_2 — два инволютивных автоморфизма алгебры u , относительно которых инвариантна максимальная абелева подалгебра $\mathfrak{t}_0$, причем θ_1 и θ_2 совпадают на $\mathfrak{t}_0$. Вообще говоря, θ_1 и θ_2 не сопряжены¹⁾ в $\text{Aut}(u)$. Однако справедлива

Теорема 3.4. Пусть θ_1 и θ_2 — два инволютивных автоморфизма алгебры u , таких, что $\theta_1(H) = \theta_2(H) = -H$ для²⁾ $H \in \mathfrak{t}_0$. Тогда существует такой автоморфизм $\sigma \in \text{Int}(u)$, что $\theta_2 = \sigma\theta_1\sigma^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\{X_\alpha | \alpha \in \Delta\}$ — базис Вейля алгебры $\mathfrak{g}$ по mod $\mathfrak{h}$ относительно u . Тогда для каждого $\alpha \in \Delta$

$$\theta_1 X_\alpha = a_\alpha X_{-\alpha}, \quad (1)$$

где числа a_α удовлетворяют условиям

$$a_\alpha a_{-\alpha} = 1, \quad |a_\alpha| = 1, \quad a_\alpha a_\beta = -a_{\alpha+\beta},$$

если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$. Предположим теперь, что Δ упорядочено некоторым образом. Обозначим через Δ^+ множество положительных корней, через $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ — простые корни. Существует такой вектор $H_1 \in \mathfrak{h}$, что

$$a_{\alpha_j} = -e^{\alpha_j(H_1)} \quad (1 \leq j \leq r). \quad (2)$$

Поскольку каждое a_α имеет модуль 1, то $H_1 \in \mathfrak{t}_0$. Кроме того, $(-a_\alpha)(-a_\beta) = -a_{\alpha+\beta}$. Поэтому из формулы (2) по индукции выводится, что

$$-a_\alpha = e^{\alpha(H_1)} \quad (\alpha \in \Delta).$$

¹⁾ Пример дается пространствами *AIII* в списке Э. Картана (§ 4) римановых глобально симметрических пространств.

²⁾ Такие автоморфизмы существуют вследствие теоремы 2.3.

Таким образом, для всех $\alpha \in \Delta$ имеем

$$\theta_1 X_\alpha = -e^{\alpha(H_1)} X_{-\alpha}, \quad \theta_2 X_\alpha = -e^{\alpha(H_2)} X_{-\alpha}, \quad (3)$$

где H_1 и H_2 — некоторые фиксированные векторы в t_0 . Рассмотрим теперь автоморфизм

$$\sigma = e^{\frac{1}{2} \operatorname{ad} (H_1 - H_2)}$$

алгебры $\mathfrak{g}$. Этот автоморфизм оставляет инвариантной $\mathfrak{u}$ и оставляет неподвижной каждую точку из t_0 . Так как

$$\theta_2 \sigma X_\alpha = \theta_2 e^{\frac{1}{2} \alpha(H_1 - H_2)} X_\alpha = -e^{\frac{1}{2} \alpha(H_1 + H_2)} X_{-\alpha},$$

$$\sigma \theta_1 X_\alpha = -e^{\alpha(H_1)} \sigma X_{-\alpha} = -e^{\frac{1}{2} \alpha(H_1 + H_2)} X_{-\alpha},$$

то автоморфизм σ обладает нужными свойствами.

Определение. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$. Вещественная форма $\mathfrak{g}_0$ алгебры $\mathfrak{g}$ называется *нормальной*, если в каждом разложении Картана $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ пространство $\mathfrak{p}_0$ содержит максимальную абелеву подалгебру алгебры $\mathfrak{g}_0$.

Теорема 3.5. *Каждая полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$ обладает нормальной вещественной формой, которая единственна с точностью до изоморфизма*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{u}_0$ — компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$, t_0 — максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{u}_0$ и $\mathfrak{h}$ — подпространство в $\mathfrak{g}$, порожденное подалгеброй t_0 . Пусть $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ — базис Вейля алгебры $\mathfrak{g}$ по $\operatorname{mod} \mathfrak{h}$ относительно $\mathfrak{u}_0$. Тогда подпространство

$$\mathfrak{g}_0 = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} H_\alpha + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} X_\alpha$$

является вещественной формой алгебры $\mathfrak{g}$. Сопряжение τ алгебры $\mathfrak{g}$ по отношению к $\mathfrak{u}_0$ оставляет $\mathfrak{g}_0$ инвариантной, и для $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap (i\mathfrak{u}_0)$ имеем разложение Картана

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$$

алгебры $\mathfrak{g}_0$. Далее, $\mathfrak{p}_0$ содержит подпространство $\sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} H_\alpha$, которое является максимальной абелевой подалгеброй в $\mathfrak{g}_0$. Значит, $\mathfrak{g}_0$ — нормальная вещественная форма. С другой стороны, пусть $\mathfrak{g}_1$ — другая нормальная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$, и пусть $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{p}_1$ — некоторое разложение Картана алгебры $\mathfrak{g}_1$. Тогда $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{k}_1 + i\mathfrak{p}_1$ есть компактная вещественная форма в $\mathfrak{g}$. Отображение $\theta_i: T + X \rightarrow T - X$ ($T \in \mathfrak{k}_i$, $X \in i\mathfrak{p}_i$) является инволютивным

автоморфизмом алгебры $\mathfrak{u}_i$ ($i=0,1$). Существует такая максимальная абелева подалгебра $\mathfrak{t}_i$ алгебры $\mathfrak{u}_i$, что $\theta_i(H) = -H$ для $H \in \mathfrak{t}_i$ ($i=0,1$). Здесь $\mathfrak{t}_0$ — та подалгебра, которая рассматривалась выше. В силу предыдущих теорем сопряженности, существует такой автоморфизм A алгебры $\mathfrak{g}$, отображающий $\mathfrak{u}_1$ на $\mathfrak{u}_0$, что $A\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_0$. Согласно теореме 3.4, автоморфизмы $A\theta_1 A^{-1}$ и θ_0 алгебры $\mathfrak{u}_0$ сопряжены в группе $\text{Int}(\mathfrak{u}_0)$. Если обозначить через $\mathfrak{g}_A$ вещественную форму алгебры $\mathfrak{g}$, соответствующую инволюции $A\theta_1 A^{-1}$ алгебры $\mathfrak{u}_0$, то, как показывает предложение 2.2 гл. V, алгебры $\mathfrak{g}_A$ и $\mathfrak{g}_0$ изоморфны. С другой стороны, A индуцирует (путем ограничения) изоморфизм алгебры $\mathfrak{g}_1$ на $\mathfrak{g}_A$. Следовательно, $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{g}_1$ изоморфны.

Пусть $M = I_0(M)/K$ — неприводимое риманово глобально симметрическое пространство некомпактного типа. Список таких пространств, который будет дан в следующем параграфе, показывает, что группа Ли K сама по себе не определяет многообразия M даже локально. Тем не менее следующая теорема показывает, что линейная группа изотропии K^* определяет тензор кривизны многообразия M в точке $\{K\}$ и поэтому (если M односвязно) определяет пространство M . Известно, что для неприводимого риманова глобально симметрического пространства группа голономии и линейная группа изотропии имеют одну и ту же компоненту единицы. Поэтому доказанная ниже теорема показывает, что проблема 2, сформулированная во введении к гл. IV, имеет положительное решение (нужно использовать также разложение на неприводимые сомножители).

Теорема 3.6. Пусть $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{k}_2 + \mathfrak{p}_2$ — разложения Картана двух полупростых алгебр Ли $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ над $\mathbf{R}$. Допустим, что $\text{ad}_{\mathfrak{g}_i}(\mathfrak{k}_i)$ неприводимым образом действует в $\mathfrak{p}_i$ ($i=1, 2$). Пусть φ — взаимно однозначное линейное отображение алгебры $\mathfrak{g}_1$ на $\mathfrak{g}_2$, обладающее следующими свойствами:

- (i) $\varphi(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2$;
 - (ii) ограничение отображения φ на $\mathfrak{k}_1$ есть изоморфизм алгебры $\mathfrak{k}_1$ на $\mathfrak{k}_2$;
 - (iii) $\varphi([T, X]) = [\varphi(T), \varphi(X)]$ для $T \in \mathfrak{k}_1$, $X \in \mathfrak{p}_1$.
- Тогда $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ изоморфны.

Доказательство. Обозначим через B_1 , B_2 , Q_1 и Q_2 формы Киллинга алгебр $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{k}_1$ и $\mathfrak{k}_2$ соответственно.

Тогда

$$B_i(T, T) = Q_i(T, T) + \text{Tr}_{\mathfrak{p}_i}(\text{ad}_{\mathfrak{g}_i}(T) \text{ad}_{\mathfrak{g}_i}(T)) \quad (T \in \mathfrak{p}_i)$$

для $i=1, 2$. Рассмотрим билинейную форму Q на $\mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{p}_2$, заданную формулой

$$Q(X, Y) = B_2(\varphi(X), \varphi(Y)) \quad (X, Y \in \mathfrak{p}_1).$$

В силу свойства (iii), Q инвариантна относительно действия алгебры $\mathfrak{k}_1$ на $\mathfrak{p}_1$, т. е.

$$Q([T, X], Y) + Q(X, [T, Y]) = 0 \quad (X, Y \in \mathfrak{p}_1, T \in \mathfrak{k}_1).$$

Так как действие алгебры $\mathfrak{k}_1$ на $\mathfrak{p}_1$ неприводимо, то Q пропорциональна ограничению формы B_1 на $\mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{p}_1$. Значит,

$$B_2(\varphi(X), \varphi(Y)) = dB_1(X, Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{p}_1), \quad (4)$$

где d — константа, $d > 0$. С другой стороны, сравним выражения

$$B_2([\varphi(X), \varphi(Y)], \varphi(T)) \text{ и } B_2(\varphi([X, Y]), \varphi(T))$$

для $X, Y \in \mathfrak{p}_1, T \in \mathfrak{k}_1$. Мы имеем

$$B_2(\varphi([X, Y]), \varphi(T)) = Q_2(\varphi([X, Y]), \varphi(T)) + \\ + \text{Tr}_{\mathfrak{p}_2}(\text{ad}(\varphi([X, Y])) \text{ad}(\varphi(T))) = Q_1([X, Y], T) + \text{Tr}_{\mathfrak{p}_1}(\text{ad}([X, Y]) \text{ad} T),$$

где использовано свойство (ii) и соотношение

$$\text{ad } T(X) = (\varphi^{-1} \circ \text{ad}(\varphi(T)) \circ \varphi)(X).$$

Отсюда следует, что

$$B_2(\varphi([X, Y]), \varphi(T)) = B_1([X, Y], T). \quad (5)$$

С другой стороны, используя свойство (iii) и формулу (4), получаем

$$B_2([\varphi(X), \varphi(Y)], \varphi(T)) = B_2(\varphi(X), [\varphi(Y), \varphi(T)]) = \\ = B_2(\varphi(X), \varphi([Y, T])) = dB_1(X, [Y, T]) = dB_1([X, Y], T).$$

Значит, в силу соотношения (5),

$$B_2([\varphi(X), \varphi(Y)], \varphi(T)) = dB_2(\varphi([X, Y]), \varphi(T)). \quad (6)$$

Так как B_2 отрицательно определена на $\mathfrak{k}_2$, то из (6) вытекает, что

$$\varphi([X, Y]) = \frac{1}{d} [\varphi(X), \varphi(Y)] \quad (X, Y \in \mathfrak{p}_1).$$

Если положить теперь

$$\psi(T) = \varphi(T) \quad (T \in \mathfrak{k}_1), \quad \psi(X) = d^{-\frac{1}{2}} \varphi(X) \quad (X \in \mathfrak{p}_1),$$

то получится искомый изоморфизм алгебры $\mathfrak{g}_1$ на $\mathfrak{g}_2$.

З а м е ч а н и е. Классификация вещественных форм, принадлежащая Картану, которая будет изложена в следующем параграфе, показывает, что простая алгебра Ли над $\mathbf{R}$ определяется своей комплексной оболочкой и строением максимальной компактно вложенной подалгебры. Другими словами, теорема 3.6 остается справедливой, если заменить свойство (iii) предположением, что $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — вещественные формы одной и той же алгебры Ли над $\mathbf{C}$. Однако, по-видимому, не известно ни одного доказательства аргумента этого результата.

§ 4. Список Э. Картана неприводимых римановых глобально симметрических пространств

1. Некоторые группы матриц и их алгебры Ли

Чтобы описать классификацию Картана, мы примем следующие (в основном стандартные) обозначения. Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ и $(z_1, \dots, z_n)$ — переменные точки в $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$ соответственно. Матрица $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ действует на $\mathbf{C}^n$ согласно правилу

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Как и раньше, обозначим через E_{ij} матрицу $(\delta_{ai}\delta_{bj})_{1 \leq a, b \leq n}$. Матрицы, транспонированная и сопряженная к матрице A , обозначаются через ${}^tA$ и $\bar{A}$ соответственно. Матрица A называется кососимметрической, если $A + {}^tA = 0$, эрмитовой, если ${}^tA = \bar{A}$, и косоэрмитовой, если ${}^tA + \bar{A} = 0$.

Обозначив через I_n единичную матрицу порядка n , положим

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}, \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

Мультипликативная группа комплексных чисел с модулем 1 будет обозначаться через T .

$GL(n, \mathbf{C})$ ($GL(n, \mathbf{R})$): группа комплексных (вещественных) матриц порядка n с определителем, отличным от нуля.

$SL(n, \mathbb{C})$ ($SL(n, \mathbb{R})$): группа комплексных (вещественных) матриц порядка n с определителем 1.

$U(p, q)$: группа матриц из $GL(p+q, \mathbb{C})$, оставляющих инвариантной эрмитову форму

$$-z_1\bar{z}_1 - \dots - z_p\bar{z}_p + z_{p+1}\bar{z}_{p+1} + \dots + z_{p+q}\bar{z}_{p+q}.$$

Мы полагаем $U(n) = U(0, n) = U(n, 0)$ и $SU(p, q) = U(p, q) \cap SL(p+q, \mathbb{C})$, $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$. Далее, обозначим через $S(U_p \times U_q)$ множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix},$$

где $g_1 \in U(p)$, $g_2 \in U(q)$ и $\det g_1 \det g_2 = 1$.

$SU^*(2n)$: группа матриц из $SL(2n, \mathbb{C})$, которые перестановочны с преобразованием ψ пространства $\mathbb{C}^{2n}$, заданным формулой

$$(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{2n}) \rightarrow (\bar{z}_{n+1}, \dots, \bar{z}_{2n}, -\bar{z}_1, \dots, -\bar{z}_n).$$

$SO(n, \mathbb{C})$: группа матриц из $SL(n, \mathbb{C})$, оставляющих инвариантной квадратичную форму

$$z_1^2 + \dots + z_n^2.$$

$O(p, q)$: группа матриц из $SL(p+q, \mathbb{R})$, оставляющих инвариантной квадратичную форму

$$-x_1^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2.$$

Положим $SO(n) = SO(0, n) = SO(n, 0)$.

$SO^*(2n)$: группа матриц из $SO(2n, \mathbb{C})$, оставляющих инвариантной косоэрмитову форму

$$-z_1\bar{z}_{n+1} + z_{n+1}\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_{n+2} + z_{n+2}\bar{z}_2 - \dots - z_n\bar{z}_{2n} + z_{2n}\bar{z}_n.$$

$Sp(n, \mathbb{C})$: группа матриц из $GL(2n, \mathbb{C})$, оставляющих инвариантной внешнюю форму

$$z_1 \wedge z_{n+1} + z_2 \wedge z_{n+2} + \dots + z_n \wedge z_{2n}.$$

$Sp(n, \mathbb{R})$: группа матриц из $GL(2n, \mathbb{R})$, оставляющих инвариантной внешнюю форму

$$x_1 \wedge x_{n+1} + x_2 \wedge x_{n+2} + \dots + x_n \wedge x_{2n}.$$

$Sp(p, q)$: группа матриц из $Sp(p+q, \mathbb{C})$ оставляющих инвариантной эрмитову форму

$${}^t Z K_{p, q} \bar{Z}.$$

Положим $Sp(n) = Sp(0, n) = Sp(n, 0)$. Ясно, что $Sp(n) = Sp(n, \mathbb{C}) \cap U(2n)$.

Все перечисленные выше группы являются топологическими подгруппами Ли полной линейной группы. Алгебру Ли полной линейной группы $GL(n, \mathbb{C})$ можно (как в гл. II, § 1) отождествить с алгеброй Ли $gl(n, \mathbb{C})$ всех комплексных матриц порядка n , в которой операция коммутирования задается формулой $[A, B] = AB - BA$. Тогда алгебра Ли каждой из рассмотренных выше групп каноническим образом отождествляется с подалгеброй в алгебре $gl(n, \mathbb{C})$, рассматриваемой как вещественная алгебра Ли. Эти алгебры Ли будут обозначаться соответствующими малыми готическими буквами, например $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{su}(p, q)$ и т. д.

Если G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, то алгебра Ли $\mathfrak{h}$ топологической подгруппы Ли H в G дается формулой

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp tX \in H \text{ для } t \in \mathbb{R}\}. \quad (1)$$

Используя этот факт (гл. II, § 2), можно более явным образом описать алгебры Ли перечисленных выше групп. Так как вычисления для всех этих групп совершенно аналогичны, то мы проведем их в деталях только в случаях $SU^*(2n)$ и $Sp(n, \mathbb{C})$.

$gl(n, \mathbb{C})$ ($gl(n, \mathbb{R})$): {все комплексные (вещественные) матрицы порядка n },

$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ ($\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$): {все комплексные (вещественные) матрицы порядка n со следом 0},

$\mathfrak{u}(p, q)$: $\left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ {}^t\bar{Z}_2 & Z_3 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} Z_1, Z_3 \text{ косоэрмитовы порядков } p \text{ и } q \\ \text{соответственно, } Z_2 \text{ произвольна} \end{array} \right\},$

$\mathfrak{su}(p, q)$: $\left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ {}^t\bar{Z}_2 & Z_3 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} Z_1, Z_3 \text{ косоэрмитовы порядков } p \text{ и } q \text{ соответ-} \\ \text{ственно, } \text{Tr } Z_1 + \text{Tr } Z_3 = 0, Z_2 \text{ произвольна} \end{array} \right\},$

$\mathfrak{su}^*(2n)$: $\left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\bar{Z}_2 & \bar{Z}_1 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} Z_1, Z_2 \text{ — комплексные матрицы порядка } n, \\ \text{Tr } Z_1 + \text{Tr } \bar{Z}_1 = 0 \end{array} \right\},$

$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$: {все кососимметрические комплексные матрицы порядка n },

$\mathfrak{so}(p, q)$: $\left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ {}^tX_2 & X_3 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} \text{Все } X_i \text{ вещественны, } X_1, X_3 \text{ — кососиммет-} \\ \text{рические порядков } p \text{ и } q \text{ соответственно,} \\ X_2 \text{ произвольна} \end{array} \right\},$

$\mathfrak{so}^*(2n)$: $\left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\bar{Z}_2 & \bar{Z}_1 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} Z_1, Z_2 \text{ — комплексные матрицы порядка } n, \\ Z_1 \text{ кососимметрична, } Z_2 \text{ эрмитова} \end{array} \right\},$

$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$: $\left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 - {}^tZ_1 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} Z_i \text{ — комплексные матрицы порядка } n, \\ Z_2 \text{ и } Z_3 \text{ симметричны} \end{array} \right\},$

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R}): \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & -{}^t X_1 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} X_1, X_2, X_3 \text{ — вещественные матрицы} \\ \text{порядка } n, X_2 \text{ и } X_3 \text{ симметричны} \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{sp}(p, q): \left\{ \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ {}^t \bar{Z}_{12} & Z_{22} & {}^t Z_{14} & Z_{24} \\ -\bar{Z}_{13} & \bar{Z}_{14} & \bar{Z}_{11} & -\bar{Z}_{12} \\ {}^t \bar{Z}_{14} & -\bar{Z}_{24} & -{}^t Z_{12} & \bar{Z}_{22} \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} Z_{ij} \text{ — комплексные} \\ \text{матрицы; } Z_{11} \text{ и } Z_{13} \text{ —} \\ \text{порядка } p, Z_{12} \text{ и } Z_{14} \text{ —} \\ \text{с } p \text{ строками и } q \\ \text{столбцами, } Z_{11} \text{ и } Z_{22} \\ \text{косоэрмитовы, } Z_{13} \text{ и} \\ Z_{24} \text{ симметричны} \end{array} \right\}.$$

Доказательство для $SU^*(2n)$. По определению этой группы, включение $g \in SU^*(2n)$ имеет место тогда и только тогда, когда $g\psi = \psi g$ и $\det g = 1$. Отсюда видно, что $A \in \mathfrak{su}^*(2n)$ тогда и только тогда, когда $A\psi = \psi A$ и $\text{Tr } A = 0$. Записывая A в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

где A_i — комплексные матрицы порядка n , мы видим, что если U и V — матрицы-столбцы с n строками, то

$$A\psi \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V} \\ -\bar{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \bar{V} - A_2 \bar{U} \\ A_3 \bar{V} - A_4 \bar{U} \end{pmatrix},$$

$$\psi A \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \psi \begin{pmatrix} A_1 U + A_2 V \\ A_3 U + A_4 V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_3 \bar{U} + \bar{A}_4 \bar{V} \\ -\bar{A}_1 \bar{U} - \bar{A}_2 \bar{V} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\bar{A}_3 = -A_2$, $A_1 = \bar{A}_4$, что нам и нужно.

Доказательство для $Sp(n, \mathbf{C})$. Если записать символически

$$2(z_1 \wedge z_{n+1} + \dots + z_n \wedge z_{2n}) = (z_1, \dots, z_{2n}) \wedge J_n^t (z_1, \dots, z_{2n}),$$

то ясно, что $g \in Sp(n, \mathbf{C})$ тогда и только тогда, когда

$${}^t g J_n g = J_n.$$

Применяя это к $g = \exp tZ$ ($t \in \mathbf{R}$), получаем, что

$$\exp t(J_n^{-1} {}^t Z J_n) = \exp(-tZ) \quad (t \in \mathbf{R}),$$

так как $A \exp ZA^{-1} = \exp(AZA^{-1})$, ${}^t(\exp Z) = \exp {}^t Z$. Значит, $Z \in \mathfrak{sp}(n, \mathbf{C})$ тогда и только тогда, когда

$${}^t Z J_n + J_n Z = 0. \quad (2)$$

Если записать Z в виде

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix},$$

где Z_i — комплексные матрицы порядка n , то условие (2) эквивалентно равенствам ${}^tZ_1 + Z_4 = 0$, $Z_2 = {}^tZ_2$, $Z_3 = {}^tZ_3$.

Лемма 4.1. Обозначим через $\cong$ топологический изоморфизм и через $\sim$ гомеоморфизм. Тогда

$$(a) \ SO(2n) \cap Sp(n) \cong U(n),$$

$$(б) \ Sp(p, q) \cap U(2p + 2q) \cong Sp(p) \times Sp(q),$$

$$(в) \ Sp(n, \mathbf{R}) \cap U(2n) \cong U(n),$$

$$(г) \ SO^*(2n) \cap U(2n) \cong U(n),$$

$$(д) \ SU(p, q) \cap U(p + q) = S(U_p \times U_q) \sim SU(p) \times T \times SU(q),$$

$$(е) \ SU^*(2n) \cap U(2n) = Sp(n).$$

Доказательство. (а) Каждый $g \in Sp(n)$ имеет определитель 1, так что условие $g \in SO(2n) \cap Sp(n)$ эквивалентно равенствам ${}^tgg = I_{2n}$, ${}^tgJ_ng = J_n$, ${}^t\bar{g}g = I_{2n}$. Если записать g в виде

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

то эти последние соотношения будут эквивалентны равенствам $A = D$, $B = -C$, $A{}^tB + B{}^tA = 0$, $A{}^tA + B{}^tB = I_n$. Но две последние формулы означают просто, что $A + iB \in U(n)$. Для доказательства изоморфизма (б) положим

$$V = \{g \in GL(2p + 2q, \mathbf{C}) \mid {}^tgK_{p,q}\bar{g} = K_{p,q}\}.$$

Тогда

$$g \in U(2p + 2q) \cap V \iff {}^tg\bar{g} = I_{2p+2q}, \quad {}^tgK_{p,q}\bar{g} = K_{p,q}.$$

Но последние два соотношения эквивалентны тому, что

$$g = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & X_{13} & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 & X_{24} \\ X_{31} & 0 & X_{33} & 0 \\ 0 & X_{42} & 0 & X_{44} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} X_{11} & X_{13} \\ X_{31} & X_{33} \end{pmatrix} \in U(2p), \quad \begin{pmatrix} X_{22} & X_{24} \\ X_{42} & X_{44} \end{pmatrix} \in U(2q). \quad (3)$$

По определению,

$$Sp(p, q) = Sp(p + q, \mathbf{C}) \cap V,$$

откуда

$$Sp(p, q) \cap U(2p + 2q) = Sp(p + q, \mathbf{C}) \cap U(2p + 2q) \cap V.$$

Значит, матрица g вида (3) принадлежит $Sp(p, q) \cap U(2p + 2q)$ тогда и только тогда, когда ${}^t g J_{p+q} g = J_{p+q}$ или, что равносильно, когда

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{13} \\ X_{31} & X_{33} \end{pmatrix} \in U(2p) \cap Sp(p, C) = Sp(p)$$

и

$$\begin{pmatrix} X_{22} & X_{24} \\ X_{42} & X_{44} \end{pmatrix} \in U(2q) \cap Sp(q, C) = Sp(q).$$

Тем самым доказано свойство (б). Для доказательства изоморфизма (в) нужно заметить только, что

$$Sp(n, K) \cap U(2n) = Sp(n) \cap SO(2n),$$

что, в силу (а), изоморфно $U(n)$. Изоморфизм (г) также легко доказывается. Действительно, $g \in SO^*(2n)$, по определению, тогда и только тогда, когда ${}^t g g = I_{2n}$ и ${}^t g J_n \bar{g} = J_n$.

Таким образом,

$$SO^*(2n) \cap U(2n) = SO(2n) \cap Sp(n, C) = SO(2n) \cap Sp(n) \cong U(n).$$

Докажем утверждение (д). Мы имеем

$$g \in SU(p, q) \cap U(p + q) \iff g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix},$$

где $g_1 \in U(p)$, $g_2 \in U(q)$ и $\det g_1 \det g_2 = 1$. Такую матрицу можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det g_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \det g_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix},$$

где $\gamma_1 \in SU(p)$, $\gamma_2 \in SU(q)$. Значит, мы имеем отображение

$$g \rightarrow (\gamma_1, \det g_1, \gamma_2)$$

группы $SU(p, q) \cap U(p + q)$ в $SU(p) \times T \times SU(q)$. Это отображение, вообще говоря, не есть гомоморфизм, но оно непрерывно, взаимно однозначно и является отображением «на». Значит, группа $SU(p, q) \cap U(p + q)$ гомеоморфна $SU(p) \times T \times SU(q)$.

Наконец, $g \in SU^*(2n)$ тогда и только тогда, когда $\bar{g}J_n = J_ng$ и $\det g = 1$. Значит, $g \in SU^*(2n) \cap U(2n)$ тогда и только тогда, когда $\bar{g}J_n = J_ng$, ${}^t\bar{g}g = I_{2n}$, $\det g = 1$. Но эти условия эквивалентны соотношениям ${}^t g J_n g = J_n$, ${}^t g \bar{g} = I_{2n}$, т. е. условию $g \in Sp(n)$. Доказательство леммы закончено.

Следующая лемма хорошо известна, см., например, Шевалле [2].

Лемма 4.2.

(а) Все группы $GL(n, C)$, $SL(n, C)$, $SL(n, R)$, $SO(n, C)$, $SO(n)$, $SU(n)$, $U(n)$, $Sp(n, C)$, $Sp(n)$ связны.

(б) Группа $GL(n, R)$ имеет две связные компоненты.

Чтобы выяснить вопрос о связности остальных групп, нам потребуется еще одна лемма.

Определение. Пусть G — подгруппа полной линейной группы $GL(n, C)$. Обозначим через $z_{ij}(\sigma)$ ($1 \leq i, j \leq n$) матричные элементы произвольной $\sigma \in GL(n, C)$. Пусть $x_{ij}(\sigma)$ и $y_{ij}(\sigma)$ — вещественная и мнимая части числа $z_{ij}(\sigma)$. Группа G называется *псевдоалгебраической* подгруппой в $GL(n, C)$, если существует такое множество многочленов P_β от $2n^2$ аргументов, что $\sigma \in G$ тогда и только тогда, когда $P_\beta(\dots x_{ij}(\sigma), y_{ij}(\sigma), \dots) = 0$ для всех P_β .

Псевдоалгебраическая подгруппа группы $GL(n, C)$ есть замкнутая подгруппа и, значит, топологическая подгруппа Ли.

Лемма 4.3¹⁾. Пусть G — такая псевдоалгебраическая подгруппа в $GL(n, C)$, что из условия $g \in G$ вытекает, что ${}^t\bar{g} \in G$. Тогда существует такое целое $d \geq 0$, что G гомеоморфно прямому произведению группы $G \cap U(n)$ и R^d .

Доказательство. Заметим сначала, что если экспоненциальный многочлен $Q(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{b_j t}$ ($b_j \in R$, $c_j \in C$) обращается в 0

при всех целых t , то $Q(t) = 0$ для всех $t \in R$. Обозначим через $\mathfrak{h}(n)$ векторное пространство всех эрмитовых матриц порядка n . Тогда $\exp$ гомеоморфно отображает $\mathfrak{h}(n)$ на пространство $P(n)$ всех положительно определенных эрмитовых матриц порядка n (см. Шевалле [2], предложение 5 § IV гл. 1). Пусть $H \in \mathfrak{h}(n)$. Докажем следующее утверждение:

Если $\exp H \in G \cap P(n)$, то $\exp tH \in G \cap P(n)$ для $t \in R$. (4)

Существует такая матрица $u \in U(n)$, что uHu^{-1} — диагональная матрица. Так как группа uGu^{-1} , так же как G , псевдоалгебраична, то можно предположить, что H в предложении (4) является

¹⁾ Ср. Шевалле [2], стр. 290.

диагональной матрицей. Пусть $h_1, \dots, h_n$ — (вещественные) диагональные элементы матрицы H . Условие $\exp H \in G \cap P(n)$ означает, что числа $e^{h_1}, \dots, e^{h_n}$ удовлетворяют некоторой системе алгебраических уравнений. Так как $\exp kH \in G \cap P(n)$ для каждого целого k , то числа $e^{kh_1}, \dots, e^{kh_n}$ также удовлетворяют этим алгебраическим уравнениям. В силу сделанного выше замечания, то же верно и тогда, когда k — любое вещественное число. Тем самым (4) доказано.

Каждую $g \in GL(n, C)$ можно единственным образом представить в виде $g = up$, где $u \in U(n)$, $p \in P(n)$. Здесь u и p непрерывно зависят от g . Если $g \in G$, то ${}^t \bar{g} g = p^2 \in G \cap P(n)$, откуда, в силу (4), $p \in G \cap P(n)$ и $u \in G \cap U(n)$. Соответствие $g \rightarrow (u, p)$ взаимно однозначно отображает группу G на прямое произведение $(G \cap U(n)) \times (G \cap P(n))$. Поскольку G несет на себе относительную топологию группы $GL(n, C)$, это отображение есть гомеоморфизм.

Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n, C)$ является прямой суммой

$$\mathfrak{gl}(n, C) = \mathfrak{u}(n) + \mathfrak{h}(n).$$

Так как алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G инвариантна относительно инволютивного автоморфизма $X \rightarrow -{}^t \bar{X}$ алгебры $\mathfrak{gl}(n, C)$, то

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n) + \mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}(n).$$

Очевидно, что $\exp(\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}(n)) \subset G \cap P(n)$. С другой стороны, каждую $p \in G \cap P(n)$ можно единственным образом записать в виде $p = \exp H$, где $H \in \mathfrak{h}(n)$. В силу (4), $H \in \mathfrak{h}(n) \cap \mathfrak{g}$. Значит, $\exp$ индуцирует гомеоморфизм множества $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}(n)$ на $G \cap P(n)$. Тем самым лемма доказана.

Лемма 4.4. (а) Все группы $SU(p, q)$, $SU^*(2n)$, $SO^*(2n)$, $Sp(n, R)$ и $Sp(p, q)$ связны.

(б) Группа $SO(p, q)$ ($0 < p < p + q$) состоит из двух связных компонент.

Доказательство. Все эти группы являются псевдоалгебраическими подгруппами соответствующей полной линейной группы и обладают свойством $g \in G \Rightarrow {}^t \bar{g} \in G$. Поэтому утверждение (а) непосредственно следует из леммы 4.3 и леммы 4.1. Для доказательства (б) рассмотрим пересечение $SO(p, q) \cap U(p + q) = SO(p, q) \cap SO(p + q)$. Оно состоит из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где A и B — ортогональные матрицы порядков p и q соответственно, удовлетворяющие условию $\det A \det B = 1$. Из леммы 4.3 следует, что $SO(p, q)$ состоит из двух компонент.

2. Простые алгебры Ли¹⁾ над $\mathbb{C}$ и их компактные вещественные формы. Неприводимые римановы глобально симметрические пространства типа II и типа IV

В таблице I $\mathfrak{g}$ пробегает все простые алгебры Ли над $\mathbb{C}$.

Таблица I

Группы Ли, соответствующие простым алгебрам Ли над $\mathbb{C}$ и их компактным вещественным формам

$\mathfrak{g}$	G	U	$Z(\tilde{U})$	$\dim U$
$\mathfrak{a}_n (n \geq 1)$	$SL(n+1, \mathbb{C})$	$SU(n+1)$	$\mathbb{Z}_{n+1}$	$n(n+2)$
$\mathfrak{b}_n (n \geq 2)$	$SO(2n+1, \mathbb{C})$	$SO(2n+1)$	$\mathbb{Z}_2$	$n(2n+1)$
$\mathfrak{c}_n (n \geq 3)$	$Sp(n, \mathbb{C})$	$Sp(n)$	$\mathbb{Z}_2$	$n(2n+1)$
$\mathfrak{d}_n (n \geq 4)$	$SO(2n, \mathbb{C})$	$SO(2n)$	$\mathbb{Z}_4$, если n нечетно $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$, если n четно	$n(2n-1)$
$\mathfrak{e}_6$	$E_6^{\mathbb{C}}$	E_6	$\mathbb{Z}_3$	78
$\mathfrak{e}_7$	$E_7^{\mathbb{C}}$	E_7	$\mathbb{Z}_2$	133
$\mathfrak{e}_8$	$E_8^{\mathbb{C}}$	E_8	$\mathbb{Z}_1$	248
$\mathfrak{f}_4$	$F_4^{\mathbb{C}}$	F_4	$\mathbb{Z}_1$	52
$\mathfrak{g}_2$	$G_2^{\mathbb{C}}$	G_2	$\mathbb{Z}_1$	14

Нижний индекс обозначает ранг алгебры $\mathfrak{g}$, т. е. размерность подалгебры Картана. Далее, через G обозначается связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, через U — аналитическая подгруппа в G , алгеброй Ли которой является компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$. Согласно § 2 гл. VI, U есть максимальная компактная подгруппа группы G . Обозначим через $\tilde{U}$ универсальную накрывающую группу группы U и через $Z(\tilde{U})$ — центр группы $\tilde{U}$. Пусть $\mathbb{Z}_p$ — циклическая группа порядка p . Группы $SU(n+1)$ и $Sp(n)$ односвязны, но группа $SO(n)$ при $n \geq 3$ допускает двулистное накрытие односвязной группой $Spin(n)$ (Шевалле [2], гл. 2). Указаны также размерности групп U .

Пять последних алгебр называются особыми структурами. Первые четыре класса (классические структуры) $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$, $\mathfrak{d}_n$, разумеется, определены для всех $n \geq 1$. Однако имеют место следующие изоморфизмы (см., например, Понтрягин [1], § 65):

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{c}_1, \quad \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{c}_2, \quad \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{d}_3, \quad \mathfrak{d}_2 = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_1, \quad (5)$$

¹⁾ Оставшаяся часть § 4 содержит различные результаты, сформулированные без доказательств, и не будет использоваться в гл. X.

а алгебра $\mathfrak{d}_1$ не полупроста. Если же принять ограничения на индексы, указанные в таблице, то каждая простая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$ будет встречаться в точности один раз.

Используя теперь теорему 5.4 гл. VIII и теорему 1.1 гл. VI, получаем следующее утверждение:

Римановы глобально симметрические пространства типа IV — это пространства G/U , где G — связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, а U — максимальная компактная подгруппа в G . Метрика на G/U является G -инвариантной и однозначно определена (с точностью до множителя) этим условием.

Далее, ввиду предложения 1.2 получаем:

Римановы глобально симметрические пространства типа II — это простые компактные связные группы Ли U . Метрика на U двусторонне инвариантна и однозначно определяется (с точностью до множителя) этим условием.

3. Инволютивные автоморфизмы простых компактных алгебр Ли. Неприводимые римановы глобально симметрические пространства типа I и типа III

А. КЛАССИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Пусть $\mathfrak{u}$ — компактная простая алгебра Ли, θ — инволютивный автоморфизм алгебры $\mathfrak{u}$. Пусть $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_*$ — разложение алгебры $\mathfrak{u}$ на собственные подпространства автоморфизма θ , и пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ (где $\mathfrak{p}_0 = i\mathfrak{p}_*$). Тогда $\mathfrak{g}_0$ — вещественная форма комплексной оболочки $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$. Ниже мы воспроизводим найденный Картаном список всех возможностей для $\mathfrak{u}$ (с точностью до изоморфизма) и всех возможностей для θ (с точностью до сопряженности). Тогда $\mathfrak{g}_0$ пробегает все некомпактные вещественные формы алгебры $\mathfrak{g}$ с точностью до изоморфизма. Перечисляются также односвязные римановы глобально симметрические пространства, соответствующие алгебрам $(\mathfrak{u}, \theta)$, и формы $\mathfrak{g}_0$ (для классических алгебр $\mathfrak{u}$). Как и раньше, мы обозначаем через $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$ и $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ максимальные абелевы подпространства в $\mathfrak{p}_*$ и $\mathfrak{p}_0$ соответственно.

Тип A I. $\mathfrak{u} = \mathfrak{su}(n)$; $\theta(X) = \bar{X}$.

Здесь $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{so}(n)$ и $\mathfrak{p}_*$ состоит из всех симметрических чисто мнимых матриц порядка n со следом 0. Таким образом, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Соответствующими односвязными симметрическими пространствами являются

$$SL(n, \mathbb{R})/SO(n), \quad SU(n)/SO(n) \quad (n > 1).$$

Диагональные матрицы из $\mathfrak{p}_*$ составляют максимальное абелево подпространство. Значит, ранг равен $n - 1$. Поскольку $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_{n-1}$, алгебра $\mathfrak{g}_0$ есть нормальная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$.

Тип **A II**. $\mathfrak{u} = \mathfrak{su}(2n)$; $\theta(X) = J_n \bar{X} J_n^{-1}$.

Здесь $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{sp}(n)$ и

$$\mathfrak{p}_* = \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ \bar{Z}_2 & -\bar{Z}_1 \end{pmatrix} \mid Z_1 \in \mathfrak{su}(n), \quad Z_2 \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \right\}.$$

Значит, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{su}^*(2n)$. Соответствующими односвязными симметрическими пространствами являются

$$SU^*(2n)/Sp(n), \quad SU(2n)/Sp(n) \quad (n > 1).$$

Диагональные матрицы из $\mathfrak{p}_*$ составляют максимальное абелево подпространство в $\mathfrak{p}_*$. Значит, ранг равен $n-1$.

Тип **A III**. $\mathfrak{u} = \mathfrak{su}(p+q)$; $\theta(X) = I_{p,q} X I_{p,q}$.

Здесь

$$\mathfrak{k}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{u}(p), \quad B \in \mathfrak{u}(q) \right. \\ \left. \text{Tr } A + \text{Tr } B = 0 \right\},$$

$$\mathfrak{p}_* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Z \\ -{}^t \bar{Z} & 0 \end{pmatrix} \mid Z \text{ — комплексная матрица с } p \text{ строками} \right. \\ \left. \text{и } q \text{ столбцами} \right\}.$$

Разложение

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - \frac{1}{p} (\text{Tr } A) I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{p} (\text{Tr } A) I_p & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} (\text{Tr } B) I_q \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B - \frac{1}{q} (\text{Tr } B) I_q \end{pmatrix}$$

показывает, что $\mathfrak{k}_0$ изоморфна прямому произведению

$$\mathfrak{su}(p) \times \mathfrak{c}_0 \times \mathfrak{su}(q),$$

где $\mathfrak{c}_0$ — центр алгебры $\mathfrak{k}_0$. Далее, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{su}(p, q)$. Соответствующими односвязными симметрическими пространствами являются

$$SU(p, q)/S(U_p \times U_q), \quad SU(p+q)/S(U_p \times U_q) \quad (p \geq 1, q \geq 1, p \geq q).$$

Максимальное абелево подпространство в $\mathfrak{p}_*$ дается формулой

$$\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*} = \sum_{i=1}^q \mathbf{R} (E_{i, p+i} - E_{p+i, i}). \quad (6)$$

Следовательно, ранг равен q . Эти пространства являются эрмитовыми симметрическими. При $q=1$ это так называемое эрмитово

гиперболическое пространство и комплексное проективное пространство.

Тип **BD I**. $\mathfrak{u} = \mathfrak{so}(p+q)$; $\theta(X) = I_{p,q} X I_{p,q}$ ($p \geq q$).

Здесь

$$\mathfrak{k}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{so}(p), B \in \mathfrak{so}(q) \right\},$$

$$\mathfrak{p}_* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ -{}^t X & 0 \end{pmatrix} \mid X \text{ — вещественная матрица с } p \text{ строками} \right. \\ \left. \text{и } q \text{ столбцами} \right\}.$$

Как показано в § 2 гл. V, отображение

$$\begin{pmatrix} A & iX \\ -i{}^t X & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & X \\ {}^t X & B \end{pmatrix}$$

есть изоморфизм алгебры $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ на $\mathfrak{so}(p, q)$. Односвязными симметрическими пространствами, связанными с $\mathfrak{so}(p, q)$ и $(\mathfrak{u}, \theta)$, являются

$$SO_0(p, q)/SO(p) \times SO(q), \quad SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$$

$$\left(\begin{array}{l} p > 1, \quad q \geq 1 \\ p+q \neq 4, \quad p \geq q \end{array} \right).$$

Здесь через $SO_0(p, q)$ обозначена компонента единицы группы $SO(p, q)$. Компактное пространство — это многообразие ориентированных p -мерных подпространств $(p+q)$ -мерного пространства, о котором известно (см., например, Стинрод [1], стр. 162), что оно односвязно. Максимальное абелево подпространство в $\mathfrak{p}_*$ снова дается формулой (6), так что ранг равен q . Если $p+q$ четно, то $\mathfrak{g}_0$ является *нормальной* вещественной формой алгебры $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $p=q$. Если $p+q$ нечетно, то $\mathfrak{g}_0$ является *нормальной* вещественной формой алгебры $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $p=q+1$.

При $q=1$ наши пространства суть *вещественное гиперболическое пространство* и *сфера*. Последние являются односвязными римановыми многообразиями с постоянной ненулевой кривизной в двумерном направлении и имеют размерность, отличную от 3. Те же пространства размерности 3 совпадают с $SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$ и $SU(2)$, т. е. относятся к случаю $\mathfrak{a}_n$ для $n=1$.

Если $q=2$, то $\mathfrak{k}_0$ имеет ненулевой центр, и наши пространства являются *эрмитовыми симметрическими*.

Тип **D III**. $\mathfrak{u} = \mathfrak{so}(2n)$; $\theta(X) = J_n X J_n^{-1}$.

Здесь $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{so}(2n) \cap \mathfrak{sp}(n)$ и по лемме 4.1 изоморфна алгебре $\mathfrak{u}(n)$.

Далее,

$$\mathfrak{p}_* = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & -X_1 \end{pmatrix} \mid X_1, X_2 \in \mathfrak{so}(n) \right\}.$$

Значит, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{so}^*(2n)$. Симметрические пространства имеют вид

$$SO^*(2n)/U(n), \quad SO(2n)/U(n) \quad (n > 2).$$

Здесь вложение группы $U(n)$ в $SO(2n)$ (и $SO^*(2n)$) задается отображением

$$A + iB \rightarrow \begin{Bmatrix} A & B \\ -B & A \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

где $A + iB \in U(n)$, A, B вещественны. Эти пространства являются эрмитовыми симметрическими, так как $\mathfrak{k}_0$ имеет ненулевой центр. Ввиду теоремы 4.6 гл. VIII они односвязны. Максимальное абелево подпространство в $\mathfrak{p}_*$ натянуто на матрицы

$$(E_{12} - E_{21}) - (E_{n+1, n+2} - E_{n+2, n+1}), \\ (E_{23} - E_{32}) - (E_{n+2, n+3} - E_{n+3, n+2}), \dots$$

Следовательно, ранг равен $[n/2]$.

Тип C I. $\mathfrak{u} = \mathfrak{sp}(n)$; $\theta(X) = \bar{X} (= J_n X J_n^{-1})$

Здесь $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{sp}(n) \cap \mathfrak{so}(2n)$ и изоморфна алгебре $\mathfrak{u}(n)$,

$$\mathfrak{p}_* = \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2 & -Z_1 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} Z_1 \in \mathfrak{u}(n) \text{ — чисто мнимая,} \\ Z_2 \text{ — симметрическая чисто мнимая.} \end{array} \right\}$$

Значит, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$. Соответствующими односвязными симметрическими пространствами являются

$$Sp(n, \mathbf{R})/U(n), \quad Sp(n)/U(n) \quad (n \geq 1).$$

Здесь вложение группы $U(n)$ в $Sp(n)$ (и $Sp(n, \mathbf{R})$) задается формулой (7). Диагональные матрицы из $\mathfrak{p}_*$ составляют максимальное абелево подпространство. Таким образом, наши пространства имеют ранг n , и $\mathfrak{g}_0$ есть нормальная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$. Пространства являются эрмитовыми симметрическими.

Тип C II. $\mathfrak{u} = \mathfrak{sp}(p+q)$; $\theta(X) = K_{p,q} X K_{p,q}$.

Здесь

$$\mathfrak{k}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & X_{13} & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 & X_{24} \\ -\bar{X}_{13} & 0 & \bar{X}_{11} & 0 \\ 0 & -\bar{X}_{24} & 0 & \bar{X}_{22} \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} X_{11} \in \mathfrak{u}(p), X_{22} \in \mathfrak{u}(q), \\ X_{13} \text{ — симметрическая матрица} \\ \text{порядка } p, \\ X_{24} \text{ — симметрическая матрица} \\ \text{порядка } q. \end{array} \right\}.$$

$$p_* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Y_{12} & 0 & Y_{14} \\ -{}^t\bar{Y}_{12} & 0 & {}^tY_{14} & 0 \\ 0 & -\bar{Y}_{14} & 0 & \bar{Y}_{12} \\ -{}^t\bar{Y}_{14} & 0 & -{}^tY_{12} & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} Y_{12} \text{ и } Y_{14} \text{ — произвольные} \\ \text{комплексные матрицы} \\ \text{с } p \text{ строками} \\ \text{и } q \text{ столбцами.} \end{array} \right\}$$

Ясно, что $\mathfrak{k}_0$ изоморфна прямому произведению $\mathfrak{sp}(p) \times \mathfrak{sp}(q)$. Далее, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{sp}(p, q)$. Соответствующие односвязные симметрические пространства имеют вид

$$Sp(p, q)/Sp(p) \times Sp(q), \quad Sp(p+q)/Sp(p) \times Sp(q) \quad (p \geq q \geq 1).$$

Здесь вложение группы $Sp(p) \times Sp(q)$ в $Sp(p+q)$ (и $Sp(p, q)$) задается отображением

$$\left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

Максимальное абелево подпространство в $\mathfrak{p}_*$ получается, если положить $Y_{14} = 0$ и заставить Y_{12} пробегать пространство $RE_{11} + RE_{22} + \dots + RE_{qq}$. Следовательно, ранг равен q . При $q = 1$ имеем так называемое *кватернионное гиперболическое пространство* и *кватернионное проективное пространство*.

На этом заканчивается список инволютивных автоморфизмов компактных классических простых алгебр Ли. Ограничение на индексы сделано для того, чтобы алгебры были простыми и пространства имели положительную размерность. Условие $p \geq q$ нужно для того, чтобы избежать повторений в одном и том же классе.

В. Совпадения между различными классами.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ

В силу изоморфизмов (5), между различными классами имеются следующие перекрытия (Э. Картан [2], стр. 352—355).

- (i) $AI(n=2) = AIII(p=q=1) = BDI(p=2, q=1) = CI(n=1)$.
Соответствующие изоморфизмы:

$$\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{sp}(1),$$

$$\mathfrak{sl}(2, R) \cong \mathfrak{su}(1, 1) \cong \mathfrak{so}(2, 1) \cong \mathfrak{sp}(1, R).$$

- (ii) $BDI(p=3, q=2) = CI(n=2)$.

Соответствующие изоморфизмы:

$$\mathfrak{so}(5) \cong \mathfrak{sp}(2),$$

$$\mathfrak{so}(3, 2) \cong \mathfrak{sp}(2, R).$$

$$(iii) \ BDI(p=4, q=1) = CII(p=q=1).$$

Соответствующие изоморфизмы:

$$\mathfrak{so}(5) \cong \mathfrak{sp}(2), \quad \mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{sp}(1) \times \mathfrak{sp}(1),$$

$$\mathfrak{so}(4, 1) \cong \mathfrak{sp}(1, 1).$$

$$(iv) \ AI(n=4) = BDI(p=q=3).$$

Соответствующие изоморфизмы:

$$\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{so}(6), \quad \mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3),$$

$$\mathfrak{sl}(4, R) \cong \mathfrak{so}(3, 3).$$

$$(v) \ AII(n=2) = BDI(p=5, q=1).$$

Соответствующие изоморфизмы:

$$\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{so}(6), \quad \mathfrak{sp}(2) \cong \mathfrak{so}(5),$$

$$\mathfrak{su}^*(4) \cong \mathfrak{so}(5, 1).$$

$$(vi) \ AIII(p=q=2) = BDI(p=4, q=2).$$

Соответствующие изоморфизмы:

$$\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{so}(6),$$

$$\mathfrak{su}(2, 2) \cong \mathfrak{so}(4, 2).$$

$$(vii) \ AIII(p=3, q=1) = DIII(n=3).$$

Соответствующие изоморфизмы:

$$\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{so}(6),$$

$$\mathfrak{su}(3, 1) \cong \mathfrak{so}^*(6).$$

$$(viii) \ BDI(p=6, q=2) = DIII(n=4).$$

Соответствующие изоморфизмы:

$$\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{so}(6),$$

$$\mathfrak{so}^*(8) \cong \mathfrak{so}(6, 2).$$

Последний изоморфизм не упоминается в упомянутой выше работе Картана. Однако изометричность пространств $BDI(p=6, q=2)$ и $DIII(n=4)$ показана у Картана [10], стр. 459. Тот факт, что

они совпадают и как эрмитовы симметрические пространства, не был замечен Картаном ([19], стр. 152) и указан в работе Морита [1], стр. 195.

Пространства $BDI(p+q=4)$ и $DIII(n=2)$ можно, конечно, определить, хотя алгебра $\mathfrak{so}(4)$ не проста. Тогда из изоморфизма $\mathfrak{d}_2 = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_1$ получаются дополнительные изоморфизмы, соответствующие следующим трем инволютивным автоморфизмам алгебры $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_1$: $(X, Y) \rightarrow (Y, X)$; $(X, Y) \rightarrow (\bar{X}, \bar{Y})$; $(X, Y) \rightarrow (X, \bar{Y})$.

(ix) $BDI(p=3, q=1) = \mathfrak{a}_n (n=1)$.

Соответствующие изоморфизмы:

$$\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2),$$

$$\mathfrak{so}(3, 1) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}).$$

(x) $BDI(p=2, q=2) = AI(n=2) \times AI(n=2)$.

Соответствующие изоморфизмы:

$$\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2),$$

$$\mathfrak{so}(2, 2) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}).$$

(xi) $DIII(n=2)$ и $AI(n=2)$.

Соответствующие изоморфизмы:

$$\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2),$$

$$\mathfrak{so}^*(4) \cong \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}).$$

С. ОСОБЫЕ СТРУКТУРЫ

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_0$ — вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$. Характер формы $\mathfrak{g}_0$ определяется формулой $\delta = \dim \mathfrak{p}_0 - \dim \mathfrak{k}_0$, где $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ — разложение Картана алгебры $\mathfrak{g}_0$. Характер достигает своего минимального значения $\delta = -\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$, если $\mathfrak{g}_0$ — компактная вещественная форма, и своего максимального значения $\delta = \text{ранг } \mathfrak{g}$, если $\mathfrak{g}_0$ — нормальная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$. Для этих крайних значений характера соответствующие вещественные формы единственны с точностью до изоморфизма (следствие 7.3 гл. III и теорема 3.5). В противоположность этому пример алгебр $\mathfrak{so}^*(18)$ и $\mathfrak{so}(12, 6)$, которые являются вещественными формами алгебры $\mathfrak{so}(18, \mathbb{C})$ с характером -9 , показывает, что две неизоморфные вещественные формы простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$ могут иметь один и тот же характер¹⁾. Однако классификация Э. Картана показывает, что этого не может быть для особых структур²⁾. Поэтому мы будем различать между собой веществен-

¹⁾ По-видимому, этого не заметил Ларди [1], стр. 195.

²⁾ В действительности это возможно только для некоторых $\mathfrak{d}_n$ и некоторых $\mathfrak{a}_n$ (например, $\mathfrak{su}^*(14)$ и $\mathfrak{su}(9, 5)$).

ные формы особых комплексных алгебр при помощи их характеров. Так, через $e_6(\delta)$ будет обозначаться вещественная форма алгебры e_6 с характером δ . Инволюции и вещественные формы особых структур требуют описания в терминах корней (Э. Картан [2]). В таблице II мы перечисляем только алгебры (g_0, f_0) и (u, f_0) .

Таблица II

Неприводимые римановы глобально симметрические пространства типа I и типа III

	Некомпактные	Компактные	Ранг	Размерность
<i>AI</i>	$SL(n, R)/SO(n)$	$SU(n)/SO(n)$	$n-1$	$\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$
<i>AII</i>	$SU^*(2n)/Sp(n)$	$SU(2n)/Sp(n)$	$n-1$	$(n-1)(2n+1)$
<i>AIII</i>	$SU(p, q)/S(U_p \times U_q)$	$SU(p+q)/S(U_p \times U_q)$	$\min(p, q)$	$2pq$
<i>BDI</i>	$SO_o(p, q)/SO(p) \times SO(q)$	$SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$	$\min(p, q)$	pq
<i>DIII</i>	$SO^*(2n)/U(n)$	$SO(2n)/U(n)$	$\left[\frac{1}{2}n \right]$	$n(n-1)$
<i>CI</i>	$Sp(n, R)/U(n)$	$Sp(n)/U(n)$	n	$n(n+1)$
<i>CII</i>	$Sp(p, q)/Sp(p) \times Sp(q)$	$Sp(p+q)/Sp(p) \times Sp(q)$	$\min(p, q)$	$4pq$
<i>EI</i>	$(e_6(6), \mathfrak{sp}(4))$	$(e_6(-78), \mathfrak{sp}(4))$	6	42
<i>EII</i>	$(e_6(2), \mathfrak{su}(6) + \mathfrak{su}(2))$	$(e_6(-78), \mathfrak{su}(6) + \mathfrak{su}(2))$	4	40
<i>EIII</i>	$(e_6(-14), \mathfrak{so}(10) + R)$	$(e_6(-78), \mathfrak{so}(10) + R)$	2	32
<i>EIV</i>	$(e_6(-26), \mathfrak{s}_4)$	$(e_6(-78), \mathfrak{s}_4)$	2	26
<i>EV</i>	$(e_7(7), \mathfrak{su}(8))$	$(e_7(-133), \mathfrak{su}(8))$	7	70
<i>EVI</i>	$(e_7(-5), \mathfrak{so}(12) + \mathfrak{su}(2))$	$(e_7(-133), \mathfrak{so}(12) + \mathfrak{su}(2))$	4	64
<i>EVII</i>	$(e_7(-25), e_6 + R)$	$(e_7(-133), e_6 + R)$	3	54
<i>EVIII</i>	$(e_8(8), \mathfrak{so}(16))$	$(e_8(-248), \mathfrak{so}(16))$	8	128
<i>EIX</i>	$(e_8(-24), e_7 + \mathfrak{su}(2))$	$(e_8(-248), e_7 + \mathfrak{su}(2))$	4	112
<i>FI</i>	$(\mathfrak{s}_4(4), \mathfrak{sp}(3) + \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{s}_4(-52), \mathfrak{sp}(3) + \mathfrak{su}(2))$	4	28
<i>FII</i>	$(\mathfrak{s}_4(-20), \mathfrak{so}(9))$	$(\mathfrak{s}_4(-52), \mathfrak{so}(9))$	1	16
<i>G</i>	$(g_2(2), \mathfrak{su}(2) + \mathfrak{su}(2))$	$(g_2(-14), \mathfrak{su}(2) + \mathfrak{su}(2))$	2	8

в разложениях $g_0 = f_0 + p_0$, $u = f_0 + p_*$, где u и g_0 — особые алгебры. Указываются также ранг и размерность.

4. Неприводимые эрмитовы симметрические пространства

При помощи теоремы 6.1 гл. VIII легко выяснить, какие из пространств, перечисленных в таблице II, являются эрмитовыми симметрическими. Это следующие пространства:

AIII, DIII, BDI ($q=2$), *CI, EIII, EVII*.

Ими исчерпывается список неприводимых эрмитовых симметрических пространств, так как пространства типов II и IV не могут быть эрмитовыми. Согласно теореме 7.1 гл. VIII, некомпактные пространства можно рассматривать как ограниченные области в евклидовом пространстве. В работе Э. Картана [19] такие области построены для четырех больших классов *AIII*, *DIII*, *BDI* ($q=2$), *CI*.

§ 5. Двухточечные однородные пространства. Симметрические пространства ранга 1. Замкнутые геодезические

Определение. Риманово многообразие M называется *двухточечным однородным*, если для любых двух пар точек $p_1, p_2 \in M$, $q_1, q_2 \in M$, удовлетворяющих условию $d(p_1, p_2) = d(q_1, q_2)$, существует такая изометрия g многообразия M , что $g \cdot p_1 = q_1$ и $g \cdot p_2 = q_2$.

Предложение 5.1. Пусть M — риманово глобально симметрическое пространство ранга 1. Тогда M является двухточечным однородным пространством.

Доказательство. Мы можем написать $M = G/K$, где $G = I_0(M)$ и K компактна. Тогда риманова симметрическая пара (G, K) является парой евклидова, компактного или некомпактного типа. Если (G, K) — пара евклидова типа, то либо $M = \mathbf{R}$, либо $M = \mathbf{S}^1$ (окружность). Если (G, K) — пара компактного или некомпактного типа, то из теоремы 6.2 гл. V видно, что M является двухточечным однородным пространством.

Двухточечные однородные пространства были полностью классифицированы Ваном [1] в компактном случае и Титсом [1] в некомпактном случае. Результаты показывают, что двухточечные однородные пространства — это евклидовы пространства, окружность $\mathbf{S}^1$ и симметрические пространства ранга 1 компактного и некомпактного типов соответственно. Доказательство использует классификацию всех простых компактных групп и всех групп, транзитивно действующих на сферах. Тот факт, что некомпактное двухточечное однородное пространство является глобально симметрическим (и, таким образом, имеет ранг 1 или совпадает с $\mathbf{R}^n$), может быть доказан без классификации (см. Нагано [1], Хелгасон [3]). Желательно было бы иметь прямое доказательство и для компактного случая.

Определение. Пусть $\gamma(t)$ ($-\infty < t < \infty$) — геодезическая в римановом многообразии M . Геодезическая называется *замкнутой*, если существует такое число $L > 0$, что $\gamma(t+L) = \gamma(t)$ для всех t . Геодезическая называется *просто замкнутой*, если, кроме того, $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ для $0 < t_1 < t_2 \leq L$. Если $|t|$ — длина дуги, то L называется *длиной* просто замкнутой геодезической.

Предложение 5.2. Пусть M — риманово глобально симметрическое пространство и $\gamma(t)$ ($-\infty < t < \infty$) — геодезическая в M , пересекающая сама себя. Тогда она является просто замкнутой геодезической.

Доказательство. Пусть p_0 — некоторая точка, в которой геодезическая пересекает сама себя. Можно допустить, что параметр t обладает тем свойством, что $\gamma(0) = \gamma(1) = p_0$ и $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ для $0 < t_1 < t_2 \leq 1$. Используя теперь обозначения теоремы 3.3 гл. IV, имеем $M = G/K$. Существует единственный такой вектор $X \in \mathfrak{p}$, что $d\pi \cdot X = \dot{\gamma}(0)$. Тогда $\exp d\pi X = \gamma(1) = p_0$, так что $\exp X \in K$. Если $Y \in M_{p_0}$, то по цитированной теореме вектор $(d \exp X)_{p_0}(Y)$ получается из Y путем параллельного переноса вдоль отрезка кривой $\gamma(t)$ ($0 \leq t \leq 1$). Применяя формулу (1) из § 3 гл. IV, получаем

$$(d \exp X)_{p_0}(d\pi X) = d\pi(\operatorname{Ad}(\exp X)X) = d\pi X.$$

Отсюда видно, что $\dot{\gamma}(0)$ получается из $\dot{\gamma}(0)$ при параллельном переносе вдоль $\gamma(t)$ ($0 \leq t \leq 1$). Значит, $\gamma(t+1) = \gamma(t)$ ($0 \leq t \leq 1$), откуда следует предложение.

Предложение 5.3. Пусть M — компактное риманово глобально симметрическое пространство. Тогда M обладает просто замкнутыми геодезическими. Если ранг пространства M равен 1, то все геодезические в M просто замкнуты и имеют одну и ту же длину.

Доказательство. Мы опять следуем обозначениям теоремы 3.3 гл. IV. Так как M и группа K компактны, то G компактна. Пусть $\mathfrak{a}$ — максимальное абелево подпространство в $\mathfrak{p}$, и пусть $A = \exp \mathfrak{a}$. Замыкание $\bar{A}$ множества A в G есть тор, алгебра Ли которого содержится в $\mathfrak{p}$. Из максимальной пространства $\mathfrak{a}$ следует, что $A = \bar{A}$. Будучи тором, A содержит однопараметрическую подгруппу $\exp tH$ ($t \in \mathbb{R}$, $H \in \mathfrak{a}$), пересекающую сама себя. Геодезическая $\pi(\exp tH)$ ($t \in \mathbb{R}$) в G/K просто замкнута в силу предложения 5.2. Если M имеет ранг 1, то все геодезические (параметризованные длиной дуги) переводятся друг в друга изометриями многообразия M (теорема 6.2 гл. V). Тем самым предложение доказано.

Определение. Пусть M — компактное риманово многообразие и p — точка в M . Множество точек многообразия M , находящихся на максимальном расстоянии от p , будет называться *антиподальным множеством*, связанным с p . Оно будет обозначаться через A_p .

Если M — компактное риманово глобально симметрическое пространство ранга 1 и $p \in M$, то подгруппа изотропии группы $I_0(M)$ в точке p транзитивно действует на A_p . Ввиду предложения 4.4 гл. II, A_p является компактным подмногообразием в M . Очевидно, что $\dim A_p < \dim M$.

Теорема 5.4. Пусть M — компактное риманово глобально симметрическое пространство ранга 1. Обозначим через $2L$ длину любой геодезической в M . Пусть p — точка в M . Тогда Exp_p является диффеоморфизмом открытого шара $\|X\| < L$ в M_p на дополнение $M \setminus A_p$.

Доказательство. Прежде всего мы утверждаем, что A_p совпадает с множеством средних точек геодезических $\gamma(s)$ ($0 \leq s \leq 2L$), выходящих из p , где s — длина дуги, измеряемая из точки p . Действительно, рассмотрим одну из этих геодезических γ . Очевидно, точка $\gamma(L)$ неподвижна относительно симметрии s_p . Если Γ — отрезок кривой длины $d(p, \gamma(L))$, соединяющий p и $\gamma(L)$, то $s_p \cdot \Gamma$ также обладает этими свойствами. Кривые $s_p \cdot \Gamma$ и Γ являются геодезическими с противоположными касательными векторами в точке p . Используя предложение 5.2, мы видим, что Γ вместе с отрезком $s_p \cdot \Gamma$ (взятым в противоположном направлении) образует замкнутую геодезическую. Значит, $L = d(p, \gamma(L))$, так что γ реализует кратчайшее расстояние между любыми двумя своими точками. Далее, пусть $q \in A_p$. Тогда $d(p, q) \geq L$. Соединим p с q геодезической Γ' наименьшей длины. Замкнутая геодезическая в M , касающаяся геодезической Γ' в точке p , должна содержать Γ' . Поскольку эта замкнутая геодезическая имеет длину $2L$, мы видим, что $d(p, q) \leq L$, откуда $d(p, q) = L$. Тем самым наше утверждение доказано.

Пусть теперь $\gamma_1(s)$ и $\gamma_2(s)$ ($0 \leq s \leq 2L$) — две геодезические в M , выходящие из точки p , где s — длина дуги, измеряемая из точки p . Предположим, что они пересекаются в точке p' , отличной от p и $\gamma_2(L)$. Рассмотрим кривую γ , образованную кратчайшей частью геодезической γ_1 , соединяющей p и p' , вместе с кратчайшей частью геодезической γ_2 , соединяющей p' и $\gamma_2(L)$. Тогда γ — кривая длины L , соединяющая p и $\gamma_2(L)$, и должна быть геодезической, в силу леммы 9.8. гл. I. Но отсюда, очевидно, вытекает, что либо $\gamma_1(s) \equiv \gamma_2(s)$, либо $\gamma_1(s) \equiv \gamma_2(2L - s)$.

Теперь уже доказано, что $\text{Exp}_p (= \text{Exp})$ является взаимно однозначным дифференцируемым отображением открытого шара $\|X\| < L$ на $M \setminus A_p$. Остается доказать, что Exp регулярно в точке $X \in M_p$, если $0 < \|X\| < L$. Для этого рассмотрим касательный вектор Y к M_p в точке X , такой, что $(d \text{Exp})_X(Y) = 0$. Обозначим через Q риманову структуру пространства M и рассмотрим функцию $q(t) = Q_{\text{Exp } tX}(d \text{Exp}_{tX}(X), d \text{Exp}_{tX}(Y))$ ($t \in \mathbb{R}$). Здесь Y рассматривается как касательный вектор к M_p в точке tX .

Если разложить $Y = yX + Y_1$, где Y_1 перпендикулярен к X , то из леммы 9.7 гл. I видно, что для малых t имеем

$$q(t) = yQ_p(X, X).$$

Поскольку $q(t)$ — аналитическая функция, мы заключаем отсюда, что она постоянна. Но $q(1) = 0$, так что $y = 0$ и Y перпендикулярен к X .

Обозначим через K подгруппу изотропии группы $G = I_0(M)$ в точке p . Можно допустить, что $\dim M > 1$. Тогда $I_0(M)$ полупроста и K транзитивно действует на каждой сфере $S_r(p)$ в M . В частности, линейная группа изотропии K^* транзитивно действует на сфере S с центром в начале координат пространства M_p , проходящей через X . Группа K^* есть компактная линейная группа и является группой Ли преобразований многообразия S . Ввиду предложения 4.3 гл. II, в алгебре Ли $\mathfrak{L}(K^*) = \mathfrak{L}(K)$ существует такой вектор Y_0 , что¹⁾

$$Y = \left\{ \frac{d}{dt} d\tau(\exp tY_0) \cdot X \right\}_{t=0}. \quad (1)$$

Если f — дифференцируемая функция на M , то

$$\begin{aligned} 0 &= (d \operatorname{Exp})_X(Y) f = \left\{ \frac{d}{dt} f(\operatorname{Exp}(d\tau(\exp tY_0) \cdot X)) \right\}_{t=0} = \\ &= \left\{ \frac{d}{dt} f(\exp tY_0 \cdot \operatorname{Exp} X) \right\}_{t=0}, \end{aligned}$$

где использованы соотношения (1) и (3) из гл. IV, § 3. Возьмем $s \in \mathbf{R}$ и применим последнюю формулу к функции $f^*(q) = f(\exp sX \cdot q)$ ($q \in M$). Тогда

$$0 = \left\{ \frac{d}{dt} f^*(\exp tY_0 \cdot \operatorname{Exp} X) \right\}_{t=0} = \left\{ \frac{d}{dt} f(\exp tY_0 \cdot \operatorname{Exp} X) \right\}_{t=s},$$

откуда видно, что $f(\exp sY_0 \cdot \operatorname{Exp} X)$ не зависит от s . Так как f произвольна, то это значит, что однопараметрическая подгруппа $\exp sY_0$ ($s \in \mathbf{R}$) оставляет точку $\operatorname{Exp} X$ неподвижной. Значит, единственная геодезическая наименьшей длины, соединяющая p и $\operatorname{Exp} X$, переводится в себя каждым $\exp sY_0$. Поэтому $d\tau(\exp sY_0)X = X$ для $s \in \mathbf{R}$, откуда $Y = 0$, в силу (1). Таким образом, Exp регулярно, и теорема доказана.

¹⁾ Здесь $\exp$ — экспоненциальное отображение для группы G , а $\tau(x)$ — отображение $gK \rightarrow xgK$ многообразия G/K на себя.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли над $\mathbb{C}$. Доказать, что $\mathfrak{g}^R$ проста и что $(\mathfrak{g}^R)^{\mathbb{C}}$ не проста. Следовательно, простые алгебры Ли над $\mathbb{R}$ распадаются на два различных класса: (а) простые алгебры Ли над $\mathbb{C}$, рассматриваемые как вещественные алгебры Ли; (б) вещественные формы простых алгебр Ли над $\mathbb{C}$.

2. Пусть $\mathfrak{g}_0$ — простая алгебра Ли над $\mathbb{R}$, и пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ — разложение Картана алгебры $\mathfrak{g}_0$. Показать, что центр алгебры $\mathfrak{k}_0$ имеет размерность, не превосходящую 1. (Указание: пусть (G, K) — соответствующая риманова симметрическая пара, и пусть $G = \text{Int}(\mathfrak{g}_0)$. Обозначим через C центр группы K . Если $\dim C > 0$, то $\mathfrak{p}_0$ обладает комплексной структурой, перестановочной с каждым элементом группы $\text{Ad}_G(K)$. Применить лемму Шура к $\text{Ad}_G(C)$ и построить изоморфизм группы C на единичную окружность.)

3. В обозначениях § 4 обозначим через σ и τ сопряжения алгебры $\mathfrak{g}_0$ по отношению к $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{u}$ соответственно. Показать, что

$$\begin{aligned} \text{для } AI \quad \sigma(X) &= \bar{X}, & \tau(X) &= -{}^t\bar{X}; \\ AII \quad \sigma(X) &= J_n \bar{X} J_n^{-1}, & \tau(X) &= -{}^t\bar{X}; \\ AIII \quad \sigma(X) &= -I_{p,q} {}^t\bar{X} I_{p,q}, & \tau(X) &= -{}^t\bar{X}; \\ BDI \quad \sigma(X) &= I_{p,q} \bar{X} I_{p,q}, & \tau(X) &= \bar{X}; \\ DIII \quad \sigma(X) &= J_n \bar{X} J_n^{-1}, & \tau(X) &= \bar{X}; \\ CI \quad \sigma(X) &= \bar{X}, & \tau(X) &= J_n \bar{X} J_n^{-1}; \\ CII \quad \sigma(X) &= -K_{p,q} {}^t\bar{X} K_{p,q}, & \tau(X) &= J_{p+q} \bar{X} J_{p+q}^{-1}. \end{aligned}$$

4. В качестве следствия из теоремы 2.6 (и теоремы 2.12 гл. VII) показать, что для компактной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{u}$ факторгруппа $\text{Aut}(\mathfrak{u})/\text{Int}(\mathfrak{u})$ изоморфна группе вращений пространства t_0 , относительно которых инвариантна заданная камера Вейля.

[Этот факт позволяет вычислить группу $\text{Aut}(\mathfrak{u})/\text{Int}(\mathfrak{u})$ для простых алгебр $\mathfrak{u}$ по системе корней. Результат (Картан [4]) заключается в том, что группа $\text{Aut}(\mathfrak{u})/\text{Int}(\mathfrak{u})$ состоит из одного элемента, если $\mathfrak{u} = \mathfrak{b}_n, \mathfrak{c}_n, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{g}_2$, из двух элементов, если $\mathfrak{u} = \mathfrak{a}_n, \mathfrak{d}_n$ ($n > 4$), $\mathfrak{e}_6$, и изоморфна группе перестановок третьей степени, если $\mathfrak{u} = \mathfrak{d}_4$.]

ЗАМЕЧАНИЯ

§ 1. Задача A' изучалась Киллингом в работе [1], где представлен список простых алгебр Ли над $\mathbb{C}$. Однако его доказательства во многих важных местах содержали ошибки (что заметил Э. Картан), и изложение особых алгебр было неполным. В диссертации [1] Э. Картан дал строгое решение задачи A' .

Упрощенные изложения, основанные на теореме 5.4 гл. III, дали Ван-дер Варден [1], Дынкин [1] и Фрейденталь [3]. Кокстер в [1] и Г. Вейль в [2], а позже Витт [2] классифицировали все конечные группы, порожденные отражениями, и применили результат к задаче классификации. Длинная статья [2] Э. Картана дает решение задачи В'. Упрощенные изложения появились после того, как была замечена эквивалентность этой задачи и задачи В; см. Э. Картан [12], Ларди [1], Гантмахер [2] и Фрейденталь [4]. Задача С была решена Э. Картаном [9] методом, указанным в § 6 гл. VII. См. также Дынкин и Онищик [1].

§ 2. Изложение в основном следует работе Гантмахера [1].

§ 3. В работе Э. Картана [10] для каждого некомпактного неприводимого M определено число компонент группы $I(M)$ и следствие 3.3 проверено в каждом случае. Существование и единственность нормальной вещественной формы (теорема 3.5) также были установлены при помощи непосредственной проверки в работе Э. Картана [2]. Эта проверка особенно затруднительна для особых структур. Доказательство теоремы 3.6 основано на указании Берже. Эта теорема была доказана также Костантом, см. Саймонс [1].

§ 4. Классификация, а также более геометрическое описание даны в работе Э. Картана [10].

§ 5. Поведение геодезических на компактных симметрических пространствах было исследовано Э. Картаном [10]. Там сформулирована (стр. 437) основная часть теоремы 5.4 и определена размерность антиподального множества A_p для каждого пространства M ранга 1. Обобщение предложения 5.2 дано Костантом [2], стр. 260.

ФУНКЦИИ НА СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Показательные функции в евклидовом пространстве R^n можно охарактеризовать как непрерывные ненулевые решения функционального уравнения $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$ или, что равносильно, как собственные функции всех дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, нормированные условием $\varphi(0) = 1$.

Разумным обобщением указанного выше функционального уравнения на симметрическое пространство G/K является уравнение

$$\int_K \varphi(xky) dk = \varphi(x)\varphi(y) \quad (x, y \in G), \quad (1)$$

решения которого будут называться сферическими функциями на группе G . Эти функции двусторонне инвариантны относительно K , т. е. $\varphi(kxk') = \varphi(x)$ для $x \in G$, $k, k' \in K$, и поэтому их можно рассматривать как функции на G/K , инвариантные при действии группы K . Среди всех таких функций сферические функции характеризуются тем, что они являются собственными функциями всех дифференциальных операторов на G/K , инвариантных при действии группы G . Для каждого из трех типов симметрических пространств решения уравнения (1) задаются простой интегральной формулой.

В некоторых частных случаях сферические функции сводятся к хорошо известным классическим функциям (функции Лежандра, функции Бесселя), и мы получаем таким образом объяснение важных свойств этих функций, сделанное с единой теоретико-групповой точки зрения.

Непрерывные функции на G с компактными носителями, двусторонне инвариантные относительно K , образуют алгебру $C^b(G)$, операцией в которой является свертка. Простым следствием симметричности пространства G/K является то, что алгебра $C^b(G)$ коммутативна. Поэтому теория банаховых алгебр сразу же приводит к основным результатам, касающимся анализа Фурье в $C^b(G)$, т. е. разложения произвольной функции $f \in C^b(G)$ на сферические функции. Одним из этих результатов является формула Планшереля, связывающая L^2 -нормы функции f и ее преобразования Фурье. Однако абстрактная теория почти не дает информации о мере Планшереля, которая появляется в этой формуле. Интересная проблема заключается в том, чтобы связать эту меру со структурой группы G . В компактном случае этот вопрос решается теорией Петера — Вейля вместе с формулой Вейля (Г. Вейль [1]) для степени неприводимого представления, имеющего заданный старший вес. В некомпактном случае проблема является значительно более трудной и еще не решена полностью, хотя Хариш-Чандра в работе [12] построил меру, по всей вероятности являющуюся мерой Планшереля, что проверено в некоторых частных случаях¹⁾.

¹⁾ См. Бхану Мурти [1, 2]. Полное решение указанной проблемы дано С. Г. Гиндикиным и Ф. И. Карпелевичем [1]. — Прим. перев.

Методы, приводящие к формуле для сферических функций на G/K (§ 6), приводят также к изоморфизму алгебры $D(G/K)$ всех G -инвариантных дифференциальных операторов на G/K на кольцо многочленов от l неизвестных, где l — ранг пространства. В частности, алгебра $D(G/K)$ коммутативна, что можно установить и более прямым путем.

§ 1 начинается с общей теории меры на факторпространствах. Доказываются различные интегральные теоремы для полупростых групп Ли, связанные с разложением Ивасава и разложением Картана.

В § 2 излагаются элементарные факты об инвариантных дифференциальных операторах на редуктивных факторпространствах G/H и дается их описание в терминах алгебр Ли групп G и H .

Сферические функции изучаются в § 3—6. Они характеризуются при помощи дифференциальных уравнений и функциональных уравнений. Просчитываются некоторые примеры. Устанавливается связь с представлениями класса 1, и, наконец, в § 6 находится явная формула. Для некомпактного типа (наиболее трудный случай) это сделано следующим образом: с каждой линейной функцией на $\mathfrak{h}_{p_0}$ связывается собственная функция операторов из $D(G/K)$ и затем показывается (и это — наиболее трудная часть), что все сферические функции получаются этим способом.

В § 7 мы доказываем некоторые теоремы о среднем значении для решений инвариантных дифференциальных уравнений на G/K , обобщающие классические теоремы о среднем значении для ряда дифференциальных уравнений в евклидовом пространстве, содержащих оператор Лапласа. Результаты наиболее отчетливы в случае ранга 1, так как тогда оператор Лапласа Бельтрами является, по существу, единственным инвариантным дифференциальным оператором. В этом случае мы даем простое явное решение уравнения Пуассона $\Delta u = f$.

§ 1. Интегральные формулы

1. Общие сведения

Пусть S — локально компактное хаусдорфово пространство. Множество вещественных непрерывных функций на S будет обозначаться через $C(S)$, а через $C_c(S)$ будет обозначаться множество функций из $C(S)$ с компактными носителями. Мера на S — это, по определению (Бурбаки [2]), линейное отображение $\mu: C_c(S) \rightarrow \mathbb{R}$, обладающее тем свойством, что для каждого компактного подмножества $K \subset S$ существует такая константа M_K , что

$$|\mu(f)| \leq M_K \sup_{x \in S} |f(x)|$$

для всех функций $f \in C_c(S)$, носитель которых содержится в K . Напомним, что линейное отображение $\mu: C_c(S) \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию $\mu(f) \geq 0$ для $f \geq 0$, $f \in C_c(S)$, является мерой на S . Такая мера называется *положительной мерой*.

Для многообразия M положим $C_c^\infty(M) = C^\infty(M) \cap C_c(M)$. Предположим, что M — ориентируемое m -мерное многообразие, и обозначим через $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ набор локальных карт на M , определяющий ориентацию многообразия M (гл. VIII, § 2). Пусть ω — m -форма на M . Определим интеграл $\int_M f \omega$ для каждой $f \in C_c(M)$.

Сначала предположим, что f имеет компактный носитель, содержащийся в координатной окрестности U_α . Пусть $\varphi_\alpha(q) = (x_1(q), \dots, x_m(q))$ ($q \in U_\alpha$). На U_α форма ω имеет выражение (гл. I, § 2, п. 4):

$$\omega_{U_\alpha} = F_\alpha(x_1, \dots, x_m) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m. \quad (1)$$

Положим

$$\int_M f \omega = \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (f \circ \varphi_\alpha^{-1})(x_1, \dots, x_m) F_\alpha(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m.$$

Используя формулу замены переменных в кратном интеграле, мы видим, что, в случае когда f имеет компактный носитель, содержащийся в пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ двух координатных окрестностей, правая часть этой формулы равна

$$\int_{\varphi_\beta(U_\beta)} (f \circ \varphi_\beta^{-1})(y_1, \dots, y_m) F_\beta(y_1, \dots, y_m) dy_1 \dots dy_m,$$

где $F_\beta dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$ — выражение формы ω в U_β . Таким образом, определение числа $\int_M f \omega$ корректно. Пусть теперь f — произвольная функция из $C_c(M)$. Тогда f равна 0 вне паракомпактного открытого подмногообразия в M , и по теореме 1.3 гл. I функцию f можно представить в виде конечной суммы $f = \sum_i f_i$, где каждая f_i имеет компактный носитель, содержащийся в некоторой окрестности U_α из нашего покрытия. Положим

$$\int_M f \omega = \sum_i \int_M f_i \omega.$$

Здесь следует проверить (Шевалле [2], стр. 236), что правая часть не зависит от выбранного разложения $f = \sum_i f_i$ функции f .

Пусть $f = \sum_j g_j$ — другое такое разложение. Выберем такую функцию $\varphi \in C_c(M)$, что $\varphi = 1$ на объединении носителей всех f_i и g_j . Тогда $\varphi = \sum \varphi_\alpha$ (конечная сумма), где носитель каждой φ_α содержится в координатной окрестности из нашего покрытия. Мы имеем

$$\sum_i f_i \varphi_\alpha = \sum_j g_j \varphi_\alpha.$$

Так как каждое слагаемое имеет носитель, содержащийся в фиксированной координатной окрестности, то

$$\sum_i \int (f_i \varphi_\alpha) \omega = \sum_j \int (g_j \varphi_\alpha) \omega.$$

По той же причине из формул

$$f_i = \sum_{\alpha} f_i \varphi_{\alpha}, \quad g_j = \sum_{\alpha} g_j \varphi_{\alpha}$$

вытекает, что

$$\int f_i \omega = \sum_{\alpha} \int (f_i \varphi_{\alpha}) \omega, \quad \int g_j \omega = \sum_{\alpha} \int (g_j \varphi_{\alpha}) \omega.$$

Отсюда получается нужное соотношение

$$\sum_i \int f_i \omega = \sum_j \int g_j \omega.$$

Теперь интеграл $\int f \omega$ корректно определен. Отображение

$$f \rightarrow \int_M f \omega \quad (f \in C_c(M))$$

является мерой на M . Очевидно, справедлива

Лемма 1.1 Если $\int_M f \omega = 0$ для всех $f \in C_c(M)$, то $\omega = 0$.

Определение. Пусть ω — m -форма. Она называется *положительной*, если для каждого $\alpha \in A$ функция F_{α} из формулы (1) положительна на $\varphi_{\alpha}(U_{\alpha})$.

Если ω — положительная m -форма на M , то из теоремы 1.3 гл. I легко следует, что $\int_M f \omega \geq 0$ для каждой неотрицательной функции $f \in C_c(M)$. Таким образом, положительная m -форма порождает положительную меру.

Предположим, что M и N — два ориентированных многообразия, и пусть Φ — диффеоморфизм многообразия M на N . Предположим, что Φ сохраняет ориентацию, т. е. что если набор локальных карт $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})_{\alpha \in A}$ определяет ориентацию многообразия M , то набор $(\Phi(U_{\alpha}), \varphi_{\alpha} \circ \Phi^{-1})_{\alpha \in A}$ локальных карт на N определяет ориентацию на N . Обозначим через m размерность многообразий M и N .

Пусть ω — m -форма на N . Тогда для всех $f \in C_c(M)$ справедлива формула

$$\int_M f \Phi^* \omega = \int_N (f \circ \Phi^{-1}) \omega. \quad (2)$$

Действительно, достаточно проверить (2) в случае, когда f имеет компактный носитель, содержащийся в координатной окрестности U_α . Если вычислить левую часть формулы (2) в системе координат φ_α , а правую часть формулы (2) в системе координат $\varphi_\alpha \circ \Phi^{-1}$, то обе части сведутся к одному и тому же интегралу.

Если M — псевдориманово многообразие, не обязательно ориентированное, то на M можно следующим образом определить меру. Рассмотрим локальную карту $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ на M . Пусть, как и раньше, $\varphi_\alpha(q) = (x_1, \dots, x_m)$ ($q \in U_\alpha$). Обозначим через g псевдориманову структуру и, обобщая определение, данное в главе VIII, положим

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right), \quad \bar{g} = |\det(g_{ij})|.$$

Для каждой функции f из $C_c(U_\alpha)$ положим

$$\mu(f) = \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (f \circ \varphi_\alpha^{-1})(x_1, \dots, x_m) \sqrt{\bar{g}} dx_1 dx_2 \dots dx_m.$$

Выражение в правой части инвариантно относительно замены координат. Используя, как и раньше, разбиение единицы, можно определить $\mu(f)$ для всех $f \in C_c(M)$. Получается положительная мера на M , которую мы будем называть *римановой мерой* на M .

Пусть M — многообразие и Φ — диффеоморфизм многообразия M на себя. Напомним, что дифференциальная форма ω на M называется инвариантной относительно Φ , если $\Phi^*\omega = \omega$.

Пусть G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Дифференциальная форма ω на G называется *левоинвариантной*, если $L_x^*\omega = \omega$ для всех $x \in G$, где через L_x (или $L(x)$) обозначается левый сдвиг $g \rightarrow xg$ на G . Далее, через R_x или $R(x)$ обозначается правый сдвиг $g \rightarrow gx$ на G , и можно определить *правоинвариантные* дифференциальные формы на G . Если $X \in \mathfrak{g}$, то обозначим через $\tilde{X}$ соответствующее левоинвариантное векторное поле на G . Пусть $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ — базис алгебры $\mathfrak{g}$. Уравнения $\omega^i(\tilde{X}_j) = \delta_j^i$ однозначно определяют n 1-форм ω^i на G . Эти формы, очевидно, левоинвариантны, и внешнее произведение $\omega = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$ есть левоинвариантная n -форма на G . Каждую 1-форму на G можно записать

в виде $\sum_{i=1}^n f_i \omega^i$, где $f_i \in C^\infty(G)$. Отсюда следует, что каждая

n -форма имеет вид $f\omega$, где $f \in C^\infty(G)$. Итак, ω является единственной левоинвариантной n -формой на G с точностью до постоянного множителя. Пусть $\varphi: x \rightarrow (x_1(x), \dots, x_n(x))$ — система канонических координат по отношению к базису $X_1, \dots, X_n$ алгебры $\mathfrak{g}$, действующая в связной открытой окрестности U точки e . В окрестности U форма ω имеет выражение

$$\omega_U = F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

и $F > 0$. Если $g \in G$, то пара $(L_g U, \varphi \circ L_g^{-1})$ есть локальная карта в связной окрестности точки g . Положим $(\varphi \circ L_g^{-1})(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ ($x \in L_g U$). Так как $y_i(gx) = x_i(x)$ ($x \in U \cap L_g U$), то отображение $L_g: U \rightarrow L_g U$ выражается в координатах (гл. I, § 3 (1)) формулой $(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n)$. В окрестности $L_g U$ форма ω имеет выражение

$$\omega_{L_g U} = G(y_1, \dots, y_n) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n.$$

Поэтому условие инвариантности $\omega_x = L_g^* \omega_{gx}$ ($x \in U \cap L_g U$) можно записать в виде

$$\begin{aligned} G(y_1(x), \dots, y_n(x)) (dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n)_x = \\ = G(x_1(x), \dots, x_n(x)) (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)_x. \end{aligned}$$

Значит, $F(x_1(x), \dots, x_n(x)) = G(x_1(x), \dots, x_n(x))$ и

$$F(x_1(x), \dots, x_n(x)) = F(y_1(x), \dots, y_n(x)) \frac{\partial(y_1(x), \dots, y_n(x))}{\partial(x_1(x), \dots, x_n(x))}$$

для $x \in U \cap L_g U$, откуда видно, что якобиан отображения $(\varphi \circ L_{g^{-1}}) \circ \varphi^{-1}$ положителен. Следовательно, набор $(L_g U, \varphi \circ L_{g^{-1}})_{g \in G}$ локальных карт превращает G в ориентированное многообразие, и каждый левый сдвиг сохраняет ориентацию. Ориентация на G зависит от выбора базиса в алгебре $\mathfrak{g}$. Если $X'_1, \dots, X'_n$ — другой базис, то определяемая им ориентация группы G совпадает с предыдущей тогда и только тогда, когда линейное преобразование $X_i \rightarrow X'_i$ ($1 \leq i \leq n$) имеет положительный определитель.

Форма ω является положительной левоинвариантной n -формой на G и, с точностью до постоянного положительного множителя, ω однозначно определяется этими свойствами. Обозначим ее через $d_l g$. Линейное отображение пространства $C_c(G)$ в $\mathbb{R}$, заданное формулой $f \rightarrow \int f d_l g$, является мерой на G , которую мы обозначим через μ_l . Эта мера положительна. Далее, она левоинвариантна в том смысле, что $\mu_l(f \circ L_x) = \mu_l(f)$ для $x \in G$, $f \in C_c(G)$.

Аналогичным образом G можно превратить в ориентированное многообразие так, чтобы каждый R_g ($g \in G$) сохранял ориентацию. На G существует правоинвариантная положительная n -форма $d_r g$, которая единственна с точностью до постоянного положительного множителя. Определим на G правоинвариантную положительную меру μ_r формулой

$$\mu_r(f) = \int f d_r g \quad (f \in C_c(G)).$$

Мы ориентировали группу G двумя способами. Левоинвариантная ориентация инвариантна относительно всех правых сдвигов R_x

($x \in G$) тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно всех $I(x) = L_x \circ R_{x^{-1}}$ ($x \in G$). Так как дифференциал $dI(x)_g$ выражается в виде

$$dI(x)_g = dL_{xgx^{-1}} \circ \text{Ad}(x) \circ dL_{g^{-1}},$$

то необходимое и достаточное условие выражается неравенством $\det \text{Ad}(x) > 0$ для всех $x \in G$. Это условие всегда выполняется, если G связна.

Лемма 1.2. При введенных выше обозначениях имеем

$$d_r g = c \det \text{Ad}(g) d_l g,$$

где c — константа.

Доказательство. Пусть $\theta = \det \text{Ad}(g) d_l g$, и пусть $x \in G$. Тогда

$$(R_{x^{-1}})^* \theta = \det \text{Ad}(gx^{-1}) (R_{x^{-1}})^* d_l g = \det \text{Ad}(gx^{-1}) I(x)^* d_l g.$$

В точке $g = e$ имеем

$$(I(x)^* (d_l g))_e = \det \text{Ad}(x) (d_l g)_e.$$

Следовательно,

$$(R_{x^{-1}}^* \theta)_e = \det \text{Ad}(e) (d_l g)_e = \theta_e.$$

Итак, форма θ правоинвариантна и, следовательно, пропорциональна форме $d_r g$.

Замечание. Если G связна, то ее можно ориентировать таким образом, чтобы все правые и левые сдвиги сохраняли ориентацию. Если определить $d_r g$ и $d_l g$ при помощи этой ориентации, то в лемме 1.2 будет $c > 0$.

Следствие 1.3. Пусть $x, y \in G$, и пусть $d_l(ygx) = (L_y R_x)^* d_l g$, $d_r(xgy) = (L_x R_y)^* d_r g$. Далее, если J — отображение $g \rightarrow g^{-1}$, то положим $d_l(g^{-1}) = J^*(d_l g)$. Тогда

$$d_l(gx) = \det \text{Ad}(x^{-1}) d_l g, \quad d_r(xg) = \det \text{Ad}(x) d_r g,$$

$$d_l(g^{-1}) = (-1)^{\dim G} \det \text{Ad}(g) d_l g.$$

Действительно, из леммы следует, что

$$c \det \text{Ad}(g) d_l g = d_r g = d_r(gx) = c \det \text{Ad}(gx) d_l(gx),$$

$$d_r(xg) = c \det \text{Ad}(xg) d_l(xg) = c \det \text{Ad}(xg) d_l g.$$

Наконец, так как $JR_x = L_{x^{-1}}J$, то

$$(Rx^* d_l(g^{-1})) = (R_x)^* J^* d_l g = (JR_x)^* d_l g = (L_{x^{-1}}J)^* d_l g = J^* d_l g.$$

Поэтому $d_l(g^{-1})$ правоинвариантна и, значит, пропорциональна форме $d_r g$. Но, очевидно,

$$(d_l(g^{-1}))_e = (-1)^{\dim G} (d_l g)_e,$$

и следствие доказано.

Определение. Группа Ли G называется *унимодулярной*, если левоинвариантная мера μ_l является также правоинвариантной.

Ввиду следствия 1.3 имеем, в силу (2),

$$\mu_l(f \circ R_x) = |\det \operatorname{Ad}(x)| \mu_l(f). \quad (3)$$

Отсюда следует, что G унимодулярна тогда и только тогда, когда $|\det \operatorname{Ad}(x)| = 1$ для всех $x \in G$. Если это условие выполнено, то меры μ_l и μ_r совпадают с точностью до постоянного множителя.

Предложение 1.4. Следующие группы Ли являются унимодулярными:

- (i) группы Ли G , для которых $\operatorname{Ad}(G)$ компактна;
- (ii) полупростые группы Ли;
- (iii) связные нильпотентные группы Ли.

Доказательство. В случае (i) группа $\{|\det \operatorname{Ad}(x)| : x \in G\}$ является компактной подгруппой мультипликативной группы положительных действительных чисел. Такая подгруппа обязательно состоит из одного элемента, так что G унимодулярна. В случае (ii) каждый $\operatorname{Ad}(x)$ оставляет инвариантной невырожденную билинейную форму (а именно, форму Киллинга). Отсюда следует, что $(\det \operatorname{Ad}(x))^2 = 1$. Наконец, пусть N — связная нильпотентная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{n}$. Если $X \in \mathfrak{n}$, то X нильпотентен, откуда $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} X) = 0$. Так как

$$\det e^A = e^{\operatorname{Tr} A}$$

для произвольного линейного преобразования A , то имеем

$$\det \operatorname{Ad}(\exp X) = e^{\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} X)} = 1.$$

Тем самым доказано (iii).

Обозначения. В дальнейшем мы будем употреблять преимущественно левоинвариантную меру μ_l . Для простоты мы будем писать μ вместо μ_l и dg вместо $d_l g$.

2. Инвариантные меры на факторпространствах

Пусть G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Пусть H — замкнутая подгруппа с алгеброй Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Каждый $x \in G$ порождает аналитический диффеоморфизм $\tau(x): gH \rightarrow xgH$ многообразия G/H

на себя. Обозначим через π естественное отображение группы G на G/H и положим $o = \pi(e)$. Если $h \in H$, то $(d\tau(h))_o$ — эндоморфизм касательного пространства $(G/H)_o$. Для простоты мы будем писать $d\tau(h)$ вместо $(d\tau(h))_o$ и $d\pi$ вместо $(d\pi)_e$.

Лемма 1.5.

$$\det(d\tau(h)) = \frac{\det \operatorname{Ad}_G(h)}{\det \operatorname{Ad}_H(h)} \quad (h \in H).$$

Доказательство. В § 4 гл. II было показано, что дифференциал $d\pi$ есть линейное отображение пространства $\mathfrak{g}$ на $(G/H)_o$ и имеет ядро $\mathfrak{h}$. Пусть $\mathfrak{m}$ — любое подпространство в $\mathfrak{g}$, для которого $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ (прямая сумма). Тогда $d\pi$ индуцирует изоморфизм пространства $\mathfrak{m}$ на $(G/H)_o$. Пусть $X \in \mathfrak{m}$. Тогда $\operatorname{Ad}_G(h)X = dR_{h^{-1}} \circ dL_h(X)$. Так как $\pi \circ R_h = \pi$ ($h \in H$) и $\pi \circ L_g = \tau(g) \circ \pi$ ($g \in G$), то получаем

$$d\pi \circ \operatorname{Ad}_G(h)X = d\tau(h) \circ d\pi(X), \quad h \in H, X \in \mathfrak{m}. \quad (4)$$

В соответствии с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ вектор $\operatorname{Ad}_G(h)X$ представляется в виде

$$\operatorname{Ad}_G(h)X = X(h)_{\mathfrak{h}} + X(h)_{\mathfrak{m}}.$$

Эндоморфизм $A_h: X \rightarrow X(h)_{\mathfrak{m}}$ пространства $\mathfrak{m}$ удовлетворяет условию

$$d\pi \circ A_h(X) = d\tau(h) \circ d\pi(X) \quad (X \in \mathfrak{m}),$$

откуда $\det A_h = \det(d\tau(h))$. С другой стороны,

$$\exp \operatorname{Ad}_G(h) tT = h \exp tTh^{-1} = \exp \operatorname{Ad}_H(h) tT$$

для $t \in \mathbf{R}$, $T \in \mathfrak{h}$. Значит, $\operatorname{Ad}_G(h)T = \operatorname{Ad}_H(h)T$, так что

$$\det \operatorname{Ad}_G(h) = \det A_h \det_H(h),$$

и лемма доказана.

Предложение 1.6. Пусть $m = \dim G/H$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) G/H обладает ненулевой G -инвариантной m -формой ω ;
- (ii) $\det \operatorname{Ad}_G(h) = \det \operatorname{Ad}_H(h)$ для $h \in H$.

Если эти условия выполняются, то на G/H существует G -инвариантная ориентация и G -инвариантная m -форма ω единственна с точностью до постоянного множителя.

Доказательство. Пусть ω — G -инвариантная m -форма на G/H , $\omega \neq 0$. Тогда из равенства $\tau(h)^*\omega = \omega$ в точке o вытекает, что $\det(d\tau(h)) = 1$. Значит, (ii) справедливо. С другой стороны, пусть $X_1, \dots, X_m$ — базис пространства $(G/H)_o$, и пусть $\omega^1, \dots$

..., ω^m — линейные функции на $(G/H)_o$, определенные равенствами $\omega^i(X_j) = \delta_{ij}$. Рассмотрим элемент $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^m$ в алгебре Грассмана касательного пространства $(G/H)_o$. Из условия (ii) вытекает, что $\det(d\tau(h)) = 1$ и элемент $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^m$ инвариантен относительно линейного преобразования $d\tau(h)$. Отсюда следует, что на G/H существует такая G -инвариантная m -форма ω , что $\omega_o = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^m$. Если ω^* — другая G -инвариантная m -форма на G/H , то $\omega^* = f\omega$, где $f \in C^\infty(G/H)$. В силу G -инвариантности, функция f постоянна.

Допустим, что выполняется (i). Пусть $\varphi: p \rightarrow (x_1(p), \dots, x_m(p))$ — система координат в открытой связной окрестности U точки $o \in G/H$, в которой ω имеет выражение

$$\omega_U = F(x_1, \dots, x_m) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m,$$

где $F > 0$. Пара $(\tau(g)U, \varphi \circ \tau(g^{-1}))$ есть локальная карта на связной окрестности точки $g \circ o \in G/H$. Положим $(\varphi \circ \tau(g^{-1}))(p) = (y_1(p), \dots, y_m(p))$ для $p \in \tau(g)U$. Тогда отображение $\tau(g): U \rightarrow \tau(g)U$ имеет следующее выражение в координатах (гл. I, § 3 (1)): $(y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_m)$. В $\tau(g)U$ форма ω имеет выражение

$$\omega_{\tau(g)U} = G(y_1, \dots, y_m) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m.$$

Поскольку $\omega_q = \tau(g)^* \omega_{\tau(g)q}$, для $q \in U \cap \tau(g)U$ имеем

$$\begin{aligned} \omega_q &= G(y_1(q), \dots, y_m(q)) (dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m)_q = \\ &= G(x_1(q), \dots, x_m(q)) (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m)_q. \end{aligned}$$

Значит, $F(x_1(q), \dots, x_m(q)) = G(x_1(q), \dots, x_m(q))$ и

$$F(x_1(q), \dots, x_m(q)) = F(y_1(q), \dots, y_m(q)) \frac{\partial(y_1(q), \dots, y_m(q))}{\partial(x_1(q), \dots, x_m(q))}.$$

Отсюда видно, что якобиан отображения $(\varphi \circ \tau(g^{-1})) \circ \varphi^{-1}$ положителен. Следовательно, набор $(\tau(g)U, \varphi \circ \tau(g^{-1}))_{g \in G}$ локальных карт превращает G/H в ориентированное многообразие, причем каждое $\tau(g)$ сохраняет ориентацию.

G -инвариантная форма ω порождает интеграл $\int f\omega$, который инвариантен в следующем смысле:

$$\int_{G/H} f\omega = \int_{G/H} (f \circ \tau(g))\omega \quad (g \in G).$$

Но аналогично тому, как для построения римановой меры не требуется ориентируемость, инвариантную меру на G/H можно построить при несколько более общем условии, чем условие (ii). Этому условию будет, например, удовлетворять проективное

пространство P^2 , которое не удовлетворяет условию (ii). Напомним, что мера μ на G/H называется инвариантной (или, точнее, G -инвариантной), если $\mu(f \circ \tau(g)) = \mu(f)$ для всех $g \in G$.

Теорема 1.7. Пусть G — группа Ли и H — замкнутая подгруппа. Соотношение

$$|\det \operatorname{Ad}_G(h)| = |\det \operatorname{Ad}_H(h)| \quad (h \in H) \quad (5)$$

является необходимым и достаточным условием для существования на G/H положительной G -инвариантной меры. Эта мера dg_H единственна (с точностью до постоянного множителя) и

$$\int_G f(g) dg = \int_{G/H} \left(\int_H f(gh) dh \right) dg_H \quad (f \in C_c(G)) \quad (6)$$

при подходящей нормировке левоинвариантных мер dg и dh . Докажем сначала простую лемму.

Лемма 1.8. Пусть G — группа Ли и H — замкнутая подгруппа. Пусть dh — положительная левоинвариантная мера на H , и пусть

$$\bar{f}(gH) = \int_H f(gh) dh \quad (f \in C_c(G)).$$

Тогда соответствие $f \rightarrow \bar{f}$ есть линейное отображение пространства $C_c(G)$ на $C_c(G/H)$.

Доказательство. Пусть $F \in C_c(G/H)$. Нам нужно доказать, что существует такая функция $f \in C_c(G)$, что $F = \bar{f}$. Пусть S компактное подмножество в G/H , вне которого F равна 0, и пусть S' — компактное подмножество в G , образ которого при естественном отображении $\pi: G \rightarrow G/H$ совпадает с S . Пусть S_H — компактное подмножество положительной меры в H , и пусть $\tilde{S} = S' \cdot S_H$. Тогда $\pi(\tilde{S}) = S$. Выберем такую функцию $f_1 \in C_c(G)$, что $f_1 \geq 0$ на G и $f_1 > 0$ на $\tilde{S}$. Тогда $\bar{f}_1 > 0$ на S (поскольку S_H имеет положительную меру). Функция

$$f(g) = \begin{cases} f_1(g) \frac{F(\pi(g))}{\bar{f}_1(\pi(g))}, & \text{если } \pi(g) \in S, \\ 0, & \text{если } \pi(g) \notin S, \end{cases}$$

принадлежит к $C_c(G)$ и $\bar{f} = F$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.7. Предположим сначала, что выполняется соотношение

$$|\det \operatorname{Ad}_G(h)| = |\det \operatorname{Ad}_H(h)| \quad (h \in H).$$

Пусть $\varphi \in C_c(G)$. Так как мы имеем дело с мерами, а не с диф-

ференциальными формами, то, в силу следствия 1.3, получаем

$$\begin{aligned} \int_G \varphi(g) \left(\int_H f(gh) dh \right) dg &= \int_H dh \int_G \varphi(g) f(gh) dg = \\ &= \int_H dh \int_G \varphi(gh^{-1}) f(g) |\det \operatorname{Ad}_G(h)| dg = \\ &= \int_G f(g) dg \int_H \varphi(gh^{-1}) |\det \operatorname{Ad}_G(h)| dh. \end{aligned}$$

Но из соотношения (5) и из последней части следствия 1.3 видно, что

$$\int_H \varphi(gh^{-1}) |\det \operatorname{Ad}_G(h)| dh = \int_H \varphi(gh) dh,$$

откуда

$$\int_G \varphi(g) dg \int_H f(gh) dh = \int_G f(g) dg \int_H \varphi(gh) dh.$$

Поскольку φ произвольна, из этого соотношения вытекает, что

$$\int_G f(g) dg = 0, \quad \text{если } \bar{f} \equiv 0.$$

Поэтому ввиду леммы мы можем определить линейное отображение $\mu: C_c(G/H) \rightarrow \mathbf{R}$ при помощи формулы

$$\mu(F) = \int_G f(g) dg, \quad \text{если } F = \bar{f}.$$

Так как $\mu(F) \geq 0$ для $F \geq 0$, то μ — положительная мера на G/H . Далее,

$$\mu((\bar{f})^{\tau(x)}) = \int_G f^{L(x)}(g) dg = \int_G f(g) dg = \mu(\bar{f}),$$

так что μ инвариантна.

Для доказательства обратного утверждения мы воспользуемся теоремой, согласно которой группа G обладает единственной (с точностью до постоянного множителя) положительной левоинвариантной мерой. По поводу этой «единственности меры Хаара» см., например, книгу А. Вейля [1].

Если μ — положительная инвариантная мера на G/H , то отображение $f \rightarrow \mu(\bar{f})$ есть положительная левоинвариантная мера на G . В силу указанной единственности,

$$\int_G f(g) dg = \mu(\bar{f}).$$

Ввиду леммы отсюда следует единственность меры μ , а также равенство (6). Чтобы доказать соотношение (5), заменим в формуле (6) $f(g)$ на $f(gh_1)$. В силу следствия 1.3, левая часть умножится на $|\det \text{Ad}_G(h_1)|$, а правая часть — на $|\det \text{Ad}_H(h_1)|$. Доказательство теоремы 1.7 закончено.

В настоящем параграфе нам часто придется вычислять, как преобразуются инвариантные меры при отображениях. Эти вычисления до известной степени можно свести к следующей общей лемме.

Лемма 1.9. Пусть G и S — группы Ли и $H \subset G$ и $T \subset S$ — замкнутые подгруппы. Предположим, что факторпространства G/H и S/T имеют одинаковую размерность m и что они обладают положительными инвариантными дифференциальными m -формами, которые обозначим через dg_H и ds_T . Пусть $o = \{H\}$, $o' = \{T\}$.

Пусть φ — такое дифференцируемое отображение многообразия G/H в S/T , что $\varphi \cdot \{H\} = \{T\}$. Тогда

$$\varphi^*(ds_T) = D dg_H,$$

где D — функция на G/H , вычисляемая следующим образом. Пусть $X_1, \dots, X_m$ и $Y_1, \dots, Y_m$ — фиксированные (но произвольные) базисы касательных пространств $(G/H)_o$ и $(S/T)_{o'}$ соответственно, такие, что

$$dg_H(X_1, \dots, X_m) = ds_T(Y_1, \dots, Y_m).$$

Пусть $g \in G$; выберем $s \in \varphi(gH)$. Рассмотрим линейное отображение

$$A(g) = d\tau(s^{-1}) \circ d\varphi_{gH} \circ d\tau(g)_o$$

пространства $(G/H)_o$ в $(S/T)_{o'}$ и положим $A(g)X_j = \sum_i a_{ij}(g)Y_i$.

Тогда

$$D(gH) = \det(a_{ij}(g)).$$

Доказательство. Пусть $\omega^1, \dots, \omega^m$ — линейные функции на $(G/H)_o$, определенные формулами $\omega^i(X_j) = \delta_{ij}$; и пусть $\theta^1, \dots, \theta^m$ — линейные функции на $(S/T)_{o'}$, определенные формулами $\theta^i(Y_j) = \delta_{ij}$. Тогда двойственное отображение

$${}^t(A(g)) = \tau(g)^* \circ \varphi^* \circ \tau(s^{-1})^*,$$

которое отображает пространство, двойственное к $(S/T)_{o'}$, в двойственное к $(G/H)_o$, удовлетворяет условию

$${}^t(A(g))\theta^i = \sum_j a_{ij}(g)\omega^j.$$

Но в силу предположений, сделанных относительно dg_H и ds_T ,

имеем

$$(dg_H)_{gH} = c\tau(g^{-1})^*(\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^m),$$

$$(ds_T)_{sT} = c\tau(s^{-1})^*(\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m),$$

где c — константа. Следовательно,

$$\begin{aligned} (\varphi^*(ds_T))_{gH} &= c\varphi^* \circ \tau(s^{-1})^*(\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m) = \\ &= c\tau(g^{-1})^* A(g)(\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m) = c \det(a_{ij}(g)) \tau(g^{-1})^*(\omega^1 \wedge \dots \\ &\dots \wedge \omega^m) = \det(a_{ij}(g)) (dg_H)_{gH}. \end{aligned}$$

3. Некоторые интегральные формулы для полупростых групп Ли

Лемма 1.10. Пусть U — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{u}$. Предположим, что $\mathfrak{u}$ есть прямая сумма $\mathfrak{u} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{h}$ — подалгебры в $\mathfrak{u}$ (не обязательно идеалы). Обозначим через M и H аналитические подгруппы группы U с алгебрами Ли $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно. Предположим, что соответствие $\alpha: (m, h) \rightarrow mh$ является взаимно однозначным отображением группы $M \times H$ на U .

Тогда положительные левоинвариантные меры dh , dm , du можно нормировать таким образом, что

$$\int_U f(u) du = \int_{M \times H} f(mh) \frac{\det \text{Ad}_H(h)}{\det \text{Ad}_U(h)} dm dh$$

для всех $f \in C_c(U)$.

Доказательство. Мы знаем из леммы 5.2 гл. VI, что α — диффеоморфизм и что

$$d\alpha_{(m, h)}(dL_m Y, dL_h Z) = dL_{mh}(\text{Ad}_U(h^{-1})Y + Z)$$

для $m \in M$, $h \in H$, $Y \in \mathfrak{m}$ и $Z \in \mathfrak{h}$. Применяя лемму 1.9, видим, что

$$\alpha^*(du) = D(m, h) dm dh,$$

где $dm dh$ — инвариантная мера на прямом произведении групп $M \times H$ и $D(m, h)$ — определитель линейного отображения

$$A(m, h): (Y, Z) \rightarrow \text{Ad}_U(h^{-1})Y + Z$$

пространства $\mathfrak{m} \times \mathfrak{h}$ в $\mathfrak{u}$. (Поскольку $\mathfrak{m} \times \mathfrak{h}$ отождествляется с $\mathfrak{u}$, мы можем рассматривать $A(m, h)$ как эндоморфизм пространства $\mathfrak{u}$ и можем, таким образом, говорить о его определителе.) Так как

$$\text{Ad}_U(h^{-1})Y + Z = \text{Ad}_U(h^{-1})(Y + \text{Ad}_H(h)Z),$$

то ясно, что

$$\det A(m, h) = \frac{\det \text{Ad}_H(h)}{\det \text{Ad}_U(h)},$$

и лемма следует из формулы (2).

Пусть $\mathfrak{g}_0$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbf{R}$ и $\mathfrak{g}$ — ее комплексная оболочка. Напомним, что разложение Ивасава алгебры $\mathfrak{g}_0$ строится следующим образом. Пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ — разложение Картана алгебры $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ — максимальное абелево подпространство в $\mathfrak{p}_0$. Расширим $\mathfrak{g}_{\mathfrak{p}_0}$ до максимальной абелевой подалгебры $\mathfrak{h}_0$ в $\mathfrak{g}_0$. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, порожденная подалгеброй $\mathfrak{h}_0$. Обозначим через Δ систему ненулевых корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$ и положим $\mathfrak{h}^* = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbf{R}H_\alpha$. Тогда $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} \subset \mathfrak{h}^*$, и в пространствах, двойственных к $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ и $\mathfrak{h}^*$, можно ввести совместимые упорядочения. Обозначим через P_+ множество положительных корней, которые не равны 0 тождественно на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$. Пусть $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in P_+} \alpha$, $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in P_+} \mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{n}$. Тогда $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} + \mathfrak{n}_0$ есть разложение Ивасава.

Пусть G — любая связная полупростая группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_0$, и пусть $G = K A_p N$ — соответствующее разложение в целом (теорема 5.1 гл. VI). Если $a \in A_p$, то обозначим через $\log a$ единственный элемент $H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$, для которого $\exp H = a$.

Предложение 1.11. Пусть $G = K A_p N$ — разложение Ивасава связной полупростой группы Ли G . Пусть dk , da и dn — левоинвариантные меры на группах K , A_p и N соответственно. Тогда левоинвариантную меру dg на G можно нормировать так, чтобы

$$\int_G f(g) dg = \int_{K \times A_p \times N} f(kan) e^{2\rho(\log a)} dk da dn \quad (f \in C_c(G)).$$

Доказательство. Группа $S = A_p N$ есть замкнутая подгруппа в G , содержащая A_p и N в качестве аналитических подгрупп. Алгебра Ли $\mathfrak{s}_0$ группы S разлагается в прямую сумму $\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} + \mathfrak{n}_0$. Рассмотрим теперь следующие отображения:

$$\begin{aligned} \Phi: (k, a, n) &\rightarrow kan && \text{группы } K \times A_p \times N \text{ на } G; \\ \alpha: (k, s) &\rightarrow ks && \text{группы } K \times S \text{ на } G; \\ \beta: (k, a, n) &\rightarrow (k, an) && \text{группы } K \times A_p \times N \text{ на } K \times S. \end{aligned}$$

Эти отображения являются диффеоморфизмами и $\Phi = \alpha \circ \beta$. Допустим теперь, что левоинвариантные меры dk , da и dn нормированы произвольным образом. Тогда, согласно лемме 1.10, левоинвариантную меру ds на S можно нормировать так, чтобы

$$\beta^*(dk ds) = \frac{\det \text{Ad}_N(n)}{\det \text{Ad}_S(n)} dk da dn,$$

а левоинвариантную меру dg на G можно нормировать так, чтобы

$$\alpha^*(dg) = \frac{\det \text{Ad}_S(s)}{\det \text{Ad}_G(s)} dk ds.$$

Поскольку $\Phi^* = \beta^* \circ \alpha^*$, имеем

$$\begin{aligned} \Phi^*(dg) &= \frac{\det \text{Ad}_S(an)}{\det \text{Ad}_G(an)} \cdot \frac{\det \text{Ad}_N(n)}{\det \text{Ad}_S(n)} dk da dn = \\ &= \det \text{Ad}_S(a) dk da dn, \end{aligned}$$

в силу предложения 1.4. Пусть теперь $H = \log a$ для $a \in A_p$. Тогда

$$\det \text{Ad}_S(a) = \exp(\text{Tr}(\text{ad}_{\mathfrak{s}_0}(H))).$$

Чтобы получить базис алгебры $\mathfrak{n}_0$, достаточно выбрать по ненулевому вектору в каждом $\mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{g}_0$ ($\alpha \in P_+$). Значит,

$$\text{Tr} \text{ad}_{\mathfrak{s}_0}(H) = \sum_{\alpha \in P_+} \alpha(H) = 2\rho(H).$$

Тем самым предложение доказано.

Если $a \in A_p$, то отображение $n \rightarrow ana^{-1}$ является автоморфизмом группы N . Отсюда следует, что отображение $\Psi: (k, n, a) \rightarrow kna$ есть аналитический диффеоморфизм группы $K \times N \times A_p$ на G . Так же, как раньше, получаем

$$\Psi^*(dg) = \frac{\det \text{Ad}_S(na)}{\det \text{Ad}_G(na)} \cdot \frac{\det \text{Ad}_{A_p}(a)}{\det \text{Ad}_S(a)} dk dn da.$$

Если $X \in \mathfrak{n}_0$, то $(\text{ad}_{\mathfrak{s}_0}X)(H) \in \mathfrak{n}_0$ для $H \in \mathfrak{h}_{p_0}$. Так как ограничение эндоморфизма $\text{ad}_{\mathfrak{s}_0}X$ на $\mathfrak{n}_0$ нильпотентно, то $\text{Tr}(\text{ad}_{\mathfrak{s}_0}X) = 0$. Отсюда следует, что $\det \text{Ad}_S(n) = 1$ для $n \in N$. Поэтому формула для $\Psi^*(dg)$ приобретает вид

$$\Psi^*(dg) = dk dn da. \quad (7)$$

Предложение 1.12. Пусть G, K, A_p, N и dg, dk, da, dn обозначают то же, что в предложении 1.11. Тогда

$$\int_G f(g) dg = \int_{K \times N \times A_p} f(kna) dk dn da \quad (8)$$

для всех $f \in C_c(G)$. Инвариантную положительную меру dg^* на G/A_p можно нормировать таким образом, что

$$\int_{G/A_p} F(g^*) dg^* = \int_{K \times N} (F \circ \gamma)(k, n) dk dn \quad (9)$$

для всех $F \in C_c(G/A_p)$, где через γ обозначено отображение $(k, n) \rightarrow knA_p$ группы $K \times N$ на G/A_p .

Доказательство. Первое утверждение (8) сразу следует из (7). Существование меры dg^* очевидно из теоремы 1.7, так как G и A_p унимодулярны. Пусть $f \in C_c(G)$. Из формулы (8) и теоремы 1.7 получаем, что

$$\int_G f(g) dg = \int_{K \times N} \left(\int_{A_p} f(kna) da \right) dk dn = \int_{G/A_p} \left(\int_{A_p} f(ga) da \right) dg^*.$$

Отсюда следует соотношение (9), если известно, что каждую $F \in C_c(G/A_p)$ можно записать в виде

$$F(gA_p) = \int_{A_p} f(ga) da \quad (g \in G), \quad (10)$$

где $f \in C_c(G)$. Но это гарантировано леммой 1.8, так что предложение доказано.

Рассмотрим теперь функцию

$$D(H) = \prod_{\alpha \in P_+} \operatorname{sh} \frac{\alpha(H)}{2}, \quad H \in \mathfrak{h},$$

и обозначим через $\mathfrak{h}'_0$ множество таких элементов $H \in \mathfrak{h}_0$, что $D(H) \neq 0$. Если $H \in \mathfrak{h}'_0$ и $h = \exp H$, то, как показано в § 4 гл. VI, отображение $\xi: n \rightarrow h^{-1}nhn^{-1}$ является аналитическим диффеоморфизмом группы N на себя.

Предложение 1.13. Пусть $H \in \mathfrak{h}'_0$ и $h = \exp H$. Тогда

$$\int_N f(n) dn = \prod_{\alpha \in P_+} |1 - e^{-\alpha(H)}| \int_N f(h^{-1}nhn^{-1}) dn$$

для $f \in C_c(N)$.

Доказательство. Как показано в § 4 гл. VI, ξ есть композиция двух диффеоморфизмов $\xi = \psi \circ \varphi$, где

$$\psi: X \rightarrow \exp(-H) \exp(H+X)$$

отображает $\mathfrak{n}_0$ на N и

$$\varphi: n \rightarrow \operatorname{Ad}(n)H - H$$

отображает N на $\mathfrak{n}_0$. Было показано, что дифференциалы этих отображений равны

$$d\psi_X(Y) = dL_{\psi(X)} \circ \frac{1 - e^{-\operatorname{ad}(H+X)}}{\operatorname{ad}(H+X)}(Y) \quad (Y \in \mathfrak{n}_0), \quad (11)$$

$$d\varphi_n(dL_n X) = -\operatorname{Ad}(n) \operatorname{ad} H(X) \quad (X \in \mathfrak{n}_0). \quad (12)$$

Пусть dX — такая инвариантная мера на $\mathfrak{n}_0$, что $(dX)_0 = (dn)_e$ (как

дифференциальные формы). Тогда, согласно лемме 1.9, мера $\psi^*(dn)$ равна

$$\psi^*(dn) = |\det A| dX,$$

где A — эндоморфизм пространства $\mathfrak{n}_0$, заданный формулой

$$A: Y \rightarrow \frac{1 - e^{-\operatorname{ad}(H+X)}}{\operatorname{ad}(H+X)}(Y) \quad (Y \in \mathfrak{n}_0).$$

Абсолютное значение берется потому, что мы рассматриваем $\psi^*(dn)$ как меру, а не как дифференциальную форму. В доказательстве теоремы 4.7 гл. VI было установлено, что

$$\det A = \prod_{\alpha \in P_+} \frac{1 - e^{-\alpha(H)}}{\alpha(H)}. \quad (13)$$

Вычислим теперь меру $\varphi^*(dX)$. Из леммы 1.9 и формулы (12) получаем

$$\varphi^*(dX) = |\det B| dn,$$

где B — ограничение эндоморфизма $\operatorname{Ad}_G(n) \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_0} H$ на $\mathfrak{n}_0$. Поскольку $\det \operatorname{Ad}_G(n) = 1$, имеем

$$\det B = \prod_{\alpha \in P_+} \alpha(H).$$

Используя теперь равенство $\xi^* = \varphi^* \circ \psi^*$, получаем, что

$$\xi^*(dn) = \prod_{\alpha \in P_+} |1 - e^{-\alpha(H)}| dn.$$

Теперь лемма следует из формулы

$$\int_N (f \circ \xi)(n) \xi^*(dn) = \int_N f(n) dn,$$

которая является частным случаем формулы (2).

Предложение 1.14. Сохраним обозначения предложения 1.12, но предположим, что G имеет конечный центр. Пусть

$$D(a) = \prod_{\alpha \in P_+} \operatorname{sh} \frac{\alpha(H)}{2}, \quad \text{если } H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}, \quad a = \exp H.$$

Пусть $a \in A_{\mathfrak{p}}$ — такой элемент, что $D(a) \neq 0$. Тогда

$$c |D(a)| \int_{G/A_{\mathfrak{p}}} f(gag^{-1}) dg^* = e^{\rho(\log a)} \int_{K \times N} f(kank^{-1}) dk dn \quad (14)$$

для всех $f \in C_c(G)$. При этом $c = 2^r$ (где r — число элементов в P_+).

Доказательство. Мы должны сначала проверить, что интеграл в левой части определен. Обозначим через C носитель функции f и положим

$$C^* = \{g^* \in G/A_p \mid gag^{-1} \in C\}.$$

Если записать $g \in G$ в виде $g = k n a_1$ ($k \in K$, $n \in N$, $a_1 \in A$), то ясно, что $gag^{-1} \in C \iff k n a n^{-1} k^{-1} \in C \implies n a n^{-1} \in K C K$. Но поскольку G имеет конечный центр, группа K компактна. Значит, если $gag^{-1} \in C$, то $n a n^{-1}$ лежит в компактном подмножестве группы G . Если использовать следствие 4.8 гл. VI, то получим отсюда, что n лежит в компактном подмножестве группы N . Значит, kn лежит в компактном подмножестве группы G , так что C^* компактно. Итак, левая часть формулы (14) конечна.

Связывая между собой предложение 1.12 и предложение 1.13, получаем

$$\begin{aligned} \int_{G/A_p} f(gag^{-1}) dg^* &= \int_{K \times N} f(k n a n^{-1} k^{-1}) dk dn = \\ &= \prod_{\alpha \in P_+} |1 - e^{-\alpha(H)}|^{-1} \int_{K \times N} f(k a n k^{-1}) dk dn. \end{aligned}$$

Так как

$$\prod_{\alpha \in P_+} (1 - e^{-\alpha(H)}) = \prod_{\substack{\alpha \in P_+ \\ -\rho(\log a)}} (e^{\frac{1}{2}\alpha(H)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(H)}) e^{-\frac{1}{2}\alpha(H)} = cD(a) e^{-\rho(\log a)},$$

то предложение доказано.

Это предложение имеет в качестве следствия интересное функциональное уравнение.

Теорема 1.15 (Хариш - Чандра). Сохраняя обозначения предложения 1.11, допустим, что G имеет конечный центр. Обозначим через W группу Вейля пространства G/K (гл. VII, § 2). Если $s \in W$, $a = \exp H \in A_p$, то положим $a^s = \exp s(H)$. Пусть $f \in C_c(G)$ — такая функция, что $f(k g k^{-1}) = f(g)$ для всех $g \in G$, $k \in K$. Тогда функция

$$F_f(a) = e^{\rho(\log a)} \int_N f(an) dn \quad (a \in A_p)$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$F_f(a^s) = F_f(a) \quad (a \in A_p)$$

для каждого $s \in W$.

Доказательство. Для $g \in G$ положим $a^{g^*} = gag^{-1}$. Сначала предположим, что $D(a) \neq 0$. Тогда, в силу предложения 1.14, имеем

$$F_f(a) = c |D(a)| \int_{G/A_p} f(a^{g^*}) dg^*. \quad (15)$$

Докажем теперь, что правая часть этого соотношения инвариантна относительно преобразования $a \rightarrow a^s$. Пусть для этого $\bar{f}$ — произвольная функция из $C_c(G)$. Во-первых, из следствия 2.11 гл. VII вытекает, что функция

$$D(a)^2 = \prod_{\alpha, -\alpha \in P_+} \left| \operatorname{sh} \frac{\alpha(H)}{2} \right|$$

инвариантна относительно группы Вейля. Во-вторых, пусть $s \in W$. Выберем такой элемент $u \in K$, чтобы s и $\operatorname{Ad}_G(u)$ совпадали на $\mathfrak{h}_{p_0}$. Тогда $uA_p u^{-1} = A_p$, так что соответствие $\varphi: gA_p \rightarrow ugu^{-1}A_p$ есть корректно определенное отображение многообразия G/A_p на себя. Положим $f^u(g) = f(ugu^{-1})$ и, как в лемме 1.8,

$$\bar{f}(g^*) = \int_{A_p} f(ga) da.$$

Тогда соответствие $f \rightarrow \bar{f}$ отображает $C_c(G)$ на $C_c(G/A_p)$ и

$$\int_{G/A_p} \bar{f}(g^*) dg^* = \int_G f(g) dg = \int_G f^u(g) dg = \int_{G/A_p} \bar{f}^u(g^*) dg^*.$$

С другой стороны,

$$\bar{f}^u(g^*) = \int_{A_p} f(ugau^{-1}) da = \int_{A_p} f(ugu^{-1}a^s) da = \int_{A_p} f(ugu^{-1}a) da,$$

откуда $\bar{f}^u = (\bar{f})^{\varphi^{-1}}$. Тем самым доказано, что $\varphi^*(dg^*) = dg^*$. Используя теперь предложение 1.12, имеем

$$\begin{aligned} \int_{G/A_p} f((a^s)^{g^*}) dg^* &= \int_{G/A_p} f((a^s)^{(ugu^{-1})^*}) dg^* = \int_{G/A_p} f(ugag^{-1}u^{-1}) dg^* = \\ &= \int_{K \times N} f(uknan^{-1}k^{-1}u^{-1}) dk dn = \int_{K \times N} f(knan^{-1}k^{-1}) dk dn = \\ &= \int_{G/A_p} f(a^{g^*}) dg^*. \end{aligned}$$

Тем самым равенство $F_f(a^s) = F_f(a)$ доказано для всех a из плотного в A_p подмножества. Отсюда оно следует по непрерывности для всех $a \in A_p$.

4. Интегральные формулы для разложения Картана

Пусть $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$, G , K и A_p имеют те же значения, что в п. 3. Предположим, что G имеет конечный центр. Это предположение не является ограничением на пространство G/K , но из него следует, что группа K компактна. Как мы часто делали раньше, отождествим $\mathfrak{p}_0$ с касательным пространством $(G/K)_0$. Обозначим через dX и dg_K элементы объема в $\mathfrak{p}_0$ и G/K соответственно. Тогда $(dX)_0 = (dg_K)_0$. Поэтому из леммы 1.9 и теоремы 4.1 гл. IV получаем, что

$$\text{Exp}^*(dg_K) = \det \left(\sum_0^\infty \frac{T_X^n}{(2n+1)!} \right) dX.$$

Так как отображение Exp есть диффеоморфизм пространства $\mathfrak{p}_0$ на G/K , то из (2) следует, что

$$\int_{G/K} f(g_K) dg_K = \int_{\mathfrak{p}_0} f(\text{Exp } X) \det \left(\sum_0^\infty \frac{T_X^n}{(2n+1)!} \right) dX. \quad (16)$$

Обозначим через M централизатор подалгебры $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ в K и будем писать Ad вместо Ad_G . Рассмотрим отображение

$$\gamma: (kM, H) \rightarrow \text{Ad}(k)H \quad (k \in K, H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0})$$

многообразия $(K/M) \times \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ на $\mathfrak{p}_0$. Обозначим через $\mathfrak{m}_0$ алгебру Ли группы M и через $\mathfrak{l}_0$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{m}_0$ в $\mathfrak{k}_0$ (по отношению к форме Киллинга B алгебры $\mathfrak{g}_0$). Отождествим $\mathfrak{l}_0$ с касательным пространством $(K/M)_0$. Пусть $k_0 \in K$ и $H_0 \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$. Тогда, как показано в § 3 гл. VII,

$$d\gamma_{(k_0, M, H_0)}(d\tau(k_0)L, d\tau(H_0)H) = d\tau(\text{Ad}(k_0)H_0)\text{Ad}(k_0)([L, H_0] + H) \quad (17)$$

для $L \in \mathfrak{l}_0$, $H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$. Форма $-B$ индуцирует на $\mathfrak{l}_0$ положительно определенную метрику, которая порождает K -инвариантную метрику на K/M . Далее, B порождает евклидову метрику на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$. Обозначим через dk_M и dH римановы меры на K/M и $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$, индуцированные этими метриками. Тогда из леммы 1.9 выводим, что

$$\gamma^*(dX) = |\det A| dH dk_M,$$

где через A обозначено линейное отображение

$$A: (L, H) \rightarrow -\operatorname{ad} H_0(L) + H$$

пространства $\mathfrak{l}_0 \times \mathfrak{h}_{p_0}$ в $\mathfrak{p}_0$ и $|\det A|$ вычислен при помощи ортонормированных базисов. Для нахождения этого определителя мы используем лемму 3.6 гл. VI и принятые там обозначения. Поскольку

$$\operatorname{ad} H_0(X_\alpha + \theta X_\alpha) = \alpha(H_0)(X_\alpha - \theta X_\alpha), \quad (18)$$

эндоморфизм $\operatorname{ad} H_0$ отображает $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{l}_0$ в $\mathfrak{q}_0$, и в базисах $X_\alpha + \theta X_\alpha$ ($\alpha \in P_+$) и $X_\alpha - \theta X_\alpha$ ($\alpha \in P_+$) пространств $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{q}$ соответственно определитель отображения $\operatorname{ad} H_0$ равен $\prod_{\alpha \in P_+} \alpha(H_0)$. Пусть теперь $B_\tau(X, Y) = -B(X, \tau Y)$ и $\|X\|^2 = B_\tau(X, X)$. Используя ортогональность векторов X_α и X_β для $\alpha + \beta \neq 0$ и лемму 3.3 гл. VI, легко проверить, что

$$B_\tau(X_\alpha \pm \theta X_\alpha, X_\beta \pm \theta X_\beta) = 0 \quad \text{для } \alpha \neq \beta \text{ из } P_+,$$

$$\|X_\alpha + \theta X_\alpha\| = \|X_\alpha - \theta X_\alpha\|.$$

Значит, определитель отображения $\operatorname{ad} H_0: \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{q}$ по абсолютной величине равен

$$\left| \prod_{\alpha \in P_+} \alpha(H_0) \right|,$$

если вычислять его при помощи любых базисов, ортонормированных по отношению к B_τ . В частности, можно использовать базисы пространств $\mathfrak{l}_0$ и $\mathfrak{q}_0$, ортонормированные по отношению к $-B$ и B соответственно. Отсюда видно, что

$$\gamma^*(dX) = \left| \prod_{\alpha \in P_+} \alpha(H) \right| dk_M dH.$$

Множество точек в $\mathfrak{h}_{p_0}$, в которых $\prod_{\alpha \in P_+} \alpha(H)$ обращается в 0, является объединением конечного числа гиперплоскостей. Обозначим через $\mathfrak{h}'_{p_0}$ дополнение к этому множеству и положим $\mathfrak{p}'_0 = \gamma(K/M \times \mathfrak{h}'_{p_0})$. Обозначим через M' нормализатор подалгебры $\mathfrak{h}_{p_0}$ в K . Тогда факторгруппа M'/M есть группа Вейля W (гл. VII, § 2). Обозначим через ω порядок группы W .

Лемма 1.16. *Отображение γ является ω -листным регулярным отображением многообразия $K/M \times \mathfrak{h}'_{p_0}$ на $\mathfrak{p}'_0$.*

Доказательство. Регулярность отображения γ ясна из формул (17) и (18). Предположим теперь, что $k_i \in K$, $H_i \in \mathfrak{h}'_{p_0}$ ($i = 1, 2$) таковы, что $\operatorname{Ad}(k_1)H_1 = \operatorname{Ad}(k_2)H_2$. Пусть $k = k_2^{-1}k_1$, так что $\operatorname{Ad}(k)H_1 = H_2$. Тогда $\operatorname{Ad}(k)$ отображает централизатор

элемента H_1 в $\mathfrak{p}_0$ на централизатор элемента H_2 в $\mathfrak{p}_0$. В силу следствия 3.7 гл. VI, эти централизаторы совпадают с $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ и, следовательно, $k \in M'$. Таким образом, если k пробегает полный набор представителей группы M' по $\text{mod } M$, то $(k_1 k^{-1} M, \text{Ad}(k) H_1)$ пробегает подмножество $\gamma^{-1}(\text{Ad}(k_1) H_1)$. Тем самым лемма доказана.

Замечание. Если C — камера Вейля в $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$, то γ диффеоморфно отображает $K/M \times C$ на $\mathfrak{p}'_0$.

Из леммы 9.3 гл. VII ясно, что дополнение к $\mathfrak{p}'_0$ в $\mathfrak{p}_0$ имеет размерность, не превосходящую $\dim K/M + \dim \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} - 1 = \dim \mathfrak{p}_0 - 1$ и, значит, имеет меру 0 по отношению к dX . (В действительности размерность не превосходит $\dim \mathfrak{p}_0 - 2$; это можно доказать методом теоремы 3.3 гл. VII.) Поэтому

$$\int_{\mathfrak{p}_0} F(X) dX = \frac{1}{w} \int_{\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}} \left| \prod_{\alpha \in P_+} \alpha(H) \right| \int_{K/M} F(\text{Ad}(k) H) dk_M dH$$

для $F \in C_c(\mathfrak{p}_0)$. Нормируем меры dk на K и dg на G условиями

$$\int_K dk = 1, \quad \int_G f(g) dg = \int_{G/K} \left(\int_K f(gk) dk \right) dg_K \quad (f \in C_c(G)). \quad (19)$$

Тогда

$$\int_{K/M} F(\text{Ad}(k) H) dk_M = \text{vol}(K/M) \int_K F(\text{Ad}(k) H) dk,$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_G f(g) dg &= \int_{\mathfrak{p}_0} \left(\int_K f(\exp Xk) dk \right) \det \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T_X^n}{(2n+1)!} \right) dX = \\ &= \frac{1}{w} \text{vol}(K/M) \int_{\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}} \left| \prod_{\alpha \in P_+} \alpha(H) \right| \prod_{\alpha \in P_+} \frac{\text{sh } \alpha(H)}{\alpha(H)} \int_{K \times K} f(k_1 \exp Hk_1^{-1} k) dk_1 dk dH. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает следующее предложение.

Предложение 1.17. Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара некомпактного типа, и пусть G имеет конечный центр. Обозначим через dg_K элемент объема на G/K и нормируем меры dk и dg условиями (19). Тогда для $f \in C_c(G)$ имеем

$$\int_G f(g) dg = \frac{1}{w} \text{vol}(K/M) \int_{\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}} \left| \prod_{\alpha \in P_+} \text{sh } \alpha(H) \right| dH \int_{K \times K} f(k_1 \exp Hk_2) dk_1 dk_2.$$

Здесь через $\text{vol}(K/M)$ обозначен объем многообразия K/M в K -инвариантной метрике, индуцированной ограничением формы $-B$ на $\mathfrak{l}_0$. Через w обозначен порядок группы Вейля.

5. Компактный случай

Обозначим через $\mathfrak{g}$ комплексную оболочку алгебры $\mathfrak{g}_0$ и, как в гл. VII, обозначим через $\mathfrak{u}$ компактную вещественную форму $\mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{p}_0$. Если $\mathfrak{e}_0$ — некоторое подпространство в $\mathfrak{p}_0$, то будем обозначать через $\mathfrak{e}_*$ подпространство $i\mathfrak{e}_0$ в $i\mathfrak{p}_0$. Таким образом,

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_*$$

и $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*} = i\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ есть максимальное абелево подпространство в $\mathfrak{p}_*$. Пусть (U, K_1) — такая симметрическая пара, что U и K_1 имеют алгебры Ли $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{k}_0$ соответственно. Обозначим через M_1 централизатор пространства $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$ в K_1 . Обозначая Ad_U через Ad , рассмотрим, как в § 3 гл. VII, отображение

$$\beta: (kM_1, H) \rightarrow \text{Ad}(k)H$$

многообразия $K_1/M_1 \times \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$ на $\mathfrak{p}_*$ и отображение $\Phi = \text{Exp} \circ \beta$ многообразия $K_1/M_1 \times \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$ на U/K_1 . Обозначим через dk , du и dm инвариантные меры на K_1 , U и M_1 соответственно, нормированные условиями

$$\int_{K_1} dk = \int_U du = \int_{M_1} dm = 1. \quad (20)$$

На многообразиях U/K_1 , K_1/M_1 , $\mathfrak{p}_*$ и $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$ существуют инвариантные метрики, индуцированные формой Киллинга алгебры $\mathfrak{u}$. Обозначим соответствующие римановы меры через du_K , dk_M , dX и dH . Тогда, так же как в некомпактном случае, имеем

$$\text{Exp}^*(du_K) = \left| \det \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_X^n}{(2n+1)!} \right) \right| dX,$$

$$\beta^*(dX) = \left| \prod_{\alpha \in P_+} \alpha(H) \right| dk_M dH.$$

Отсюда следует, что

$$\Phi^*(du_K) = \left| \prod_{\alpha \in P_+} \sin \alpha(iH) \right| dk_M dH.$$

Группа $A_* = \exp \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_*}$ является замкнутой подгруппой в U (см. доказательство леммы 6.3 гл. V) и, значит, компактна. Обозначим через da инвариантную меру на A_* , нормированную усло-

вием $\int_{A_*} da = 1$. Тогда

$$dH = c \exp^* (da), \quad (21)$$

где c — константа. Если элемент $H \in \mathfrak{h}_{p*}$ обладает свойством $\exp H = e$, то $\alpha(H) \in 2\pi i \mathbb{Z}$ для всех $\alpha \in P_+$. Поэтому можно определить функцию $D_*(a)$ на A_* условием

$$D_*(\exp H) = \prod_{\alpha \in P_+} \sin \alpha(iH). \quad (22)$$

Тогда отображение

$$\psi: (kM_1, a) \rightarrow kaK_1 \quad (k \in K_1, a \in A_*)$$

многообразия $K_1/M_1 \times A_*$ на U/K_1 обладает следующим свойством:

$$\psi^*(du_K) = c |D_*(a)| dk_M da. \quad (23)$$

Обозначим через A'_* множество точек $a \in A_*$, для которых $D_*(a) \neq 0$, и определим $(U/K_1)_r$, как в § 3 гл. VII. Пространство $J = K_1 \cap A'_*$ компактно и дискретно и, значит, конечно. Обозначим через j число элементов множества J .

Лемма 1.18. *Отображение ψ является регулярным ωj -листным отображением многообразия $K_1/M_1 \times A'_*$ на $(U/K_1)_r$.*

Доказательство. Ввиду леммы 7.1 гл. VII остается только доказать, что каждая точка из $(U/K_1)_r$ имеет в точности ωj прообразов. Предположим, что $a_1, a_2 \in A'_*$, $k_1, k_2 \in K_1$ таковы, что $\psi(k_1M_1, a_1) = \psi(k_2M_1, a_2)$. Полагая $k = k_2^{-1}k_1$, имеем $ka_1 = a_2k'$ для подходящего $k' \in K_1$. Применяя инволютивный автоморфизм θ , исключим k' и получим, что $ka_1^2k^{-1} = a_2^2$. Из этого соотношения вытекает, что $\text{Ad}(k)Z_1 = Z_2$, если

$$Z_i = \{X \in \mathfrak{p}_* \mid \text{Ad}(a_i^2)X = X\}$$

для $i = 1, 2$. Пусть $H \in \mathfrak{h}_{p*}$, $X \in \mathfrak{p}_*$. Записывая

$$X = H_1 + \sum_{\alpha \in P_+} a_\alpha (X_\alpha - \theta X_\alpha) \quad (H_1 \in \mathfrak{h}_{p*}, a_\alpha \in \mathbb{C})$$

по лемме 3.6 гл. VI, имеем

$$\text{Ad}(\exp H)X = e^{\text{ad } H}X =$$

$$= H_1 + \sum_{\alpha \in P_+} a_\alpha \cos \alpha(iH) (X_\alpha - \theta X_\alpha) + \sum_{\alpha \in P_+} a_\alpha \sin \alpha(iH) (X_\alpha + \theta X_\alpha).$$

В частности, $\text{Ad}(a_i^2)X = X$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathfrak{h}_{p*}$,

так что

$$Z_i = \mathfrak{h}_{p*} \quad (i = 1, 2).$$

Отсюда следует, что k лежит в нормализаторе M'_1 пространства $\mathfrak{h}_{p*}$ в K_1 . Мы имеем

$$a_2 = (ka_1 k^{-1}) k k'^{-1}. \quad (24)$$

Пусть теперь $s \in W$ и $a \in A_*$. Если m — некоторый элемент из M'_1 , такой, что s и $\text{Ad}(m)$ совпадают на $\mathfrak{h}_{p*}$, то будем писать $a^s = mam^{-1}$. Ясно, что $|D_*(a^s)| = |D_*(a)|$. Пусть $b \in J$. Выберем такой $H \in \mathfrak{h}_{p*}$, что $b = \exp H$. Так как $b^2 = e$, то ясно, что $\alpha(H) \in \pi i \mathbb{Z}$ для всех $\alpha \in P_+$ и, следовательно, $|D_*(ab)| = |D_*(a)|$ для $a \in A_*$. Формула (24) показывает, что $a_2 = a_1^s b$, где $b \in J$, $s \in W$.

С другой стороны, если b пробегает множество J , а k пробегает полный набор представителей группы M'_1 по $\text{mod } M_1$, то элементы

$$(k_1 k^{-1} M_1, ka_1 k^{-1} b) \in K_1/M_1 \times A'_*$$

все различны. Значит, они составляют полный прообраз $\psi^{-1}(k_1 a_1 K_1)$. Тем самым лемма доказана.

Множество A'_* получается из A_* выкидыванием множества меры 0, а $(U/K_1)_r$ получается из U/K_1 выкидыванием множества меры 0. Поэтому из леммы 1.18 и формул (20) — (23) выводим, что

$$\int_{U/K_1} f(u_K) du_K = \frac{c}{\omega_j} \int_{A_*} |D_*(a)| da \int_{K_1/M_1} f(ka K_1) dk_M, \quad (25)$$

$$\text{vol}(U/K_1) \int_U F(u) du = \int_{U/K_1} \left(\int_{K_1} F(uk) dk \right) du_K,$$

$$\text{vol}(K_1/M_1) \int_{K_1} g(k) dk = \int_{K_1/M_1} \left(\int_{M_1} g(km) dm \right) dk_M,$$

если f , F и g непрерывны. Значит,

$$\begin{aligned} \text{vol}(U/K_1) \int_U F(u) du &= \int_{U/K_1} \left(\int_{K_1} F(uk_1) dk_1 \right) du_K = \\ &= \frac{c}{\omega_j} \int_{A_*} |D_*(a)| da \int_{K_1/M_1} \left(\int_{K_1} F(ka k_1) dk_1 \right) dk_M = \\ &= \frac{c}{\omega_j} \text{vol}(K_1/M_1) \int_{A_*} |D_*(a)| da \int_{K_1 \times K_1} F(k_1 a k_2) dk_1 dk_2. \end{aligned}$$

Полагая здесь $F \equiv 1$, получим соотношение

$$c \operatorname{vol} (K_1/M_1) = \omega j \operatorname{vol} (U/K_1)$$

и следующее предложение.

Предложение 1.19. Пусть (U, K_1) — риманова симметрическая пара компактного типа. Обозначим через du , dk и da инвариантные меры на U , K_1 и A_* соответственно, нормированные условиями

$$\int_U du = \int_{K_1} dk = \int_{A_*} da = 1.$$

Тогда

$$\int_{A_*} |D_*(a)| da \int_U F(u) du = \int_{A_*} |D_*(a)| da \int_{K_1} \int_{K_1} F(k_1 a k_2) dk_1 dk_2$$

для всех $F \in C(U)$.

§ 2. Инвариантные дифференциальные операторы

1. Общие сведения. Оператор Лапласа — Бельтрами

Пусть S — топологическое пространство и $f: S \rightarrow \mathbf{R}$ — непрерывная функция на S , т. е. $f \in C(S)$. Пусть Φ — гомеоморфизм пространства S на себя. Как в гл. 1, § 3, п. 2, мы часто будем писать f^Φ для обозначения композиции $f \circ \Phi^{-1}$. Если A — отображение пространства $C(S)$ в себя, то через A^Φ будет обозначаться отображение $f \rightarrow (A f^{\Phi^{-1}})^\Phi$ пространства $C(S)$ в себя. Функция f (отображение A) называется инвариантной относительно Φ , если $f^\Phi = f$ ($A^\Phi = A$). Легко проверить, что $f^{\Phi\Psi} = (f^\Psi)^\Phi$, $A^{\Phi\Psi} = (A^\Psi)^\Phi$, если Φ и Ψ — два произвольных гомеоморфизма пространства S . Значение функции Af в точке $p \in S$ часто будет обозначаться через $[Af](p)$.

Пусть M — многообразие размерности m . Если (φ, U) — локальная карта на M и $f \in C^\infty(M)$, то мы иногда будем обозначать через f^* функцию $f \circ \varphi^{-1}$, определенную на $\varphi(U)$. Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ — некоторый m -набор индексов $\alpha_i \geq 0$, то положим $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_m^{\alpha_m}$, где ∂_i означает частное дифференцирование $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ($1 \leq i \leq m$).

Определение. Линейное преобразование $D: C_c^\infty(M) \rightarrow C_c^\infty(M)$ называется дифференциальным оператором на M , если выполняется следующее условие. Для каждой $p \in M$ существует такая локальная карта (φ, U) , покрывающая p , и такая

конечная система функций $a_\alpha \in C^\infty(U)$, что для каждой $f \in C_c^\infty(M)$ с носителем, содержащимся в U , имеем

$$[Df](q) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(q) [D^{\alpha} f^*](\varphi(q)), \quad \text{если } q \in U,$$

$$[Df](q) = 0, \quad \text{если } q \notin U.$$

Ясно, что векторное поле на M является дифференциальным оператором на M . Функцию $f \in C^\infty(M)$ также можно рассматривать как дифференциальный оператор $F \rightarrow fF$ ($F \in C_c^\infty(M)$) на M .

Дифференциальный оператор D на M носит *локальный характер* в том смысле, что

$$\text{носитель } Df \subset \text{носитель } f \quad (1)$$

для каждой функции $f \in C_c^\infty(M)$. Кроме того, D непрерывен в топологии пространства $C_c^\infty(M)$, основанной на равномерной сходимости последовательностей функций и всех их производных¹⁾ (Шварц [1], I, стр. 67). Дифференциальный оператор D можно следующим образом продолжить до линейного отображения $D: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$. Пусть $f \in C^\infty(M)$ и $p \in M$. Выберем такую функцию $f_c \in C_c^\infty(M)$, что $f = f_c$ в окрестности точки p , и положим $[Df](p) = [Df_c](p)$. Тогда (1) имеет место для всех $f \in C^\infty(M)$. Если Φ — диффеоморфизм многообразия M , то D^Φ , так же, как D , является дифференциальным оператором, и отображение $D \rightarrow D^\Phi$ есть автоморфизм алгебры всех дифференциальных операторов на M .

На псевдоримановом многообразии M всегда существует заслуживающий особого интереса дифференциальный оператор, так называемый *оператор Лапласа — Бельтрами*, который мы сейчас определим. Обозначим через g псевдориманову структуру на M . Пусть $\varphi: q \rightarrow (x_1(q), \dots, x_m(q))$ — система координат, действующая в открытом множестве $U \subset M$. Как обычно, определим функции g_{ij} , g^{ij} , $\bar{g}$ на U формулами

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right), \quad \sum_j g_{ij} g^{jk} = \delta_{ik},$$

$$\bar{g} = |\det(g_{ij})|.$$

Каждая функция $f \in C^\infty(M)$ порождает векторное поле $\text{grad } f$ (градиент функции f) на M , ограничение которого на U задается

¹⁾ Можно показать (см., например, Хелгасон [3], стр. 242), что эти два свойства характеризуют дифференциальные операторы.

формулой

$$\text{grad } f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (2)$$

Действительно, очевидно, что выражение в правой части не зависит от выбора использованной системы координат. С другой стороны, если X — векторное поле на M , то дивергенция поля X — это функция на M , которая на U задается формулой

$$\text{div } X = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{g} X_i), \quad (3)$$

где $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ на U . Снова можно показать, что правая часть инвариантна относительно замены координат. Оператор Лапласа — Бельтрами Δ определяется формулой

$$\Delta f = \text{div grad } f \quad (f \in C^\infty(M)).$$

В локальных координатах имеем

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_k \partial_k \left(\sum_i g^{ik} \sqrt{g} \partial_i f \right), \quad (4)$$

откуда видно, что Δ — дифференциальный оператор на M .

Выражения для $\text{grad } f$ и $\text{div } X$, не использующие координат, см. в упражнениях к настоящей главе.

Предложение 2.1. Пусть M — псевдориманово многообразие, Δ — оператор Лапласа — Бельтрами на M .

(i) Оператор Δ симметричен, т. е.

$$\int_M u(x) [\Delta v](x) dx = \int_M [\Delta u](x) v(x) dx \quad (u \in C_c^\infty(M), v \in C^\infty(M)),$$

если dx — риманова мера на M .

(ii) Пусть Φ — диффеоморфизм многообразия M . Тогда оператор Δ инвариантен относительно Φ в том и только том случае, когда Φ является изометрией.

Доказательство. (i) Пусть X — любое векторное поле на M . Тогда, в силу определений (2), (3), имеем

$$\text{div}(uX) = u(\text{div } X) + Xu,$$

$$\text{grad } u(v) = \text{grad } v(u).$$

Следовательно,

$$u\Delta v - v\Delta u = \text{div}(u \text{ grad } v) - \text{grad } v(u) - \text{div}(v \text{ grad } u) + \text{grad } u(v),$$

откуда

$$u\Delta v - v\Delta u = \operatorname{div} (u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u).$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\int_M (\operatorname{div} X) dx = 0$$

для любого векторного поля X на M , равного нулю вне компактного подмножества. Используя разбиение единицы, можно даже предположить, что X равно 0 вне координатной окрестности U .

Записывая $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ на U , получаем

$$\int_M (\operatorname{div} X) dx = \int \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (V \sqrt{g} X_i) dx_1 \dots dx_m = 0,$$

откуда следует (i).

Докажем (ii). Пусть $p \in M$, и пусть (ψ, V) — локальная карта, покрывающая p . Тогда $(\psi \circ \Phi^{-1}, \Phi(V))$ есть локальная карта, покрывающая $\Phi(p)$. Для $x \in V$ положим $y = \Phi(x)$ и

$$\psi(x) = (x_1, \dots, x_m) \quad (x \in V),$$

$$(\psi \circ \Phi^{-1})(y) = (y_1, \dots, y_m) \quad (y \in \Phi(V)).$$

Тогда

$$x_i(x) = y_i(\Phi(x)), \quad d\Phi_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_{\Phi(x)} \quad (1 \leq i \leq m).$$

Для каждой функции $f \in C^\infty(M)$ имеем

$$\begin{aligned} [(\Delta f)^{\Phi^{-1}}](x) &= [\Delta f](\Phi(x)) = \frac{1}{V \sqrt{g}(y)} \sum_k \frac{\partial}{\partial y_k} \times \\ &\times \left(\sum_i g^{ik}(y) V \sqrt{g}(y) \frac{\partial f^*}{\partial y_i} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$[\Delta f^{\Phi^{-1}}](x) = \frac{1}{V \sqrt{g}(x)} \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_i g^{ik}(x) V \sqrt{g}(x) \frac{\partial (f \circ \Phi)^*}{\partial x_i} \right). \quad (6)$$

В силу выбора координат,

$$\frac{\partial f^*}{\partial y_i} = \frac{\partial (f \circ \Phi)^*}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 f^*}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 (f \circ \Phi)^*}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1 \leq i, j \leq m).$$

Если теперь Φ является изометрией, то $g_{ij}(x) = g_{ij}(y)$ для всех $1 \leq i, j \leq m$. Таким образом, правые части равенств (5) и (6)

совпадают и $\Delta^\Phi = \Delta$. С другой стороны, если выражения (5) и (6) равны между собой, то, приравнявая коэффициенты, получаем $g^{ij}(x) = g^{ij}(y)$, откуда видно, что Φ — изометрия.

2. Инвариантные дифференциальные операторы на редуктивных факторпространствах

Пусть G — связная группа Ли и H — замкнутая подгруппа. Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответствующие алгебры Ли, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Мы опишем в терминах алгебр Ли множество $D(G/H)$ дифференциальных операторов на G/H , инвариантных относительно действия группы G . Говоря точно, дифференциальный оператор D на G/H принадлежит к $D(G/H)$ тогда и только тогда, когда $D^{\tau(g)} = D$ для всех $g \in G$. Для дальнейшего удобно наложить на факторпространство G/H некоторые условия и рассматривать только так называемые *редуктивные факторпространства*, которые мы сейчас определим.

Определение. Факторпространство G/H называется *редуктивным*, если существует такое подпространство $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$, что $\mathfrak{h} + \mathfrak{m} = \mathfrak{g}$ (прямая сумма) и $\text{Ad}_G(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$.

Если (G, H) — симметрическая пара, то факторпространство G/H редуктивно, так как в качестве подпространства $\mathfrak{m}$ можно взять собственное подпространство инволютивного автоморфизма алгебры $\mathfrak{g}$, отвечающее собственному значению -1 .

Если H компактна или, в более общем случае, если $\text{Ad}_G(H)$ компактна, то пространство G/H редуктивно. Чтобы убедиться в этом, нужно рассмотреть на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ положительно определенную билинейную форму, инвариантную относительно $\text{Ad}_G(H)$, и взять в качестве $\mathfrak{m}$ ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$.

Редуктивные факторпространства изучались Номидзу [2, 3]. Они образуют естественный класс пространств с точки зрения дифференциальной геометрии, так как, по существу, их можно охарактеризовать тем свойством, что на них существует инвариантная аффинная связность. Пример нередуктивного факторпространства см. в упражнениях к этой главе.

Пусть G/H — редуктивное факторпространство. Как обычно, обозначим через π естественное отображение группы G на G/H и положим $o = \pi(e)$. Обозначим через $C_0^\infty(G)$ множество функций класса C^∞ на G , постоянных на каждом смежном классе gH . Тогда отображение $f \rightarrow \tilde{f}$, где $\tilde{f} = f \circ \pi$, является изоморфизмом алгебры $C^\infty(G/H)$ на $C_0^\infty(G)$. Будем писать $D(G)$ вместо $D(G/e)$ и обозначим через $D_0(G)$ множество операторов из $D(G)$, инвариантных относительно всех правых сдвигов на элементы подгруппы H . Другими словами, дифференциальный оператор D

на G принадлежит $\mathbf{D}_0(G)$ тогда и только тогда, когда $D^{L(g)} = D$ и $D^{R(h)} = D$ для всех $g \in G$ и всех $h \in H$. Каждый оператор $D \in \mathbf{D}_0(G)$ оставляет инвариантным подпространство $C_0^\infty(G)$. Обозначим через D_0 его ограничение на $C_0^\infty(G)$.

Лемма 2.2. Алгебра $\mathbf{D}(G/H)$ изоморфна алгебре всех ограничений $\{D_0 \mid D \in \mathbf{D}_0(G)\}$.

Доказательство. С каждым $D \in \mathbf{D}_0(G)$ свяжем линейное преобразование E пространства $C^\infty(G/H)$, определенное требованием $(\widetilde{E}f) = D_0\tilde{f}$ для $f \in C^\infty(G/H)$. Разумеется, E зависит только от ограничения D_0 . Докажем, что это отображение $\mu: D_0 \rightarrow E$ является изоморфизмом на $\mathbf{D}(G/H)$. Прежде всего, если $g \in G$, то

$$(\widetilde{E^{\tau(g)}f}) = ((\widetilde{E}f)^{\tau(g^{-1})})^{\tau(g)} = (\widetilde{E}f^{\tau(g^{-1})})^{L(g)} = (D_0\tilde{f}^{L(g^{-1})})^{L(g)},$$

откуда $E^{\tau(g)} = E$. Докажем, что E — дифференциальный оператор. Пусть U_m и U_h — такие открытые окрестности точки 0 в $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно, что отображение $(X, T) \rightarrow \exp X \exp T$ является диффеоморфизмом многообразия $U_m \times U_h$ на открытую окрестность точки e в G и что π взаимно однозначно на множестве $\exp U_m$ (леммы 2.4 и 4.1 гл. II). Пусть $X_1, \dots, X_r$ — базис пространства $\mathfrak{m}$, $X_{r+1}, \dots, X_n$ — базис алгебры $\mathfrak{h}$. Тогда отображение

$$\exp(x_1X_1 + \dots + x_rX_r) \exp(x_{r+1}X_{r+1} + \dots + x_nX_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n) \quad (7)$$

есть система координат в окрестности $\exp U_m \exp U_h$ точки e в G , а отображение

$$\pi(\exp(x_1X_1 + \dots + x_rX_r)) \rightarrow (x_1, \dots, x_r) \quad (8)$$

есть система координат в окрестности $\pi(\exp U_m)$ точки o в G/H . Если выразить D в координатах системы (7), то ясно, что $\tilde{f}$ и $D\tilde{f}$ не зависят от $(x_{r+1}, \dots, x_n)$. Так как $(\widetilde{E}f) = D\tilde{f}$, то E можно выразить (на $\pi(\exp U_m)$) при помощи частных производных по переменным $x_1, \dots, x_r$. Итак, $E \in \mathbf{D}(G/H)$. Очевидно, что отображение μ взаимно однозначно, линейно и сохраняет умножение. Для доказательства того, что образ μ совпадает со всем $\mathbf{D}(G/H)$, возьмем $E \in \mathbf{D}(G/H)$. Тогда существует такой многочлен P от r неизвестных, что

$$[Ef](o) = [P(\partial_1, \dots, \partial_r)\tilde{f}(\exp(x_1X_1 + \dots + x_rX_r))](0) \quad (9)$$

для $f \in C^\infty(G/H)$. Поскольку $E^{\tau(g)} = E$ для $g \in G$, то

$$[Ef](p) = [P(\partial_1, \dots, \partial_r) \tilde{f}(g \exp(x_1 X_1 + \dots + x_r X_r))] (0), \quad (10)$$

где $p = g \cdot o$. Если $h \in H$, то

$$\begin{aligned} [Ef](o) &= [Ef^{\tau(h^{-1})}](o) = \\ &= [P(\partial_1, \dots, \partial_r) \tilde{f}(h \exp(x_1 X_1 + \dots + x_r X_r) h^{-1})] (0) = \\ &= [P(\partial_1, \dots, \partial_r) \tilde{f}(\exp(\text{Ad}(h)(x_1 X_1 + \dots + x_r X_r)))] (0). \end{aligned}$$

Сравнивая это с формулой (9), получаем, что

$$P(X_1, \dots, X_r) = P(\text{Ad}(h) X_1, \dots, \text{Ad}(h) X_r) \quad (h \in H; X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{m}), \quad (11)$$

т. е. многочлен P инвариантен относительно $\text{Ad}_G(H)$. Для $g \in G$ отображение

$$g \exp(x_1 X_1 + \dots + x_n X_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$$

является системой координат, действующей в окрестности точки $g \in G$. Оператор D , определенный формулой

$$[DF](g) = [P(\partial_1, \dots, \partial_r) F(g \exp(x_1 X_1 + \dots + x_n X_n))] (0) \quad (12)$$

для $F \in C^\infty(G)$, есть дифференциальный оператор на G . Если $x \in G$, то

$$\begin{aligned} [D^{L(x)} F](g) &= [DF^{L(x^{-1})}](x^{-1}g) = \\ &= [P(\partial_1, \dots, \partial_r) F^{L(x^{-1})}(x^{-1}g \exp(x_1 X_1 + \dots + x_n X_n))] (0), \end{aligned}$$

откуда $D^{L(x)} = D$. Используя равенство (11), получим таким же способом, что $D^{R(h)} = D$ для $h \in H$. Наконец, из соотношений (10) и (12) имеем $(\widetilde{Ef}) = D\tilde{f}$, и доказательство леммы закончено.

Каждый $X \in \mathfrak{g}$ однозначно определяет левоинвариантное векторное поле на G , значение которого в точке e равно X . Это векторное поле также будет обозначаться через X . Тогда, если $g \in G$, то $\text{Ad}(g)X$ как векторное поле совпадает с $(X^{L(g)})^{R(g^{-1})}$. Далее,

$$[Xf](g) = \left[\frac{d}{dt} f(g \exp tX) \right] (0). \quad (13)$$

Обобщая это равенство, формула (10) показывает (для $H = e$), что каждый $D \in \mathcal{D}(G)$ можно записать в виде

$$[Df](g) = [P(\partial_1, \dots, \partial_n) f(g \exp(x_1 X_1 + \dots + x_n X_n))] (0). \quad (14)$$

Если использовать формулу (12) из § 1 гл. II, то получим, что D является линейной комбинацией $\sum_M a_M X(M)$ ($a_M \in R$). Значит, определение алгебры $D(G)$, которым мы сейчас пользуемся, совпадает с определением, которое было дано в § 1 гл. II.

Пусть V — векторное пространство конечной размерности над полем K . Обозначим через $T(V)$ тензорную алгебру над V и через I — двусторонний идеал в $T(V)$, порожденный множеством всех элементов вида $X \otimes Y - Y \otimes X$ ($X, Y \in V$). Факторалгебра $S(V) = T(V)/I$ называется *симметрической алгеброй* над V . Если выбрать базис $X_1, \dots, X_n$ пространства V , то $S(V)$ можно отождествить с алгеброй многочленов от элементов этого базиса. Каждый эндоморфизм A пространства V индуцирует гомоморфизм $P \rightarrow A \cdot P$ алгебры $S(V)$ в себя, определяемый формулой $(A \cdot P)(X_1, \dots, X_n) = P(AX_1, \dots, AX_n)$. Этот гомоморфизм не зависит от выбора базиса в V , что легко понять, если рассмотреть P как функцию на пространстве $V^\wedge$, двойственном к V . Имеем также $A_1 A_2 \cdot P = A_1 \cdot (A_2 \cdot P)$, если A_1 и A_2 — два эндоморфизма пространства V . Многочлен P называется *инвариантным* относительно A , если $A \cdot P = P$.

Если X и Y — два элемента из $\mathfrak{g}$, то обозначим через XY их произведение в $S(\mathfrak{g})$ и через $X \cdot Y$ — их произведение в $D(G)$ (или в универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$). Согласно предложению 1.9 (а) гл. II, существует такое линейное взаимно однозначное отображение λ (см. Хариш-Чандра [4], стр. 192) алгебры $S(\mathfrak{g})$ на $D(G)$, что

$$\lambda(X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}) = m_1! \dots m_n! X(M),$$

где через M обозначен n -набор $(m_1, \dots, m_n)$ и $X(M)$ — коэффициент при $t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}$ в выражении

$$\frac{1}{(m_1 + \dots + m_n)!} (t_1 X_1 + \dots + t_n X_n)^{m_1 + \dots + m_n}.$$

Тогда

$$\lambda(Y_1 Y_2 \dots Y_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} Y_{\sigma(1)} \cdot Y_{\sigma(2)} \dots Y_{\sigma(p)}, \quad (15)$$

где $Y_1, \dots, Y_p$ — произвольные элементы базиса $X_1, \dots, X_n$ алгебры $\mathfrak{g}$ и σ пробегает группу всех подстановок множества $\{1, 2, \dots, p\}$. Ясно, что соотношение (15) останется верным, если заменить Y_j любыми линейными комбинациями $\sum_i a_{ij} X_i$. Таким образом, (15) имеет место для произвольных элементов $Y_1, \dots, Y_p$ алгебры $\mathfrak{g}$. В частности, λ не зависит от выбора базиса в $\mathfrak{g}$. Допуская некоторую вольность, мы будем называть отображение

λ симметризацией. Сравнивая формулу (14) с формулой (12) из § 1 гл. II, получим

$$[\lambda(P)f](g) = [P(\partial_1, \dots, \partial_n)f(g \exp(x_1 X_1 + \dots + x_n X_n))](0) \quad (16)$$

для всех $P \in S(\mathfrak{g})$, $f \in C^\infty(G)$.

Для каждого $g \in G$ автоморфизм $\text{Ad}(g)$ алгебры $\mathfrak{g}$ единственным образом продолжается до автоморфизма алгебры $\mathbf{D}(G)$. Обозначим это продолжение также через $\text{Ad}(g)$. Поскольку $\text{Ad}(g)X = (X^{L(g)})^{R(g^{-1})} = X^{R(g^{-1})}$, мы имеем

$$\text{Ad}(g)D = D^{R(g^{-1})} \quad (D \in \mathbf{D}(G)). \quad (17)$$

Для каждого $X \in \mathfrak{g}$ отображение $D \rightarrow X \cdot D - D \cdot X$ есть дифференцирование алгебры $\mathbf{D}(G)$, которое будет обозначаться через $\text{ad } X$. В базисе $X_1, \dots, X_n$ алгебры $\mathfrak{g}$ оператор D можно записать в виде линейной комбинации $\sum a_{e_1 \dots e_n} X_1^{e_1} \cdot X_2^{e_2} \dots X_n^{e_n}$ с постоянными коэффициентами. Наибольшее целое число $e_1 + \dots + e_n$, для которого $a_{e_1 \dots e_n} \neq 0$, называется *порядком* (или *степенью*) оператора D . Порядок не зависит от выбора базиса. Ясно, что порядок оператора $\text{ad } X(D)$ не превосходит порядка оператора D . Следовательно, все операторы $(\text{ad } X)^n(D)$ ($n = 0, 1, \dots$) лежат в конечномерном подпространстве алгебры $\mathbf{D}(G)$, и можно определить $e^{\text{ad } X}(D)$ при помощи ряда

$$e^{\text{ad } X}(D) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\text{ad } X)^n(D).$$

Так как $\text{ad } X$ — дифференцирование, то для $D_1, D_2 \in \mathbf{D}(G)$ имеем

$$(\text{ad } X)^k(D_1 \cdot D_2) = \sum_{0 \leq i, j, i+j=k} \frac{k!}{i!j!} (\text{ad } X)^i(D_1) \cdot (\text{ad } X)^j(D_2),$$

откуда

$$e^{\text{ad } X}(D_1 \cdot D_2) = e^{\text{ad } X}(D_1) \cdot e^{\text{ad } X}(D_2).$$

Аutomорфизмы $\text{Ad}(\exp X)$ и $e^{\text{ad } X}$ алгебры $\mathbf{D}(G)$ совпадают на $\mathfrak{g}$. Из упомянутой выше единственности следует, что

$$\text{Ad}(\exp X)D = e^{\text{ad } X}(D) \quad (X \in \mathfrak{g}, D \in \mathbf{D}(G)). \quad (18)$$

Лемма 2.3. Пусть $X \in \mathfrak{g}$, $D \in \mathbf{D}(G)$. Тогда $D \cdot X = X \cdot D$ в том и только том случае, когда $D^{R(\exp tX)} = D$ для всех $t \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Операторы $e^{\text{ad } (tX)}D$ ($t \in \mathbf{R}$) лежат в конечномерном подпространстве алгебры $\mathbf{D}(G)$ и

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (e^{\text{ad } (tX)}D - D) = \text{ad } X(D).$$

Если связать это соотношение с (17) и (18), то получится наше утверждение.

Определение. Центр алгебры $\mathbf{D}(G)$ будет обозначаться через $\mathbf{Z}(G)$. Далее, обозначим через $I(\mathfrak{g})$ и $S_0(\mathfrak{g})$ множества многочленов $P \in S(\mathfrak{g})$, инвариантных относительно $\text{Ad}(G)$ и $\text{Ad}_G(H)$ соответственно.

Лемма 2.4. Обозначим через λ симметризацию $S(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbf{D}(G)$. Тогда

$$\mathbf{Z}(G) = \{D \in \mathbf{D}(G) \mid \text{Ad}(g)D = D \text{ для } g \in G\},$$

$$\lambda(I(\mathfrak{g})) = \mathbf{Z}(G), \quad \lambda(S_0(\mathfrak{g})) = \mathbf{D}_0(G).$$

Доказательство. Первое соотношение очевидно из леммы 2.3 и формулы (17). Для доказательства остальных соотношений нужно только заметить, что $\lambda \circ \text{Ad}(g) = \text{Ad}(g) \circ \lambda$ ($g \in G$).

Лемма 2.5. Обозначим через $\mathbf{D}(G) \mathfrak{h}$ множество всех вещественных линейных комбинаций элементов вида DT , где $D \in \mathbf{D}(G)$, $T \in \mathfrak{h}$. Тогда

$$\mathbf{D}(G) = \mathbf{D}(G) \mathfrak{h} + \lambda(S(\mathfrak{m})) \quad (\text{прямая сумма}).$$

Доказательство. Докажем сначала по индукции, что для каждого $P \in S(\mathfrak{g})$ существует такой $Q \in S(\mathfrak{m})$, что $\lambda(P - Q) \in \mathbf{D}(G) \mathfrak{h}$. Утверждение очевидно, если P имеет степень 1. Допустим, что оно верно для всех $P \in S(\mathfrak{g})$ степени меньше d . Докажем его для многочлена P степени d . Можно предположить, что $P = X_1^{e_1} \dots X_n^{e_n}$, где $X_1, \dots, X_n$ — такой базис алгебры $\mathfrak{g}$, что $X_i \in \mathfrak{m}$ для $1 \leq i \leq r$ и $X_i \in \mathfrak{h}$ для $r+1 \leq i \leq n$. Если $e_{r+1} + \dots + e_n = 0$, то достаточно положить $Q = P$. Если $e_{r+1} + \dots + e_n > 0$, то $\lambda(P)$ есть линейная комбинация членов вида $X_{\alpha_1} \cdot X_{\alpha_2} \cdot \dots \cdot X_{\alpha_d}$, где $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{h}$ для некоторого i . Обозначим через $S^e(\mathfrak{g})$ множество однородных многочленов степени e из $S(\mathfrak{g})$ и положим $\mathbf{D}^d(G) = \lambda\left(\sum_{e=0}^d S^e(\mathfrak{g})\right)$.

Тогда

$$(X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_d}) - (X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_{i-1}} \cdot X_{\alpha_{i+1}} \dots X_{\alpha_d} \cdot X_{\alpha_i}) \in \mathbf{D}^{d-1}(G),$$

откуда

$$\lambda(P) - D \in \mathbf{D}(G) \mathfrak{h}$$

для подходящего $D \in \mathbf{D}^{d-1}(G)$. В силу предположения индукции, существует такой $Q \in S(\mathfrak{m})$, что $\lambda(Q) - D \in \mathbf{D}(G) \mathfrak{h}$. Значит, $\lambda(P - Q) \in \mathbf{D}(G) \mathfrak{h}$, что нам и нужно.

Чтобы доказать, что сумма прямая, возьмем $P \in S(\mathfrak{m})$, $P \neq 0$.

Существует такая функция $f^*(x_1, \dots, x_r)$ класса C^∞ , что

$$[P(\partial_1, \dots, \partial_r) f^*](0) \neq 0.$$

Используя систему координат (8), легко получить, что существует такая функция $f \in C^\infty(G/H)$, что $f(\pi(\exp(x_1 X_1 + \dots + x_r X_r))) = f^*(x_1, \dots, x_r)$ для всех достаточно малых x_i . Из равенства (16) следует, что

$$[\lambda(P)(f \circ \pi)](e) = [P(\partial_1, \dots, \partial_r) f^*](0) \neq 0.$$

Но поскольку $f \circ \pi \in C_0^\infty(G)$, ясно, что

$$[D(f \circ \pi)](e) = 0 \text{ для каждого } D \in \mathbf{D}(G) \setminus \mathfrak{h}.$$

Отсюда вытекает, что $\lambda(S(\mathfrak{m})) \cap \mathbf{D}(G) \setminus \mathfrak{h} = \{0\}$, и лемма доказана.

Следствие 2.6. Обозначим через $I(\mathfrak{m})$ множество многочленов из $S(\mathfrak{m})$, инвариантных относительно $\text{Ad}_G(H)$. Тогда

$$\mathbf{D}_0(G) = (\mathbf{D}(G) \setminus \mathfrak{h}) \cap \mathbf{D}_0(G) + \lambda(I(\mathfrak{m})) \text{ (прямая сумма)}.$$

Действительно, для каждого $h \in H$ автоморфизм $\text{Ad}_G(h)$ алгебры $\mathbf{D}(G)$ оставляет подпространства $\mathbf{D}(G) \setminus \mathfrak{h}$, $\lambda(S(\mathfrak{m}))$ и $\mathbf{D}_0(G)$ инвариантным. Так как $\mathbf{D}_0(G) \cap \lambda(S(\mathfrak{m})) = \lambda(I(\mathfrak{m}))$ по лемме 2.4, то получаем следствие.

Определим теперь отображение алгебры $I(\mathfrak{m})$ в $\mathbf{D}(G/H)$ следующим образом. Если $P \in I(\mathfrak{m})$, то $\lambda(P) \in \mathbf{D}_0(G)$, и ограничение оператора $\lambda(P)$ на $C_0^\infty(G)$ порождает по лемме 2.2 однозначно определенный оператор $D_P \in \mathbf{D}(G/H)$. Отображение $P \rightarrow D_P$ линейно. Оно взаимно однозначно, так как в процессе доказательства леммы 2.5 было показано, что для $P \neq 0$ существует такая функция $F \in C_0^\infty(G)$, что $[\lambda(P)F](e) \neq 0$. Наконец, наше отображение отображает $I(\mathfrak{m})$ на $\mathbf{D}(G/H)$, так как следствие 2.6 показывает, что для каждого $D \in \mathbf{D}_0(G)$ существует такой $P \in I(\mathfrak{m})$, что D и $\lambda(P)$ имеют одинаковые ограничения на $C_0^\infty(G)$. Поэтому можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2.7. Пусть G/H — редуктивное факторпространство, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, где $\text{Ad}_G(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Пусть $X_1, \dots, X_r$ — базис пространства $\mathfrak{m}$, и пусть $\tilde{f} = f \circ \pi$ для $f \in C^\infty(G/H)$. Существует такое взаимно однозначное отображение $Q \rightarrow D_Q$ алгебры $I(\mathfrak{m})$ на $\mathbf{D}(G/H)$, что

$$[D_Q f](p) = [Q(\partial_1, \dots, \partial_r) \tilde{f}(g \exp(x_1 X_1 + \dots + x_r X_r))](0),$$

где $p = \pi(g)$. Оператор D_Q получается из $Q(X_1, \dots, X_r)$ при помощи симметризации (и отображения μ из леммы 2.2).

В случае, когда (G, H) — риманова симметрическая пара, в § 6 будет дано более точное описание алгебры $\mathbf{D}(G/H)$.

Замечание. Если $P = X_1^{e_1} \dots X_n^{e_n}$, то из равенства (15) видно, что

$$\lambda(P) = X_1^{e_1} \cdot X_2^{e_2} \cdot \dots \cdot X_n^{e_n} + \lambda(Q),$$

где Q имеет степень, меньшую чем степень P . Отсюда следует, что если $P_1, P_2 \in I(\mathfrak{m})$, то

$$D_{P_1 P_2} = D_{P_1} D_{P_2} + D_Q,$$

где

$$\text{степень } Q < \text{степень } P_1 + \text{степень } P_2.$$

Следствие 2.8. Если $I(\mathfrak{m})$ имеет конечную систему образующих $P_1, \dots, P_l$ и если положить $D_i = D_{P_i}$, то каждый $D \in D(G/H)$ можно выразить в виде

$$D = \sum a_{n_1 \dots n_l} D_1^{n_1} \dots D_l^{n_l} \quad (a_{n_1 \dots n_l} \in R).$$

Действительно, пусть $D = D_P$, где $P \in I(\mathfrak{m})$. Тогда P можно записать в виде

$$P = \sum b_{n_1 \dots n_l} P_1^{n_1} \dots P_l^{n_l} \quad (b_{n_1 \dots n_l} \in R).$$

Из предыдущего замечания видно, что

$$D_P - \sum b_{n_1 \dots n_l} D_1^{n_1} \dots D_l^{n_l} = D_Q,$$

где $Q \in I(\mathfrak{m})$ и степень Q меньше степени P . Теперь следствие доказывается по индукции.

§3. Случай симметрического пространства

Теорема 2.9. Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара. Тогда алгебра $D(G/K)$ коммутативна.

Доказательство. Напомним, что если два дифференциальных оператора действуют на различные аргументы функции двух переменных, то операторы перестановочны. Используя симметричность пространства G/K , мы сведем доказательство коммутативности алгебры $D(G/K)$ к этому факту.

Пусть σ — такой инволютивный аналитический автоморфизм группы G , что $(K_\sigma)_0 \subset K \subset K_\sigma$, где K_σ — множество неподвижных точек автоморфизма σ и $(K_\sigma)_0$ — его компонента единицы. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G допускает разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{k}$ — алгебра Ли группы K и $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(X) = -X\}$. Так как пространство G/K полно, то Exp отображает $\mathfrak{p}$ на G/K . Значит, каждый элемент $g \in G$ можно записать в виде $g = pk$, где $p \in \text{exp } \mathfrak{p}$ и $k \in K$. Следовательно,

$$\sigma(g) = kg^{-1}k. \quad (19)$$

Докажем сначала, что операторы из $D(G/K)$ перестановочны, если ограничить их на функции из $C^\infty(G/K)$, инвариантные относительно всех $\tau(k)$ ($k \in K$). Пусть $f \in C^\infty(G)$ — такая функция, что $f(kxk') = f(x)$ для всех $k, k' \in K$ и всех $x \in G$. Тогда, в силу соотношения (19), $f(\sigma(g)) = f(g^{-1})$ ($g \in G$). Рассмотрим функцию $\varphi \in C^\infty(G \times G)$, заданную формулой $\varphi(x, y) = f(y^{-1}x)$. Эта функция обладает следующими свойствами:

- (i) $\varphi(xk, yk') = \varphi(x, y)$ для $k, k' \in K, x, y \in G$;
- (ii) $\varphi(gx, gy) = \varphi(x, y)$ для $g, x, y \in G$;
- (iii) $\varphi(\sigma \cdot y, \sigma \cdot x) = \varphi(x, y)$ для $x, y \in G$.

Пусть $D \in D_0(G)$. Будем писать $D_1\varphi$ и $D_2\varphi$, если D действует на первый и второй аргумент соответственно. Пусть $\varphi' = D_1\varphi$ и $f' = Df$. Тогда

$$[D_1\varphi](x, y) = [Df^{L(y)}](x) = [(Df)^{L(y)}](x), \quad (20)$$

так что $\varphi'(x, y) = f'(y^{-1}x)$. Поскольку f' инвариантна относительно левых и правых сдвигов на элементы из K , отсюда следует, что φ' удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iii). Продолжим теперь σ очевидным образом до автоморфизма группы $G \times G$, который обозначим также через σ . Так как $\varphi^\sigma(y, x) = \varphi(x, y)$, то

$$[D_2\varphi^\sigma](y, x) = [D_1\varphi](x, y)$$

или

$$(D_2)^\sigma \varphi = D_1\varphi. \quad (21)$$

Мы получили связь между действием оператора D на первый и второй аргументы. Как было замечено выше, дифференциальные операторы, действующие на различные аргументы, перестановочны. Таким образом, если T — другой оператор из $D_0(G)$, то применение формулы (21) к φ и φ' дает, что

$$D_1T_1\varphi = D_1(T_2)^\sigma \varphi = (T_2)^\sigma D_1\varphi = T_1D_1\varphi,$$

поскольку T_2 и T_2^σ — дифференциальные операторы на $G \times G$, действующие на второй аргумент. Заменяем теперь в формуле (20) f на Tf и φ на $T_1\varphi$. Тогда

$$[D_1T_1\varphi](x, y) = [DTf](y^{-1}x)$$

и аналогично

$$[T_1D_1\varphi](x, y) = [TDf](y^{-1}x),$$

откуда $TDf = DTf$. Пусть теперь F — произвольная функция из $C_0^\infty(G)$. Положим

$$F^*(x, g) = \int_K F(gkx) dk,$$

где инвариантная мера dk нормирована условием $\int_K dk = 1$. Тогда $F^* \in C^\infty(G \times G)$ и

$$[D_1 F^*](x, g) = \int_K [DF](gkx) dk,$$

откуда

$$[D_1 F^*](e, g) = [DF](g).$$

Но $F^*(kxk', g) = F^*(x, g)$. Поэтому из уже доказанной коммутативности следует, что

$$D_1 T_1 F^* = T_1 D_1 F^*$$

и, значит, $DT(F) = TD(F)$. В силу леммы 2.2, тем самым коммутативность алгебры $D(G/K)$ доказана.

Предложение 2.10. Пусть M — евклидово пространство или риманово глобально симметрическое пространство ранга 1. Единственными дифференциальными операторами на M , инвариантными относительно группы $I(M)$ всех изометрий многообразия M , являются многочлены от оператора Лапласа — Бельтрами Δ . Если $\dim M > 1$, то это утверждение остается справедливым при замене группы $I(M)$ компонентой единицы $I_0(M)$.

Доказательство. Если $\dim M = 1$, то M изометрично вещественной прямой или окружности, и в обоих случаях предложение очевидно. Поэтому предположим, что $\dim M > 1$. Пусть $G = I_0(M)$. Обозначим через K подгруппу изотропии группы G в точке $o \in M$. Как в доказательстве теоремы 2.9, имеем прямое разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$. Пусть P — произвольный многочлен из $I(\mathfrak{p})$ (следствие 2.6). Если $X_1, \dots, X_r$ — ортонормированный базис пространства $\mathfrak{p}$, то напомним $P = \sum a_{n_1 \dots n_r} X_1^{n_1} \dots X_r^{n_r}$. Соответствующая полиномиальная функция $P^*(X) = \sum a_{n_1 \dots n_r} x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r}$ ($X = \sum_{i=1}^r x_i X_i$) на $\mathfrak{p}$ удовлетворяет условию $P^*(\text{Ad}(k)X) = P^*(X)$ для всех $k \in K$. В силу сделанных о пространстве M предположений, группа $\text{Ad}_G(K)$ транзитивно действует на множестве прямых, проходящих через начало координат в $\mathfrak{p}$. Отсюда вытекает, что $\text{Ad}_G(K)$ транзитивно действует на каждой сфере в $\mathfrak{p}$ с центром 0, так как эти сферы связны (поскольку $\dim M > 1$). Значит, P^* постоянна на каждой такой сфере и поэтому записывается в виде

$$P^*(X) = \sum_{k=1}^N a_k (x_1^2 + \dots + x_r^2)^k.$$

Отсюда следует, что $P = \sum_k a_k (X_1^2 + \dots + X_r^2)^k$. Пусть теперь

$L = X_1^2 + \dots + X_r^2$. В силу следствия 2.8, каждый оператор $D \in \mathcal{D}(G/K)$ является многочленом от D_L . В частности, это верно для оператора Лапласа — Бельтрами Δ , так что Δ и D_L могут отличаться только постоянным множителем. Тем самым предложение доказано.

§ 3. Сферические функции. Определение и примеры

Пусть G — связная группа Ли, K — компактная подгруппа. Обозначим через π естественное отображение группы G на G/K и, как в § 2, положим $o = \pi(e)$ и $\tilde{f} = f \circ \pi$, если f — функция на G/K . Мы будем теперь изучать важный класс функций на G/K — так называемые сферические функции.

Определение. Пусть φ — комплекснозначная функция на G/K класса C^∞ , удовлетворяющая условию $\varphi(\pi(e)) = 1$. Тогда φ называется *сферической функцией*, если

- (i) $\varphi^{\tau(k)} = \varphi$ для всех $k \in K$,
- (ii) $D\varphi = \lambda_D \varphi$ для каждого $D \in \mathcal{D}(G/K)$,

где λ_D — комплексное число.

Иногда удобно рассматривать вместо φ функцию $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$ на G . Мы говорим, что $\tilde{\varphi}$ — сферическая функция на G , в том и только том случае, когда φ — сферическая функция на G/K . Тогда сферическая функция $\tilde{\varphi}$ на G характеризуется тем, что она является собственной функцией для каждого оператора из $\mathcal{D}_0(G)$ и, кроме того, удовлетворяет соотношениям $\tilde{\varphi}(e) = 1$, $\tilde{\varphi}(kgk') = \tilde{\varphi}(g)$ для всех $g \in G$ и всех $k, k' \in K$. Последнее условие будет называться *двусторонней инвариантностью относительно K* .

Мы увидим сейчас, что сферические функции можно также охарактеризовать при помощи интегрального уравнения. Обозначим через dk инвариантную меру на K , нормированную условием $\int_K dk = 1$.

Лемма 3.1. Пусть U — такое открытое подмножество группы G , что $Uk \subset U$ для каждого $k \in K$. Пусть F — аналитическая функция на U . Тогда функция

$$x \rightarrow \int_K F(xk) dk$$

также аналитична на U .

Доказательство. Для простоты допустим, что $U = G$. Пусть $x_0 \in G$, и пусть $\{x_1, \dots, x_n\}$ — система координат, действующая в открытой окрестности V точки x_0 . Существуют такое конечное множество координатных окрестностей $U_\alpha \subset K$, объединение

которых совпадает с K , и такая окрестность N точки x_0 в V , что функция $F(xk)$ задается степенным рядом

$$F(xk) = P_\alpha(x_1, \dots, x_n, k_1, \dots, k_p) \quad (x \in N, k \in U_\alpha),$$

где $\{k_1, \dots, k_p\}$ — система локальных координат на U_α . Рассмотрим разбиение единицы $1 = \sum_\alpha \varphi_\alpha$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$ группы K . Тогда

$$F(xk) = \sum_\alpha \varphi_\alpha(k) P_\alpha(x_1, \dots, x_n, k_1, \dots, k_p) \quad (k \in K, x \in N).$$

Отсюда интегрированием по K получается степенной ряд на N .

Предложение 3.2. Пусть f — комплекснозначная непрерывная функция на G , не равная тождественно 0. Тогда f является сферической функцией в том и только том случае, когда

$$\int_K f(xky) dk = f(x) f(y) \quad (1)$$

для всех $x, y \in G$.

Доказательство. Пусть $D \in \mathbf{D}(G)$. Тогда все дифференциальные операторы $\text{Ad}(k)D$ ($k \in K$) лежат в конечномерном подпространстве алгебры $\mathbf{D}(G)$, и мы можем образовать интеграл

$$D_0 = \int_K \text{Ad}(k) D dk, \quad (2)$$

являющийся оператором из $\mathbf{D}_0(G)$. Отображение $D \rightarrow D_0$ есть линейное отображение алгебры $\mathbf{D}(G)$ на $\mathbf{D}_0(G)$. Пусть F — функция из $C^\infty(G)$, двусторонне инвариантная относительно K . Тогда $[DF](k) = [DF](e)$, откуда

$$[D_0 F](e) = \int_K [D^{R(k-1)} F](e) dk = \int_K [(DF^{R(k)})^{R(k-1)}](e) dk,$$

так что

$$[D_0 F](e) = [DF](e). \quad (3)$$

Предположим теперь, что f — сферическая функция на G . Тогда f имеет вид $f = \varphi \circ \pi$, где φ — сферическая функция на G/K . Пространство G/K обладает римановой структурой, инвариантной относительно действия группы G . Нетрудно видеть, что эта риманова структура обязательно аналитична. Оператор Лапласа — Бельтрами по отношению к этой структуре имеет аналитические коэффициенты, если выразить его в локальных аналитических координатах на G/K . Кроме того, этот оператор эллиптичен, и, следова-

тельно, по теореме С. Бернштейна (см. Йон [1], стр. 125) собственные функции являются аналитическими. В частности, функция φ , а значит, и функция f , аналитична.

Пусть теперь x — фиксированный элемент группы G . Рассмотрим функцию

$$F(y) = \int_K f(xky) dk \quad (y \in G),$$

которая, очевидно, двусторонне инвариантна относительно K . Пусть D и D_0 таковы же, как в формуле (3). Поскольку $D_0 f = \lambda_D f$, имеем

$$[D_0 F](y) = \int_K [D_0 f](xky) dk = \lambda_D F(y)$$

и, следовательно,

$$[D_0(f(e)F - F(e)f)](e) = 0.$$

Связывая это с формулой (3), получаем, что

$$[D(f(e)F - F(e)f)](e) = 0$$

для всех $D \in \mathbf{D}(G)$. Так как $f(e)F - F(e)f$ есть аналитическая функция (лемма 3.1), то из формулы Тэйлора (гл. II, § 1, (6)) выводим, что

$$f(e)F = F(e)f.$$

Поскольку $f(e) = 1$, это равенство как раз совпадает с (1).

С другой стороны, пусть f — непрерывная функция на G , не равная тождественно 0 и удовлетворяющая уравнению (1). Выберем такой $x_0 \in G$, что $f(x_0) \neq 0$. Тогда из формулы (1) вытекает, что $f(xk)f(x_0) = f(x_0)f(x) = f(x_0)f(kx)$ для всех $x \in G$, $k \in K$. Итак, f двусторонне инвариантна относительно K . Полагая в (1) $y = e$, получаем, что $f(e) = 1$. Для доказательства того, что $f \in C^\infty(G) + iC^\infty(G)$, выберем такую функцию $\varrho \in C_c^\infty(G)$, что $\int_G \varrho(y)f(y)dy \neq 0$, где dy — левоинвариантная мера на G . Тогда

$$\begin{aligned} f(x) \int_G f(y)\varrho(y)dy &= \int_G \varrho(y) \left(\int_K f(xky)dk \right) dy = \\ &= \int_K \left(\int_G \varrho(y)f(xky)dy \right) dk = \int_K \left(\int_G \varrho(k^{-1}x^{-1}z)f(z)dz \right) dk = \\ &= \int_G \left(\int_K \varrho(kx^{-1}z)dk \right) f(z)dz, \end{aligned}$$

откуда видно, что $f \in C^\infty(G) + iC^\infty(G)$. Для каждого $D_0 \in \mathbf{D}_0(G)$ получаем из (1), что

$$f(x) [D_0 f](y) = \int_K [D_0 f](xky) dk.$$

Полагая $y = e$, получаем

$$[D_0 f](x) = [D_0 f](e) f(x), \quad (4)$$

откуда видно, что f — сферическая функция.

Из формулы (4) следует, что сферическая функция определяется своей системой собственных значений. Точнее,

Следствие 3.3. Пусть φ и φ_1 — две сферические функции на G , такие, что $D_0 \varphi = \lambda_D \varphi$ и $D_0 \varphi_1 = \lambda_D \varphi_1$ для всех $D_0 \in \mathbf{D}_0(G)$. Тогда $\varphi = \varphi_1$.

Действительно, из равенств (4) и (3) следует, что $[D\varphi](e) = [D\varphi_1](e)$ для каждого $D \in \mathbf{D}(G)$. Будучи аналитическими, функции φ и φ_1 должны совпадать.

Примеры. Пусть M — односвязное риманово многообразие размерности 2 и постоянной кривизны. На этих пространствах (которые суть плоскость, двумерная сфера S^2 и гиперболическая плоскость H^2) единственными дифференциальными операторами, инвариантными относительно $I_0(M)$, являются многочлены от оператора Лапласа — Бельтрами. Найдем теперь сферические функции. Напомним сначала определение *геодезических полярных координат* в точке o на римановом многообразии M . Пусть $\theta_1, \dots, \theta_{m-1}$ — координаты, действующие на открытом подмножестве U единичной сферы в касательном пространстве M_o . Пусть N_o — нормальная окрестность точки o в M , и пусть $C(U)$ — «полный конус», состоящий из точек $p \in N_o \setminus \{o\}$, для которых луч в M_o , касающийся геодезической (op) , пересекает U . Обозначим через $(\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$ координаты точки пересечения и положим $r = d(o, p)$, где d обозначает расстояние. Тогда отображение

$$p \rightarrow (\theta_1, \dots, \theta_{m-1}, r) \quad (p \in C(U))$$

называется системой геодезических полярных координат в точке o .

I. $M = \mathbf{R}^2$, $G = \mathbf{R}^2$, $K = \{e\}$.

Здесь $\mathbf{D}(G/K)$ состоит из всех дифференциальных операторов на $\mathbf{R}^2$ с постоянными коэффициентами. Очевидно, имеем

Предложение 3.4. Сферические функции на G/K — это в точности показательные функции

$$(x, y) \rightarrow e^{\alpha x + \beta y},$$

где α, β — любые комплексные числа.

II. $M = \mathbf{R}^2$, $G = I_0(M)$, $K = SO(2)$.

Пусть l — некоторый луч в $\mathbf{R}^2$, выходящий из начала координат. В полярных координатах, действующих в $\mathbf{R}^2 \setminus l$, риманова структура пространства $\mathbf{R}^2$ задается симметрической дифференциальной формой

$$dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

где $r(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$ и θ — угол между лучом l и отрезком, соединяющим начало координат o с точкой (x, y) . В этих координатах оператор Лапласа — Бельтрами задается формулой

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Пусть φ — сферическая функция на G/K . Тогда $\varphi(x, y) = \psi(\sqrt{x^2 + y^2})$, где $\psi(r)$ — функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} = \alpha\psi \quad (r > 0), \quad (5)$$

α — комплексная константа. Если $\lambda^2 = \alpha$, то функция

$$\psi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\lambda r \cos u} du \quad (6)$$

является решением уравнения (5). Поэтому функция

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\lambda \sqrt{x^2 + y^2} \cos u) du \quad (\lambda^2 = \alpha) \quad (7)$$

является решением уравнения $\Delta\varphi = \alpha\varphi$ в плоскости с выколотой точкой $\mathbf{R}^2 \setminus \{o\}$. С другой стороны, функция φ , заданная формулой (7), дифференцируема, причем и в начале координат, так как ее можно записать в виде

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\lambda(x \cos u + y \sin u)) du.$$

Таким образом, φ — сферическая функция на G/K . Вспоминая следствие 3.3, имеем

Предложение 3.5. *Сферические функции на G/K — это в точности функции вида (7), где λ — произвольное комплексное число.*

Функциональное уравнение (1) можно выразить в терминах функции ψ . Если обозначить через $g, h \in G$ переносы в направлении оси x на расстояния r и s соответственно и через k — поворот вокруг начала координат на угол u , то точка $gkh \cdot o$ находится на расстоянии $(r^2 + s^2 + 2rs \cos u)^{1/2}$ от начала координат. Поэтому функциональное уравнение (1) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi((r^2 + s^2 + 2rs \cos u)^{1/2}) du = \psi(r) \psi(s). \quad (8)$$

Для $\lambda = i$ функция $\psi(r)$ есть классическая функция Бесселя $J_0(r)$.

III. $M = S^2$, $G = SO(3)$, $K = SO(2)$.

Пусть o — северный полюс на M и l — полуокружность на M , соединяющая o с южным полюсом. Если (θ, r) — обычные полярные координаты в касательном пространстве M_o , то рассмотрим (θ, r) как геодезические координаты в точке $o \in M$. Они действуют в $S^2 \setminus l$. В этих координатах риманова структура на S^2 задается симметрической дифференциальной формой

$$dr^2 + (\sin r)^2 d\theta^2,$$

и оператор Лапласа — Бельтрами имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos r}{\sin r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sin^2 r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (9)$$

Пусть φ — сферическая функция на G/K . Тогда $\varphi(p) = \psi(d(o, p))$, где d — расстояние и $\psi(r)$ — функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{\cos r}{\sin r} \frac{d\psi}{dr} = \alpha \psi \quad (0 < r < \pi), \quad (10)$$

α — комплексная константа. Если $\alpha = -n(n+1)$, где n — целое число, то хорошо известное решение уравнения (10) дается многочленом Лежандра

$$\psi(r) = P_n(\cos r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos r + i \sin r \cos u)^n du. \quad (11)$$

Предложение 3.6. Сферические функции на G/K — это в точности функции

$$\varphi_n(p) = P_n(\cos(d(o, p))), \quad (12)$$

где P_n — многочлен Лежандра степени n .

Доказательство. Так как функция φ_n дифференцируема на S^2 , то остается доказать, что каждую сферическую функцию φ можно выразить в виде (12). Если это не так, то собственное

значение λ в уравнении $\Delta\varphi = \lambda\varphi$ должно быть отлично от $-n(n+1)$ для каждого целого $n \geq 0$ (следствие 3.3). С другой стороны, оператор Δ симметричен, т. е.

$$\int_{S^2} f(p) [\Delta g](p) \omega = \int_{S^2} [\Delta f](p) g(p) \omega \quad (13)$$

для $f, g \in C^\infty(S^2)$, где ω — элемент объема (предложение 2.1). Используя это свойство, получаем, что

$$\int_{S^2} \varphi(p) \varphi_n(p) \omega = 0 \quad (14)$$

для всех целых $n \geq 0$. В силу полноты системы многочленов Лежандра, из соотношения (14) следует, что $\varphi \equiv 0$, и мы получаем противоречие.

Функциональное уравнение (1) можно выразить в терминах функции $P_n(\cos r)$. Рассмотрим прямоугольную систему координат x, y, z , в которой S^2 задается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и o имеет координаты $(0, 0, 1)$. Пусть в уравнении

$$\int_K f(gkh) dk = f(g) f(h)$$

элементы g и h обозначают повороты вокруг оси y на углы r и s соответственно, а k обозначает поворот на угол u вокруг оси z . Тогда точка $kh \cdot o$ имеет координаты

$$kh \cdot o = (\sin s \cos u, \sin s \sin u, \cos s).$$

Так как поворот g имеет следующее выражение в координатах:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos r & 0 & \sin r \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin r & 0 & \cos r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

то координаты точки $gkh \cdot o$ равны

$(\cos r \sin s \cos u + \sin r \cos s, \sin s \sin u, -\sin r \sin s \cos u + \cos r \cos s)$. Поэтому уравнение (1) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n(\cos r \cos s - \sin r \sin s \sin u) du = P_n(\cos r) P_n(\cos s). \quad (15)$$

IV. $G = SL(2, R)$, $K = SO(2)$, $M = G/K$.

Группа G транзитивно действует на верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ при помощи отображений

$$z \rightarrow g \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ где } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, R).$$

Подгруппа изотропии группы G в точке i есть K , так что M можно отождествить с верхней полуплоскостью. Обозначим через $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{k}_0$ алгебры Ли групп G и K соответственно. Как обычно, имеем $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$, где $\mathfrak{p}_0$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{k}_0$ в $\mathfrak{g}_0$ относительно формы Киллинга B алгебры $\mathfrak{g}_0$. Так как комплексной оболочкой алгебры $\mathfrak{g}_0$ является $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, то, согласно примеру из § 6 гл. VII, имеем

$$B(X, Y) = 4 \operatorname{Tr}(XY) \quad (X, Y \in \mathfrak{g}_0).$$

Ограничение формы $\frac{1}{2} B$ на $\mathfrak{p}_0 \times \mathfrak{p}_0$ порождает G -инвариантную риманову структуру на M , относительно которой M имеет постоянную кривизну (группа G транзитивна). Согласно формуле (1) из § 3 гл. V, эта кривизна равна

$$\frac{1}{2} B([X, Y], [X, Y]),$$

где X, Y — ортонормированный базис в $\mathfrak{p}_0$. Например, можно взять

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$[X, Y] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

так что кривизна многообразия M равна -1 . В геодезических полярных координатах (θ, r) , например, в точке $i \in M$, риманова структура на M задается формой

$$dr^2 + \operatorname{sh}^2 r \, d\theta^2,$$

а оператор Лапласа — Бельтрами имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\operatorname{ch} r}{\operatorname{sh} r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Каждая сферическая функция φ на G/K имеет вид $\varphi(p) = \psi(d(i, p))$, где функция $\psi(r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{\operatorname{ch} r}{\operatorname{sh} r} \frac{d\psi}{dr} = \alpha \psi \quad (r > 0) \quad (16)$$

для некоторой комплексной константы α . Общее решение этого уравнения, аналогично примеру III, дается формулой (см. Эрдейи и др. [1], стр. 156):

$$\psi(r) = P_\varrho(\operatorname{ch} r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\operatorname{ch} r + \operatorname{sh} r \cos u)^\varrho du, \quad (17)$$

где показатель ϱ удовлетворяет условию $\varrho(\varrho + 1) = \alpha$.

Предложение 3.7. Сферические функции на G/K — это в точности функции

$$\varphi(p) = P_\rho(\operatorname{ch} d(i, p)),$$

где P_ρ задается формулой (17) и ρ — произвольное комплексное число.

Доказательство. Так как формула (17) дает общий вид решений уравнения (16), равных 1 при $r=0$, то остается только доказать, что каждая функция вида (17) получается из некоторой сферической функции f на G . Мы сделаем это, написав явную формулу для функции f . Вместе с тем это будет иллюстрацией того факта, что формула (17) является частным случаем формулы Хариш-Чандра для сферических функций на любом пространстве G/K некомпактного типа.

Рассмотрим разложение Ивасава группы $G = SL(2, \mathbf{R})$. Оно имеет вид $G = KAN$, где A — группа диагональных матриц

$$a = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} \quad (d > 0),$$

а N — группа матриц

$$n = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbf{R}).$$

Для каждого $x \in G$ обозначим через $H(x)$ единственный элемент алгебры Ли $\mathfrak{a}$ группы A , для которого $x = k \exp(H(x)) n$. Если положить

$$a = \begin{pmatrix} e^{\frac{r}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{r}{2}} \end{pmatrix},$$

то $(d(K, aK))^2 = \frac{1}{2} B(H(a), H(a)) = r^2$. Далее, если

$$k = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ -\sin u & \cos u \end{pmatrix}$$

и если написать $ak = k_1 a_1 n_1$, то

$$a_1 = \begin{pmatrix} (\operatorname{ch} r + \operatorname{sh} r \cos 2u)^{1/2} & 0 \\ 0 & (\operatorname{ch} r + \operatorname{sh} r \cos 2u)^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому интеграл (17) можно записать в виде

$$\int_K e^{\nu(H(ak))} dk,$$

где ν — линейная функция на $\mathfrak{a}$, заданная формулой

$$\nu \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = 2\rho t \quad (t \in \mathbf{R}).$$

Функция f на G , заданная формулой

$$f(x) = \int_K e^{\nu(H(xk))} dk, \quad (18)$$

дифференцируема и имеет вид $f = \varphi \circ \pi$. Значит, φ дифференцируема и $\varphi(p) = \psi(d(i, p))$, где ψ задается формулой (17). Тем самым предложение доказано.

Чтобы найти явный вид функционального уравнения (1), положим

$$a_i = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}r_i} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}r_i} \end{pmatrix} (i=1, 2), \quad k = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ -\sin u & \cos u \end{pmatrix}.$$

Тогда $a_1 k a_2$ можно записать в виде $k_1 a k_2$, где $k_1, k_2 \in K$ и

$$a = \begin{pmatrix} e^{\frac{r}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{r}{2}} \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{ch} r = \operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_2 + \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_2 \cos 2u.$$

Значит, функции (17) характеризуются интегральной формулой

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\operatorname{ch} r \operatorname{ch} s + \operatorname{sh} r \operatorname{sh} s \cos u) du = P(\operatorname{ch} r) P(\operatorname{ch} s). \quad (19)$$

V. Компактные группы

В этом последнем примере обозначим через U произвольную компактную связную группу Ли. Обозначим через G прямое произведение $U \times U$ и через K — диагональ в $U \times U$. Тогда отображение $(u_1, u_2) K \rightarrow u_1 u_2^{-1}$ отождествляет G/K с U . При этом отождествлении преобразование $\tau(u_1, u_2)$ пространства G/K соответствует преобразованию $u \rightarrow u_1 u u_2^{-1}$ группы U . Следовательно, дифференциальный оператор D на G/K принадлежит $\mathbf{D}(G/K)$ тогда и только тогда, когда при рассмотрении его в качестве дифференциального оператора на U он инвариантен относительно всех левых и правых сдвигов. Таким образом, $\mathbf{D}(G/K)$ отождествляется с центром $\mathbf{Z}(U)$ алгебры $\mathbf{D}(U)$ (лемма 2.4). Если интерпретировать функции на G/K как функции на U , то функциональное уравнение (1) примет вид

$$\int_U \varphi(xiuu^{-1}) du = \varphi(x) \varphi(y). \quad (20)$$

Это уравнение характеризует те собственные функции операторов из $\mathbf{Z}(U)$, которые инвариантны относительно всех внутренних автоморфизмов группы U и удовлетворяют условию $\varphi(e) = 1$.

Из теории представлений компактных групп (см., например, А. Вейль [1], стр. 101) известно, что решениями уравнения (20) являются в точности функции

$$\varphi = \frac{1}{d_\chi} \chi,$$

где χ — характер неприводимого представления группы U и d_χ — размерность этого представления. (Определение этих терминов см. в следующем параграфе.)

§ 4. Элементарные свойства сферических функций

Пусть G — группа Ли и dg — левоинвариантная мера на G . Множество комплекснозначных непрерывных функций на G с компактными носителями можно превратить в ассоциативную алгебру над $\mathbb{C}$, умножением в которой является *свертка*

$$f_1 * f_2(x) = \int_G f_1(g) f_2(g^{-1}x) dg,$$

а сложение определяется сложением функций в каждой точке. Эта алгебра называется *групповой алгеброй* группы G . Если θ — аналитический автоморфизм группы G , сохраняющий меру dg , то отображение $f \rightarrow f^\theta$ является автоморфизмом групповой алгебры.

Предположим теперь, что (G, K) — риманова симметрическая пара, и пусть σ — соответствующий инволютивный автоморфизм группы G . Предположим, что K компактна. Обозначим через $C^\natural(G)$ множество всех функций из групповой алгебры, двусторонне инвариантных относительно K . Тогда $C^\natural(G)$ есть подалгебра групповой алгебры.

Теорема 4.1. *Алгебра $C^\natural(G)$ коммутативна.*

Доказательство. Поскольку автоморфизм σ инволютивен, ясно, что он сохраняет левоинвариантную меру dg на G . Для каждой функции f на G обозначим через $\check{f}$ функцию $x \rightarrow f(x^{-1})$. Так как каждый $x \in G$ можно записать в виде $x = kp$, где $\sigma(k) = k$, $\sigma(p) = p^{-1}$, то для $f \in C^\natural(G)$ имеем $f^\sigma = \check{f}$. Далее, для любых двух функций f, g из групповой алгебры

$$\check{f} * \check{g}(x) = \int_G f(y^{-1}) g(x^{-1}y) dy = \int_G g(z) f(z^{-1}x^{-1}) dz,$$

откуда

$$\check{f} * \check{g} = (g * f)^\check{.}$$

Поскольку

$$f^\sigma * g^\sigma = (f * g)^\sigma,$$

получаем, что $f * g = g * f$ для $f, g \in C^b(G)$.

Лемма 4.2. Пусть φ — непрерывная комплекснозначная функция на G , двусторонне инвариантная относительно K . Тогда φ — сферическая функция тогда и только тогда, когда отображение

$$L: f \rightarrow \int_G f(x) \varphi(x) dx$$

является гомоморфизмом алгебры $C^b(G)$ на $\mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть f, g — две функции из групповой алгебры. Положим

$$f^b(x) = \int_{K \times K} f(kxk') dk dk', \quad L(f) = L(f^b).$$

Тогда отображение $f \rightarrow f^b$ отображает групповую алгебру на $C^b(G)$ и

$$(f^b * g)^b = f^b * g^b. \quad (1)$$

Для подходящим образом нормированной меры dy_K на G/K имеем

$$\begin{aligned} \int_G (f * g)(x) \varphi(x) dx &= \int_G \left(\int_G f(y) g(y^{-1}x) dy \right) \varphi(x) dx = \\ &= \int_G \int_G f(y) g(z) \varphi(yz) dy dz = \int_G g(z) \int_{G/K} \left(\int_K f(yk) \varphi(ykz) dk \right) dy_K dz, \end{aligned}$$

откуда

$$L(f^b * g) = \int_G \int_G f^b(y) g(z) \left(\int_K \varphi(ykz) dk \right) dy dz.$$

Так как φ двусторонне инвариантна, а dy инвариантна относительно преобразований $y \rightarrow kyk'$, то отсюда следует, что

$$L(f^b * g) = \int_G \int_G f(y) g(z) \left(\int_K \varphi(ykz) dk \right) dy dz. \quad (2)$$

Далее,

$$L(f) L(g) = \int_G \int_G f(y) g(z) \varphi(y) \varphi(z) dy dz. \quad (3)$$

Теперь лемма непосредственно следует из (1).

Норма $\|f\| = \int_G |f(x)| dx$ превращает групповую алгебру в нормированное векторное пространство. Так как, кроме того, выполняется свойство $\|f * g\| \leq \|f\| \|g\|$, то групповая алгебра является

нормированной алгеброй. Алгебра $C^b(G)$ есть замкнутая подалгебра.

Теорема 4.3. Непрерывные гомоморфизмы алгебры $C^b(G)$ на $\mathbb{C}$ суть отображения

$$f \rightarrow \int_G f(x) \varphi(x) dx,$$

где φ — ограниченная сферическая функция на G .

Доказательство. Пусть L — непрерывный гомоморфизм алгебры $C^b(G)$ на $\mathbb{C}$. Тогда отображение

$$f \rightarrow L(f^b)$$

есть непрерывная линейная функция на групповой алгебре. Значит, существует такая ограниченная измеримая функция φ на G , что

$$L(f^b) = \int_G f^b(x) \varphi(x) dx$$

для всех $f \in C_c(G)$. Здесь можно предположить, что φ двусторонне инвариантна относительно K , так как в противном случае ее можно заменить на φ^b . Поскольку L — гомоморфизм, из соотношений (2) и (3) выводится (путем аппроксимации в $C_c(G \times G)$), что

$$\int_K \varphi(xky) dk = \varphi(x) \varphi(y)$$

всюду вне некоторого множества элементов $(x, y) \in G \times G$ меры 0. Чтобы показать, что φ почти всюду равна непрерывной функции, выберем такую функцию $\varrho \in C_c(G)$, что $\int_G \varrho(y) \varphi(y) dy \neq 0$. Тогда

почти для всех $x \in G$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x) \int_G \varphi(y) \varrho(y) dy &= \int_G \varrho(y) \left(\int_K \varphi(xky) dk \right) dy = \\ &= \int_K \left(\int_G \varrho(k^{-1}x^{-1}z) \varphi(z) dz \right) dk = \int_G \left(\int_K \varrho(kx^{-1}z) dk \right) \varphi(z) dz, \end{aligned}$$

причем последнее выражение непрерывно зависит от x . Тем самым теорема доказана.

Теоремы 4.1 и 4.3 открывают возможность для применения общей теории нормированных алгебр и абстрактного гармонического анализа. Преобразование Фурье $\hat{f}$ функции $f \in C^b(G)$ определяется формулой

$$\hat{f}(\varphi) = \int_G f(x) \varphi(x^{-1}) dx,$$

где φ пробегает множество $\mathfrak{M}$ положительно определенных (определение см. ниже) сферических функций на G . На множестве $\mathfrak{M}$ задается самая слабая из топологий, для которых все преобразования Фурье $\hat{f}$ непрерывны. Тогда $\mathfrak{M}$ локально компактно. Формула Планшереля для классического преобразования Фурье обобщается следующим образом (Годеман [4]). На $\mathfrak{M}$ существует единственная положительная мера $d\varphi$, такая, что для всех $f \in C^b(G)$ имеет место абстрактная формула Планшереля:

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \int_{\mathfrak{M}} |\hat{f}(\varphi)|^2 d\varphi.$$

Наконец, отображение $f \rightarrow \hat{f}$ продолжается до изоморфизма гильбертова пространства функций с интегрируемым квадратом на G , двусторонне инвариантных относительно K , на $L^2(\mathfrak{M})$. В примере I § 3 абстрактное преобразование Фурье сводится к классическому

$$\hat{f}(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy,$$

и формула Планшереля приобретает вид

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(u, v)|^2 du dv.$$

В примере II § 3 мы получаем преобразование Бесселя

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(r) J_0(r\lambda) r dr$$

и формулу

$$\int_0^\infty |f(r)|^2 r dr = \int_0^\infty |\hat{f}(\lambda)|^2 \lambda d\lambda.$$

Пример III § 3 приводит к формуле Планшереля для рядов Лапласа, выражающих зональные функции на сфере. В примере V § 3 пространство $C^b(G)$ состоит из *центральных функций* на группе U , т. е. непрерывных функций f на U , удовлетворяющих условию $f(xy) = f(yx)$ для всех $x, y \in U$. Преобразование Фурье $\hat{f}$ имеет вид

$$\hat{f}(\chi) = \frac{1}{d_\chi} \int_U f(x) \chi(x^{-1}) dx,$$

а абстрактная формула Планшереля превращается в формулу

$$\int_U |f(x)|^2 dx = \sum_\chi |\hat{f}(\chi)|^2 d_{\chi^2},$$

т. е. в формулу Петера — Вейля, примененную к центральным функциям.

Мы не будем изучать этот вопрос дальше и вместо этого установим связь между сферическими функциями и представлениями группы G .

Определение. Комплекснозначная непрерывная функция φ на топологической группе G называется *положительно определенной*, если

$$\sum_{i,j=1}^n \varphi(x_i^{-1}x_j) \alpha_i \overline{\alpha_j} \geq 0$$

для всех конечных множеств $x_1, \dots, x_n$ элементов группы G и любых комплексных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Положительно определенная функция φ удовлетворяет условиям

$$\varphi(e) \geq 0, \quad \varphi(x^{-1}) = \overline{\varphi(x)}, \quad |\varphi(x)| \leq \varphi(e),$$

которые легко вывести из определения. В частности, положительно определенная функция обязательно ограничена.

Определение. Пусть G — топологическая группа и $\mathfrak{H}$ — банахово пространство над $\mathbb{C}$. *Представление* группы G в пространстве $\mathfrak{H}$ — это отображение π , сопоставляющее каждому $x \in G$ непрерывный эндоморфизм пространства $\mathfrak{H}$ и такое, что

$$(i) \quad \pi(xy) = \pi(x)\pi(y) \quad (x, y \in G), \quad \pi(e) = I;$$

(ii) для каждого $a \in \mathfrak{H}$ соответствие $x \rightarrow \pi(x)a$ есть непрерывное отображение группы G в $\mathfrak{H}$.

Представление π называется *неприводимым*, если никакое замкнутое подпространство в $\mathfrak{H}$ (кроме подпространств 0 и $\mathfrak{H}$) не является инвариантным относительно всех $\pi(x)$. Если $\mathfrak{H}$ конечномерно, то функция $x \rightarrow \text{Tr}(\pi(x))$ называется *характером* представления π . Если $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство и каждый эндоморфизм $\pi(x)$ унитарен, то представление π называется *унитарным* представлением.

Пусть π — унитарное представление топологической группы G в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Обозначим через $\langle, \rangle$ скалярное произведение в $\mathfrak{H}$. Для каждого фиксированного вектора $e \in \mathfrak{H}$ функция $x \rightarrow \langle e, \pi(x)e \rangle$ есть положительно определенная функция на G . Ее непрерывность очевидна. Пусть теперь $x_1, \dots, x_n$ — любое конечное множество элементов группы G и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — некоторые комплексные числа.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \langle e, \pi(x_i^{-1}x_j) e \rangle \alpha_i \bar{\alpha}_j &= \sum_{i,j=1}^n \langle \pi(x_i) e, \pi(x_j) e \rangle \alpha_i \bar{\alpha}_j = \\ &= \langle \sum_i \alpha_i \pi(x_i) e, \sum_j \alpha_j \pi(x_j) e \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, положительно определенная функция $\varphi \not\equiv 0$ на G каноническим образом порождает унитарное представление группы G . Обозначим через V_φ множество всех комплексных линейных комбинаций образов при левых сдвигах $\varphi^{L(x)} (x \in G)$ функции φ . Определим в пространстве V_φ скалярное произведение формулой

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\beta}_j \varphi(x_i^{-1}y_j), \quad (4)$$

где $f = \sum_i \alpha_i \varphi^{L(x_i)}$, $g = \sum_j \beta_j \varphi^{L(y_j)}$. Тогда $\langle f, g \rangle = \sum_i \alpha_i \overline{g(x_i)} = \sum_j \bar{\beta}_j \varphi(y_j)$, откуда видно, что определение (4) зависит только от f и g и не зависит от выбора их выражений через функцию φ . Пространство V_φ является гильбертовым пространством со скалярным произведением $\langle, \rangle$, если не считать полноты и того, что $\langle f, f \rangle$ может быть нулем для ненулевой функции f . Из неравенства Шварца $|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle$ следует, что множество векторов $f \in V_\varphi$, для которых $\langle f, f \rangle = 0$, является подпространством N в V_φ . Факторпространство V_φ/N наследует от V_φ скалярное произведение $\langle, \rangle$ и норму $\| \cdot \|$, и пополнение пространства V_φ/N по этой норме есть гильбертово пространство $\mathfrak{H}_\varphi$. Каждый $x \in G$ порождает эндоморфизм $f \rightarrow f^{L(x)}$ пространства V_φ . Этот эндоморфизм сохраняет скалярное произведение $\langle, \rangle$, отображает подпространство N в себя и единственным образом продолжается в унитарный оператор $\pi(x)$ в пространстве $\mathfrak{H}_\varphi$. Отображение $x \rightarrow \pi(x)$ удовлетворяет условию $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ для всех $x, y \in G$. Далее, если $f \in V_\varphi$, то

$$\begin{aligned} \langle f^{L(x)} - f, f^{L(x)} - f \rangle &= 2\langle f, f \rangle - \langle f^{L(x)}, f \rangle - \\ &- \langle f, f^{L(x)} \rangle = 2 \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j \varphi(x_i^{-1}x_j) - \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j \varphi(x_i^{-1}x^{-1}x_j) - \\ &- \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j \varphi(x_i^{-1}xx_j), \end{aligned}$$

что стремится к 0 при $x \rightarrow e$. Таким образом, для плотного множества векторов $a \in \mathfrak{H}_\varphi$ отображение $x \rightarrow \pi(x)a$ непрерывно в точке $x=e$ и, значит, в любой точке $x \in G$. Из неравенства

$$\| \pi(x)b - b \| \leq \| \pi(x)(a-b) \| + \| \pi(x)a - a \| + \| a - b \|$$

следует, что отображение $x \rightarrow \pi(x)b$ непрерывно для каждого $b \in \mathfrak{H}_\varphi$. Итак, π — унитарное представление группы G в пространстве $\mathfrak{H}_\varphi$. Наконец, если обозначить через e вектор в $\mathfrak{H}_\varphi$, соответствующий вектору $\varphi \in V_\varphi$, то

$$\varphi(x) = \langle e, \pi(x)e \rangle. \quad (5)$$

Представление π мы будем называть унитарным представлением, связанным с φ . Объединяя полученные результаты, получаем следующую теорему.

Теорема 4.4. Пусть π — унитарное представление топологической группы G в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Для каждого вектора $e \in \mathfrak{H}$ функция $\langle e, \pi(x)e \rangle$ есть положительно определенная функция на G . Обратно, любой положительно определенной функции $\varphi \not\equiv 0$ на G соответствует такое унитарное представление π группы G , что $\varphi(x) = \langle e, \pi(x)e \rangle$ для подходящего вектора e .

Определение. Пусть G — топологическая группа и K — замкнутая подгруппа. Представление π группы G в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называется представлением класса 1, если оно неприводимо и унитарно и если существует вектор $e \neq 0$ в $\mathfrak{H}$, неподвижный относительно всех $\pi(k)$ ($k \in K$).

Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара и группа K компактна. Мы докажем сейчас, что при соответствии, установленном теоремой 4.4, положительно определенные сферические функции на G отвечают представлениям класса 1 группы G .

Теорема 4.5. Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара, K компактна. Пусть $\varphi \not\equiv 0$ — положительно определенная сферическая функция на G , и пусть π — унитарное представление группы G , связанное с φ . Тогда π — представление класса 1. С другой стороны, если π — представление группы G класса 1 и если e — единичный вектор, инвариантный относительно всех $\pi(k)$ ($k \in K$), то функция $\langle e, \pi(x)e \rangle$ есть положительно определенная сферическая функция на G .

Доказательство. Пусть φ — положительно определенная сферическая функция. Так же, как раньше, определим V_φ , $\mathfrak{H}_\varphi$ и π . Пусть e — вектор в $\mathfrak{H}_\varphi$, соответствующий вектору $\varphi \in V_\varphi$. Из двусторонней инвариантности функции φ относительно K следует, что $\pi(k)e = e$ для всех $k \in K$. Для доказательства неприводимости представления π рассмотрим для каждой пары $a, b \in \mathfrak{H}_\varphi$ интеграл

$$B(a, b) = \int_K \langle \pi(k)a, b \rangle dk.$$

Так как $|B(a, b)| \leq \|a\| \|b\|$, то в пространстве $\mathfrak{H}_\varphi$ существует такой ограниченный оператор P , что

$$\langle Pa, b \rangle = B(a, b)$$

для всех $a, b \in \mathfrak{H}_\varphi$. Но поскольку функция φ сферична, из определения скалярного произведения в V_φ следует, что

$$\int_K \langle \varphi^{L(kx)}, \psi \rangle dk = \varphi(x^{-1}) \langle \varphi, \psi \rangle$$

для всех $\psi \in V_\varphi$. Следовательно, в пространстве $\mathfrak{H}_\varphi$ имеем

$$\int_K \langle \pi(kx)e, b \rangle dk = \varphi(x^{-1}) \langle e, b \rangle$$

для всех $b \in \mathfrak{H}_\varphi$. Это значит, что

$$P\pi(x)e = \varphi(x^{-1})e. \quad (6)$$

Так как пространство $\mathfrak{H}_\varphi$ порождается комплексными линейными комбинациями векторов $\pi(x)e$ ($x \in G$), то получаем отсюда, что $P^2 = P$ и что

$$P(\mathfrak{H}_\varphi) = Ce. \quad (7)$$

Обозначим через $\mathfrak{H}'$ замыкание суммы всех замкнутых подпространств $U' \subset \mathfrak{H}_\varphi$, инвариантных относительно π и удовлетворяющих условию $PU' = \{0\}$. Тогда $\mathfrak{H}'$ и его ортогональное дополнение $\mathfrak{H}''$ в $\mathfrak{H}_\varphi$ инвариантны относительно π . Пусть U — некоторое замкнутое подпространство в $\mathfrak{H}''$, инвариантное относительно π ($U \neq \{0\}$). Тогда $PU \neq \{0\}$, так что, в силу формулы (7), $e \in U$. Но тогда $\pi(x)e \in U$ для всех $x \in G$, так что $U = \mathfrak{H}_\varphi$. Отсюда следует, во-первых, что $\mathfrak{H}_\varphi = \mathfrak{H}''$ и, во-вторых, что π неприводимо.

С другой стороны, пусть π — представление класса 1 группы G в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Пусть e — такой единичный вектор в $\mathfrak{H}$, что $\pi(k)e = e$ для всех $k \in K$. Прежде чем доказывать, что функция $\langle e, \pi(x)e \rangle$ является сферической, установим некоторые свойства представления π .

Пусть f — непрерывная функция на G с компактным носителем. Тогда эрмитова форма

$$C(a, b) = \int_G f(x) \langle \pi(x)a, b \rangle dx \quad (a, b \in \mathfrak{H})$$

удовлетворяет условию

$$|C(a, b)| \leq \left(\int_G |f(x)| dx \right) \|a\| \|b\|.$$

Значит, существует такой ограниченный оператор π_f на $\mathfrak{H}$, что $\langle \pi_f(a), b \rangle = C(a, b)$. Напишем символически

$$\pi_f = \int_G f(x) \pi(x) dx.$$

Тогда отображение $f \rightarrow \pi_f$ есть гомоморфизм групповой алгебры группы G в алгебру ограниченных операторов на $\mathfrak{H}$. Иными словами, мы имеем представление групповой алгебры в пространстве $\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{N}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, состоящее из всех векторов $a \in \mathfrak{H}$, которые неподвижны при всех $\pi(k)$ ($k \in K$).

Лемма 4.6. *Подпространство $\mathfrak{N}$ инвариантно относительно всех операторов π_f ($f \in C^b(G)$).*

Доказательство. Если $a \in \mathfrak{N}$ и $f \in C^b(G)$, то для $k \in K$ имеем соотношение

$$\pi(k) \pi_f a = \int_G f(x) \pi(kx) a dx = \int_G f(x) \pi(x) a dx = \pi_f a,$$

где использовано равенство $f(kx) = f(x)$.

Лемма 4.7. *Пространство $\mathfrak{N}$ одномерно.*

Доказательство. Если $f \in C^b(G)$, то обозначим через A_f ограничение оператора π_f на гильбертово пространство $\mathfrak{N}$. Обозначим через f^* функцию

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})} \det \text{Ad}_G(x) \quad (x \in G).$$

Тогда $f^* \in C^b(G)$ и, используя следствие 1.3, получаем

$$\begin{aligned} \langle a, \pi_{f^*} b \rangle &= \int_G f(x^{-1}) \det \text{Ad}_G(x) \langle a, \pi(x) b \rangle dx = \\ &= \int_G f(x^{-1}) \langle \pi(x^{-1}) a, b \rangle d(x^{-1}). \end{aligned}$$

Отсюда $\langle a, A_{f^*} b \rangle = \langle A_f a, b \rangle$, так что оператор A_{f^*} является сопряженным к A_f . Поэтому операторы A_f образуют коммутативное семейство нормальных ограниченных операторов. Следовательно, они обладают общим спектральным разложением

$$A_f = \int p_f(\lambda) dE_\lambda,$$

где λ пробегает некоторое пространство (которое мы никак не обозначаем), p_f — комплекснозначная функция и dE_λ — мера, значениями которой являются проекционные операторы в пространстве $\mathfrak{N}$. Последние операторы $E(S)$ перестановочны с каж-

дым из A_f и поэтому образ $E(S)\mathfrak{N}$ инвариантен относительно всех A_f .

Предположим теперь, что $\dim \mathfrak{N} > 1$. Тогда либо все A_f являются скалярными кратными оператора I , либо $E(S)\mathfrak{N}$ для некоторого S отлично от $\{0\}$ и $\mathfrak{N}$. В обоих этих случаях $\mathfrak{N}$ можно представить в виде $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2$, где $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ — ненулевые замкнутые ортогональные друг другу подпространства в $\mathfrak{N}$, инвариантные относительно каждого A_f . Выберем $a_1 \neq 0$ в $\mathfrak{N}_1$ и обозначим через $\mathfrak{M}_1$ множество векторов вида $\pi_f a_1$, где f пробегает всю групповую алгебру. Тогда $\mathfrak{M}_1$ — ненулевое подпространство, инвариантное относительно всех $\pi(x)$ ($x \in G$). Мы покажем сейчас, что $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ ортогональны. Отсюда будет следовать, что замыкание подпространства $\mathfrak{M}_1$ отлично от $\mathfrak{N}$, что противоречит предположенной неприводимости представления π .

Пусть $f \in C_c(G)$ и $a_2 \in \mathfrak{N}_2$. Тогда

$$\langle \pi_f a_1, a_2 \rangle = \int_G f(x) \langle \pi(x) a_1, a_2 \rangle dx = \int_G f^\natural(x) \langle \pi(x) a_1, a_2 \rangle dx,$$

откуда

$$\langle \pi_f a_1, a_2 \rangle = \langle A_f^\natural a_1, a_2 \rangle.$$

Последнее выражение равно 0, так как $\mathfrak{N}_1$ инвариантно относительно $A_f^\natural$. На этом доказательство закончено.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 4.5. Остается доказать, что функция $\varphi(x) = \langle e, \pi(x)e \rangle$ является сферической. Пусть $f \in C^\natural(G)$. В силу лемм 4.6 и 4.7, вектор $\pi_f e$ является скалярным кратным вектора e . Поскольку

$$\langle \pi_f e, e \rangle = \int_G f(x) \overline{\varphi(x)} dx,$$

ясно, что

$$\pi_f e = \left(\int_G f(x) \overline{\varphi(x)} dx \right) e.$$

Так как отображение $f \rightarrow \pi_f$ есть представление алгебры $C^\natural(G)$ в пространстве $\mathfrak{H}$, то отображение

$$f \rightarrow \int_G f(x) \overline{\varphi(x)} dx$$

является гомоморфизмом алгебры $C^\natural(G)$ на $\mathbb{C}$. Теперь из леммы 4.2 видно, что φ — сферическая функция на G .

Связь между положительно определенными сферическими функциями и представлениями класса 1, установленная в теореме 4.5, может быть уточнена, если воспользоваться стандартным понятием эквивалентности представлений, которое мы сейчас введем.

Определение. Пусть G — топологическая группа. Два унитарных представления π и π' группы G в гильбертовых пространствах $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ называются *эквивалентными*, если существует линейное отображение A пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}'$, сохраняющее скалярные произведения и такое, что $\pi'(x) \circ A = A \circ \pi(x)$ для всех $x \in G$.

Теорема 4.8. Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара и группа K компактна. Для каждого представления π группы G класса 1 в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ обозначим через $\mathfrak{N}_\pi$ (одномерное) пространство векторов из $\mathfrak{H}$, неподвижных при всех $\pi(k)$ ($k \in K$). Обозначим через Ω множество всех классов эквивалентности ω представлений группы G класса 1. Тогда Ω находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством $\mathfrak{P}$ всех положительно определенных сферических функций φ на G , удовлетворяющих условию $\varphi(e) = 1$. Это соответствие $\omega \rightarrow \varphi$ обладает следующими свойствами:

(i) если $\pi \in \omega$ и e — некоторый единичный вектор из $\mathfrak{N}_\pi$, то

$$\varphi(x) = \langle e, \pi(x)e \rangle;$$

(ii) ω содержит представление, связанное с φ .

Доказательство. Сначала заметим, что $\langle e, \pi(x)e \rangle$ не зависит от выбора единичного вектора $e \in \mathfrak{N}_\pi$ и от выбора представления π в классе ω . Таким образом, имеем отображение множества Ω в $\mathfrak{P}$. Это отображение на, потому что

$$\varphi(x) = \langle e_\varphi, \pi_\varphi(x)e_\varphi \rangle \quad (x \in G),$$

где $\varphi \in \mathfrak{P}$, π_φ — представление, связанное с φ , и e_φ — некоторый единичный вектор в $\mathfrak{N}_{\pi_\varphi}$. Чтобы доказать взаимную однозначность этого отображения, достаточно показать, что если $\omega \in \Omega$, $\pi \in \omega$ и если положить $\varphi(x) = \langle e, \pi(x)e \rangle$, где e — единичный вектор из $\mathfrak{N}_\pi$, то $\pi_\varphi \in \omega$. Нужное нам отображение гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ (в котором действует π) на $\mathfrak{H}_\varphi$ дается формулой

$$A: \sum_{i=1}^r a_i \pi(x_i) e \rightarrow \sum_{i=1}^r a_i \pi_\varphi(x_i) e_\varphi,$$

где $x_1, \dots, x_r$ — произвольные элементы группы G и $a_1, \dots, a_r$ — произвольные комплексные числа. Тем самым теорема доказана.

§ 5. Алгебраический аппарат

В этом параграфе собраны некоторые известные алгебраические результаты, которые будут использоваться в § 6. Терминология и изложение следуют книге Зарисского и Самюэля [1], к которой мы отсылаем также за теми доказательствами, которые будут опущены.

Напомним, что полем всегда называется коммутативное поле характеристики 0. В этом параграфе мы рассматриваем только кольца и алгебры, которые коммутативны, обладают единицей и не имеют делителей нуля. Модуль M над кольцом A называется *конечным*, если существует такой конечный набор элементов $x_1, \dots, x_m \in M$, что $M = Ax_1 + \dots + Ax_m$.

Определение. Пусть B — кольцо и A — подкольцо в B (с той же единицей). Элемент $x \in B$ называется *целым* над A , если он удовлетворяет уравнению

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1)$$

со старшим коэффициентом 1, где $a_i \in A$. Если каждый $x \in B$ является целым над A , то кольцо B называется *целым* над A .

Лемма 5.1. Пусть A — подкольцо кольца B , и пусть $x \in B$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) элемент x является целым над A ;
- (ii) кольцо $A[x]$ (подкольцо в B , порожденное кольцом A и элементом x) является конечным A -модулем.
- (iii) существует промежуточное кольцо R , $A[x] \subset R \subset B$, такое, что R — конечный A -модуль.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Существует такое целое $n > 0$, что $x^n \in \sum_{i=0}^{n-1} Ax^i$. Отсюда следует, что $x^{n+r} \in \sum_{i=0}^{n-1} Ax^{i+r}$. При помощи

индукции по r получаем, что $x^{n+r} \in \sum_{i=0}^{n-1} Ax^i$ для каждого $r > 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Нужно взять $R = A[x]$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Выберем такие $y_1, \dots, y_n \in R$, что $R = \sum_{i=1}^n Ay_i$. Тогда

для подходящих элементов $a_{ij} \in A$ имеем $xy_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j$ ($1 \leq i \leq n$).

Запишем эту систему линейных уравнений в виде

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij}x - a_{ij}) y_j = 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

Тогда определитель $d = \det(\delta_{ij}x - a_{ij})$ удовлетворяет условию $dy_i = 0$ для каждого i . Значит, $dR = 0$, откуда $d = 0$. Но это есть уравнение вида (1), так что x — целый над A элемент.

При помощи индукции из леммы 5.1 выводится

Лемма 5.2. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — элементы кольца B , целые над подкольцом A . Тогда кольцо $A[x_1, \dots, x_n]$ (подкольцо в B , порожденное кольцом A и элементами $x_1, \dots, x_n$) есть конечный A -модуль.

Из этой леммы и леммы 5.1 (iii) получаем

Следствие 5.3. Пусть A — подкольцо кольца B . Множество элементов кольца B , целых над A , составляет подкольцо $\bar{A}$ в B , содержащее A .

Определение. Подкольцо $\bar{A}$ называется *целым замыканием* подкольца A в B .

Определение. Кольцо A называется *целозамкнутым*, если оно совпадает со своим целым замыканием в поле частных $S(A)$ кольца A .

Лемма 5.4. Область с однозначным разложением A является целозамкнутой.

Доказательство. Пусть $x \in S(A)$ — целый над A элемент. Тогда $x = \frac{\alpha}{\beta}$, причем можно предположить, что α и β взаимно просты. Но x удовлетворяет уравнению

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

откуда

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} \beta + \dots + a_n \beta^n = 0.$$

Если β имеет простой делитель γ , то γ должен делить α^n и, следовательно, γ делит α . Это противоречит тому, что α и β взаимно просты. Значит, $x \in A$.

В частности, симметрическая алгебра $S(V)$ над конечномерным векторным пространством V является целозамкнутой.

Теорема 5.5. Пусть K — алгебраически замкнутое поле и A и B — алгебры с конечным числом образующих (с единицами) над K . Предположим, что $A \subseteq B$ и что B является целой над A . Тогда

(i) каждый гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow K$ продолжается до гомоморфизма ψ алгебры B в K .

(ii) Если каждый гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow K$ единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебры B в K , то поля частных $S(A)$ и $S(B)$ совпадают.

Доказательство утверждения (i). Если $\varphi(A) = \{0\}$, то определим ψ равенством $\psi(B) = \{0\}$. Если $\varphi(A) \neq \{0\}$, то ядро гомоморфизма φ есть максимальный идеал $\mathfrak{m}$ в A . Докажем сначала существование такого максимального идеала $\mathfrak{n}$ в B , что $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$. С этой целью рассмотрим множество всех идеалов $\mathfrak{p}$ в B , удовлетворяющих условию $\mathfrak{p} \cap A \subseteq \mathfrak{m}$. Это множество частично упорядочено при помощи включения и каждое его (линейно) упорядоченное подмножество обладает верхней гранью. По лемме

Цорна в этом множестве существует максимальный элемент $\mathfrak{p}$. Если $\mathfrak{p} \cap A$ — собственное подмножество в $\mathfrak{m}$, то пусть x — элемент идеала $\mathfrak{m}$, не принадлежащий к $\mathfrak{p}$. Тогда $\mathfrak{p}$ — собственное подмножество идеала $\mathfrak{p} + Bx$. По выбору идеала $\mathfrak{p}$ множество $(\mathfrak{p} + Bx) \cap A$ не содержится в $\mathfrak{m}$. Другими словами, существуют такой элемент $z \in B$ и такой элемент $y \in A$, не содержащийся в $\mathfrak{m}$, что $zx - y \in \mathfrak{p}$. Но z удовлетворяет уравнению $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ ($a_i \in A$). Умножая его на x^n и используя сравнение $zx \equiv y \pmod{\mathfrak{p}}$, получаем, что

$$y^n + a_1 x y^{n-1} + \dots + a_n x^n \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}.$$

Это противоречит тому, что $x \in \mathfrak{m}$, $y \notin \mathfrak{m}$. Значит, $\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{m}$.

Если $\mathfrak{p}$ — не максимальный идеал в B , то пусть $\mathfrak{p}'$ — максимальный идеал в B , причем имеют место строгие включения $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}' \subset B$. Тогда $\mathfrak{p}' \cap A$ — идеал в A , строго содержащий $\mathfrak{m}$, так что $A \subset \mathfrak{p}'$. Пусть $x \in B$. Поскольку x — целый над $\mathfrak{p}'$ элемент, мы имеем $x^l \in \mathfrak{p}'$ для некоторого целого l . Так как $B/\mathfrak{p}'$ — поле, то получаем, что $x \in \mathfrak{p}'$. Итак, $\mathfrak{p}' = B$, что приводит к противоречию. Это означает, что $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал в B , так что $B/\mathfrak{p}$ — поле. Обозначим через 1 единицу алгебры A . Тогда отображение $\alpha \rightarrow \alpha \cdot 1$ ($\alpha \in K$) есть изоморфизм поля K в A , а отображение $\alpha \rightarrow \alpha \cdot 1 + \mathfrak{p}$ ($\alpha \in K$) есть изоморфизм поля K в $B/\mathfrak{p}$. Выберем теперь $b_1, \dots, b_n \in B$ так, чтобы $B = K[b_1, \dots, b_n]$. Тогда $B = A[b_1, \dots, b_n]$, так что, в силу леммы 5.2, B есть конечный A -модуль. Запишем $B = Ax_1 + \dots + Ax_m$ ($x_i \in B$). Используя равенство $A = K + \mathfrak{m}$, видим, что $B/\mathfrak{p}$ есть конечное расширение поля K . Так как K алгебраически замкнуто, то имеем $B/\mathfrak{p} = K$. Естественное отображение $\psi: B \rightarrow K$ дает нам нужное нам продолжение гомоморфизма φ .

Доказательство¹⁾ утверждения (ii). Чтобы доказать (ii), воспользуемся следующей теоремой (теорема Нётер о нормализации, см., например, Зарисский и Самюэль [1], т. I, стр. 305).

Пусть $R = k[y_1, \dots, y_n]$ — алгебра с конечным числом образующих над полем k , и пусть d — степень трансцендентности поля частных $k(y_1, \dots, y_n)$ над k . Тогда существуют такие d линейных комбинаций $z_1, \dots, z_d$ элементов y_i с коэффициентами из k , алгебраически независимые над k , что алгебра R является целой над $k[z_1, \dots, z_d]$.

Сопоставляя эту теорему с (i), видим, что если k алгебраически замкнуто, то существует гомоморфизм алгебры $k[y_1, \dots, y_n]$ на k .

Предположим теперь, что поля частных $C(A)$ и $C(B)$ различны. Пусть $a_1, \dots, a_m$ — множество образующих алгебры A , так что $A = K[a_1, \dots, a_m]$. Выберем некоторый элемент $\alpha \in B$,

¹⁾ Это доказательство любезно сообщил автору Маттук.

не принадлежащий $C(A)$. Мы найдем гомоморфизм алгебры $K[a_1, \dots, a_m]$ в K , обладающий более чем одним продолжением до гомоморфизма алгебры $K[a_1, \dots, a_m, \alpha]$ в K . Так как B является целой над $K[a_1, \dots, a_m, \alpha]$, утверждение (ii) будет тогда следовать из (i). Пусть

$$p_\alpha(x) = x^n + f_1(\alpha)x^{n-1} + \dots + f_n(\alpha) = 0$$

— многочлен наименьшей степени с коэффициентами из поля $C(A) = K(a_1, \dots, a_m)$ и старшим коэффициентом 1, имеющий α в качестве корня. (Здесь через α обозначается набор $(a_1, \dots, a_m)$.) Обозначим через $q(\alpha)$ произведение знаменателей всех элементов $f_i(\alpha)$ на дискриминант многочлена $p_\alpha(x)$. Из сделанного выше замечания видно, что существует гомоморфизм φ алгебры $K\left[a_1, \dots, a_m, \frac{1}{q(\alpha)}\right]$ на K . Образ многочлена $p_\alpha(x)$ при гомоморфизме φ будет многочленом с коэффициентами из K , имеющим n различных корней $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Фиксируем один корень α_i . Мы хотим продолжить φ (или, точнее, ограничение гомоморфизма φ на $K[a_1, \dots, a_m]$) до гомоморфизма $\psi_i: K[a_1, \dots, a_m, \alpha] \rightarrow K$, полагая $\psi_i(\alpha) = \alpha_i$. Условие того, чтобы такое продолжение было возможно, состоит в следующем: если α удовлетворяет полиномиальному уравнению $p(\alpha, x) = 0$ с коэффициентами из $K[a_1, \dots, a_m]$, то α_i должен удовлетворять соответствующему уравнению $p(\varphi(\alpha), x) = 0$ с коэффициентами из K . Так как $p_\alpha(x)$ — многочлен наименьшей степени, то он делит $p(\alpha, x)$:

$$p(\alpha, x) = p_\alpha(x)q(\alpha, x).$$

Многочлен $q(\alpha, x)$ можно найти при помощи алгоритма деления. Его коэффициенты $g_i(\alpha)$ суть рациональные выражения от $a_1, \dots, a_m$, знаменатели которых делят произведение знаменателей элементов $f_i(\alpha)$. Поскольку φ не может отображать это произведение в 0, ясно, что $p(\varphi(\alpha), x)$ обращается в 0 при $x = \alpha_i$. Имеем $n > 1$, и гомоморфизмы ψ_i ($1 \leq i \leq n$) все различны. Доказательство закончено.

Теорема 5.6. Пусть H — компактная группа линейных преобразований конечномерного векторного пространства V над полем K ($K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$). Тогда множество $I(V)$ всех многочленов $P \in S(V)$, инвариантных относительно всех $h \in H$, является алгеброй с конечным числом образующих над K .

Доказательство. Обозначим через $I_+(V)$ множество инвариантов без свободного члена и через J идеал в $S(V)$, порожденный множеством $I_+(V)$. По теореме Гильберта о базисе идеал J имеет конечный базис. Отсюда следует, что существует такой конечный набор однородных инвариантов $j_1, \dots, j_s \in I_+(V)$, что

каждый однородный инвариант $j \in I_+(V)$ можно записать в виде

$$j = p_1 j_1 + \dots + p_s j_s, \quad (2)$$

где все $p_k \in S(V)$ однородны и степень $p_k =$ степень j — степень j_k . Применяя линейное преобразование h и интегрируя по компактной группе H , получим

$$j = i_1 j_1 + \dots + i_s j_s,$$

где $i_k = \int_H (h \cdot p_k) dh$. Применяя (2) к однородному инварианту i_k ,

можно показать при помощи индукции по степени многочлена j , что $j \in K[j_1, \dots, j_s]$. Тем самым теорема доказана.

§ 6. Формула для сферических функций

1. Евклидов тип

Пусть M — евклидово пространство размерности m , и пусть G обозначает группу $I_0(M)$ — максимальную связную группу изометрий пространства M . Обозначим через K компактную подгруппу в G , оставляющую начало координат $o \in M$ неподвижным. Тогда $M = G/K$. Группа всех параллельных переносов пространства M будет также обозначаться через M . Тогда M — нормальный делитель в G .

Предложение 6.1. *Сферические функции на G/K имеют вид*

$$\varphi_v(x) = \int_K \exp(v(kxk^{-1})) dk \quad (x \in M),$$

где v — произвольная комплекснозначная линейная функция на M . (Произведение kxk^{-1} есть произведение в группе G .)

Доказательство. Пусть сначала $m > 1$. В этом случае $D(G/K)$ состоит из всех многочленов от оператора Лапласа Δ на M . Сферические функции на M — это собственные функции оператора Δ , которые равны 1 в точке o и инвариантны относительно действия $x \rightarrow kxk^{-1}$ группы K на M . Пусть $(x_1, \dots, x_m)$ — координаты на M в ортонормированном базисе (X_i) . Запишем $v(X) = v_1 x_1 + \dots + v_m x_m$, если $X = \sum_i x_i X_i$. Тогда $\Delta e^v = (v_1^2 + \dots + v_m^2) e^v$ и, поскольку Δ инвариантен относительно изометрии $x \rightarrow kxk^{-1}$ пространства M , имеем

$$\Delta \varphi_v = (v_1^2 + \dots + v_m^2) \varphi_v.$$

Кроме того, $\varphi_v(o) = 1$ и $\varphi_v(kxk^{-1}) = \varphi_v(x)$, так что φ_v — сферическая функция. С другой стороны, поскольку сферическая функ-

ция определяется системой своих собственных значений (следствие 3.3), функции φ_ν исчерпывают все сферические функции.

Если $m = 1$, то $G = M$, $K = \{e\}$ и $D(G/K)$ состоит из всех многочленов от $\frac{d}{dx}$. В этом случае предложение очевидно.

2. Компактный тип

Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара и G компактна. Мы выразим сферические функции на G/K через характеры неприводимых представлений группы G .

Пусть φ — сферическая функция на G . Тогда $\varphi(e) = 1$, $\varphi(kgk') = \varphi(g)$ ($k, k' \in K, g \in G$) и

$$D\varphi = \lambda_D \varphi \quad (1)$$

для каждого $D \in D_0(G)$, где λ_D — комплексное число. Для каждого $g \in G$ образ $\varphi^{L(g)}$ функции φ при левом сдвиге также является решением уравнения (1). Обозначим через V_φ векторное пространство, состоящее из всех конечных комплексных линейных комбинаций образов функции φ при левых сдвигах.

Лемма 6.2. *Пространство V_φ имеет конечную размерность.*

Элементарное доказательство этой леммы указано в упражнении D.2 к настоящей главе. Мы дадим сейчас другое доказательство, использующее некоторые свойства оператора Лапласа — Бельтрами Δ на компактном римановом многообразии M (см. де Рам [2]). Пусть $m = \dim M$, и пусть d — расстояние на M . Ввиду предложения 2.1 оператор Δ симметричен, т. е.

$$\int_M (\Delta f) g \, dx = \int_M (\Delta g) f \, dx \quad (f, g \in C^\infty(M)),$$

где dx — риманова мера на M . Отсюда следует, что уравнение Пуассона $\Delta u = f$, где $f \in C^\infty(M)$, может иметь решение только в случае, когда $\int_M f \, dx = 0$. С другой стороны, если это условие удовлетворяется, то существует решение u . Предположим, что u_1 и u_2 — два решения. Тогда функция

$$v = u_1 - u_2 - \frac{1}{\text{vol}(M)} \int_M (u_1 - u_2) \, dx$$

удовлетворяет условиям

$$\int_M v \, dx = 0, \quad \int_M v (\Delta f) \, dx = 0$$

для всех $f \in C^\infty(M)$.

Поэтому для всех $g \in C^\infty(M)$ имеем

$$\int_M v g \, dx = 0,$$

откуда $v = 0$. Значит, решение уравнения $\Delta u = f$ единственно с точностью до аддитивной постоянной. Поэтому если рассмотреть подпространство, состоящее из всех функций класса C^∞ , удовлетворяющих условию $\int f \, dx = 0$, то оператор Лапласа — Бельтрами Δ будет взаимно однозначным линейным отображением этого подпространства на себя. Обратный оператор, обозначаемый через G , имеет вид

$$[Gf](x) = \int_M g(x, y) f(y) \, dy,$$

где ядро $g(x, y)$ (с особенностью при $x = y$) обладает следующими свойствами:

(i) если обозначить через D диагональ в $M \times M$, то $g \in C^\infty(M \times M \setminus D)$;

(ii) функция $d(x, y)^{m-2} g(x, y)$ ограничена. (Если $m = 2$, то это свойство нужно заменить следующим: функция $(\log d(x, y))^{-1} g(x, y)$ ограничена.)

(iii) $g(x, y) = g(y, x)$.

Лемма 6.3. Пусть Δ — оператор Лапласа — Бельтрами на компактном римановом многообразии M . Векторное пространство собственных функций $u \in C^\infty(M)$ оператора Δ , принадлежащих заданному собственному значению λ , имеет конечную размерность.

Доказательство. Достаточно рассмотреть собственное значение $\lambda \neq 0$. Обозначим через V соответствующее пространство собственных функций. Тогда $\int u(x) \, dx = 0$ для $u \in V$. Пусть $u_1, \dots, u_n$ — некоторое множество функций из V , ортонормированное по отношению к скалярному произведению

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_M f_1(x) f_2(x) \, dx$$

в $C^\infty(M)$. Предполагая, что $\lambda \neq 0$, положим

$$g^*(x, y) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n u_i(x) u_i(y)$$

и рассмотрим интеграл

$$c = \int \int (g(x, y) - g^*(x, y))^2 dx dy,$$

не ставя пока вопроса о его сходимости. Поскольку $Gu_i = \lambda^{-1}u_i$ ($1 \leq i \leq n$), используя свойства (ii) и (iii), получим

$$c = \int \int (g(x, y))^2 dx dy - \frac{n}{\lambda^2}.$$

Но $c \geq 0$ и, следовательно,

$$n \leq \lambda^2 \int \int (g(x, y))^2 dx dy.$$

Однако последний интеграл в общем случае бесконечен. Эту трудность можно обойти, заменяя $g(x, y)$ подходящим итерированным ядром. Метод основан на следующем факте. Пусть $e_1 > 0$, $e_2 > 0$. Тогда

(iv) функция $d(x, y)^{m-e_1-e_2} \int_M d(x, z)^{e_1-m} d(z, y)^{e_2-m} dz$ ограничена.

Это можно показать, разбивая интеграл на две части, а именно, на интеграл по шару $B_{2d(x, y)}(x)$ и по дополнению. (Детали см. в книге де Рама [2], стр. 187.) Ввиду свойства (ii) можно образовать итерированное ядро

$$g_p(x, y) = \int_M g(x, z_1) dz_1 \dots \\ \dots \int_M g(z_{p-2}, z_{p-1}) dz_{p-1} \int_M g(z_{p-1}, z_p) g(z_p, y) dz_p,$$

которое (в силу свойства (iv)) ограничено, если $2(p+1) > m$. Оператор G^p имеет ядро $g_p(x, y)$, т. е.

$$[G^p f](x) = \int_M g_p(x, y) f(y) dy \quad \left(\int f(x) dx = 0 \right),$$

и функции $u_1, \dots, u_n$ суть собственные функции оператора G^p , отвечающие собственному значению λ^{-p} . Заменим теперь в проделанном выше вычислении функцию $g(x, y)$ на $g_p(x, y)$, а функцию $g^*(x, y)$ на

$$g_p^*(x, y) = \frac{1}{\lambda^p} \sum_{i=1}^n u_i(x) u_i(y).$$

Тогда получим неравенство

$$n \leq \lambda^{2p} \int \int (g_p(x, y))^2 dx dy,$$

что дает верхнюю грань размерности пространства V .

Возвращаясь теперь к пространству V_φ , заметим сначала, что каждый вектор из V_φ является собственной функцией каждого $D \in D_0(G)$, отвечающей одному и тому же собственному значению λ_D . Если ввести на G двусторонне инвариантную риманову структуру, то соответствующий оператор Лапласа—Бельтрами принадлежит $D_0(G)$. Из леммы 6.3 ясно, что V_φ имеет конечную размерность.

Рассмотрим теперь представление $g \rightarrow \pi(g)$ группы G в пространстве V_φ , определенное формулой $\pi(g)\psi = \psi^{L(g)}$ для $g \in G$, $\psi \in V_\varphi$. Тогда $\pi(k)\varphi = \varphi$ для всех $k \in K$. Поскольку группа G компактна, в пространстве V_φ можно определить такое скалярное произведение, что оператор $\pi(g)$ унитарен для каждого $g \in G$.

Лемма 6.4. *Представление π неприводимо.*

Доказательство. Поскольку V_φ конечномерно, определен оператор $P = \int_K \pi(k) dk$. Далее,

$$[P\varphi^{L(g)}](x) = \int_K [\pi(k)\varphi^{L(g)}](x) dk = \int_K \varphi(g^{-1}k^{-1}x) dk = \varphi(g^{-1})\varphi(x),$$

откуда $PV_\varphi = \mathbb{C}\varphi$ и $P^2 = P$. Пусть $V_\varphi = U_1 + \dots + U_n$ — прямое разложение пространства V_φ на подпространства, инвариантные и неприводимые относительно π . Для подходящего i имеем $PU_i \neq \{0\}$. Тогда $PU_i \subset PV_\varphi = \mathbb{C}\varphi$, так что $\varphi \in PU_i \subset U_i$. Значит, $\pi(g)\varphi \in U_i$ для $g \in G$, откуда $U_i = V_\varphi$, и π неприводимо.

Отображение $P\pi(g)P$ отображает V_φ на $\mathbb{C}\varphi$ и переводит вектор φ в $\varphi(g^{-1})\varphi$. Значит,

$$\varphi(g^{-1}) = \text{Tr}(P\pi(g)P) = \text{Tr}(\pi(g)P) = \text{Tr} \int_K \pi(gk) dk = \int_K \chi(gk) dk,$$

если обозначить через χ характер представления π .

Теорема 6.5. *Сферические функции на G — это в точности функции вида*

$$\varphi(g) = \int_K \chi(g^{-1}k) dk,$$

где χ — характер конечномерного представления π группы G класса 1. Здесь φ положительно определена и π — представление, связанное с φ .

Доказательство. Остается доказать, что если π — конечномерное представление класса 1 группы G в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то написанный выше интеграл является сферической функцией. Пусть e — единичный вектор из $\mathfrak{H}$, неподвижный при

всех $\pi(k)$ ($k \in K$). Если положить $\psi(g) = \langle e, \pi(g)e \rangle$, то из теоремы 4.5 мы знаем, что ψ — сферическая функция. Положим теперь, как и раньше,

$$P = \int_K \pi(k) dk.$$

Тогда $P^2 = P$, откуда

$$\text{Tr}(P\pi(g)P) = \text{Tr}(\pi(g)P) = \int_K \text{Tr} \pi(gk) dk = \int_K \chi(gk) dk, \quad (2)$$

если обозначить через χ характер представления π . Но для каждого $x \in G$ вектор $P\pi(x)e$ неподвижен при всех $\pi(k)$ ($k \in K$). Используя лемму 4.7, заключаем отсюда, что

$$P\mathfrak{H} = Ce.$$

Пусть $e_1 = e, e_2, \dots, e_n$ — ортонормированный базис пространства $\mathfrak{H}$. Поскольку $Pe_i = 0$ для $i \geq 2$, имеем

$$\text{Tr}(P\pi(g)P) = \langle \pi(g)e, e \rangle = \psi(g^{-1}). \quad (3)$$

Теперь из формул (2) и (3) следует, что интеграл $\int_K \chi(g^{-1}k) dk$ является сферической функцией.

3. Некомпактный тип

Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара некомпактного типа. Предположим, что G имеет конечный центр, так что K компактна. Символы $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0, \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}, \mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{p}, \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{h}, \Delta, P_+, \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{n}_0$ будут употребляться в том же смысле, что в гл. VI. Введем также следующее обозначение; если E и F — линейные подпространства некоторой ассоциативной алгебры, то через EF обозначается векторное пространство, натянутое на все элементы вида ef ($e \in E, f \in F$). Рассматривая каждый элемент алгебры $\mathfrak{g}_0$ как левоинвариантный дифференциальный оператор на G , имеем $\mathfrak{g}_0 \subset D(G)$. Обозначим через $\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}_0}$ подалгебру в $D(G)$, порожденную подпространством $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ и единицей.

Лемма 6.6. Для любого $D \in D(G)$ существует единственный элемент $D_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{p}_0}$, такой, что

$$D - D_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{k}_0 D(G) + D(G) \mathfrak{n}_0.$$

Далее, степень $D_{\mathfrak{h}} \leq$ степень D .

Доказательство. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — такой базис алгебры $\mathfrak{g}_0$, что $X_i \in \mathfrak{k}_0$ для $1 \leq i \leq \dim \mathfrak{k}_0$, $X_i \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ для $\dim \mathfrak{k}_0 < i \leq \dim \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} +$

$+\dim \mathfrak{f}_0$ и $X_i \in \mathfrak{n}_0$ для $\dim \mathfrak{f}_0 + \dim \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} < i \leq \dim \mathfrak{g}_0$. Тогда, в силу следствия 1.10 гл. II, D однозначно выражается в виде

$$D = \sum a_{e_1 \dots e_n} X_1^{e_1} \dots X_n^{e_n}. \quad (4)$$

Существование оператора $D_{\mathfrak{h}}$ следует отсюда немедленно. Единственность оператора $D_{\mathfrak{h}}$ означает, что $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}_0} \cap (\mathfrak{f}_0 D(G) + D(G) \mathfrak{n}_0) = \{0\}$, а это равенство следует из единственности представления (4) и из того, что $\mathfrak{f}_0$ и $\mathfrak{n}_0$ — подалгебры. Утверждение, касающееся степеней, очевидно.

Рассмотрим теперь разложение Ивасава $G = K A_{\mathfrak{p}} N$. Если $x \in G$, то обозначим через $H(x)$ единственный элемент в $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$, для которого $x = k \exp H(x) n$, где $k \in K$, $n \in N$. Пусть $D_0(G)$ и $D(G/K)$ определены так же, как в § 2, п. 2. Алгебра $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}_0}$ — это симметрическая алгебра $S(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0})$, так что каждое линейное отображение $\nu: \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} \rightarrow \mathbb{C}$ единственным образом продолжается до гомоморфизма $\chi_{\nu}: \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}_0} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющего условию $\chi_{\nu}(1) = 1$.

Предложение 6.7. Для каждой линейной функции $\nu: \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} \rightarrow \mathbb{C}$ функция

$$\varphi(x) = \int_K e^{\nu(H(xk))} dk \quad (x \in G)$$

есть сферическая функция на G .

Доказательство. Очевидно, что $\varphi(e) = 1$. Поскольку $H(kx) = H(x)$ для $k \in K$, функция φ двусторонне инвариантна относительно K . Пусть $F(x) = e^{\nu(H(x))}$. Так как $H(xn) = H(x)$ для $n \in N$, то имеем

$$DF = 0 \quad \text{для } D \in D(G) \mathfrak{n}_0. \quad (5)$$

Далее, поскольку $H(x \exp H) = H(x) + H$ ($H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$), имеем

$$DF = \chi_{\nu}(D) F \quad \text{для } D \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}_0}. \quad (6)$$

Если $f \in C^{\infty}(G)$, то интеграл $\int_K f(xkk_1) dk$ не зависит от k_1 . Следовательно, $\int_K [Tf](xk) dk = 0$ для $T \in \mathfrak{f}_0$. В частности,

$$\int_K [DF](xk) dk = 0 \quad \text{для } D \in \mathfrak{f}_0 D(G). \quad (7)$$

Пусть теперь $D \in D_0(G)$. Тогда по лемме 6.6 $D = D_1 + D_2 + D_{\mathfrak{h}}$, где $D_1 \in D(G) \mathfrak{n}_0$, $D_2 \in \mathfrak{f}_0 D(G)$. Поскольку $D^{R(k)} = D$ ($k \in K$), имеем $[DF^{R(k^{-1})}](x) = [DF](xk)$. Значит, в силу равенств (5) — (7),

$$D\varphi = \chi_{\nu}(D_{\mathfrak{h}}) \varphi \quad (D_0 \in D_0(G)), \quad (8)$$

и предложение доказано.

Как и раньше, положим $\varrho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in P_+} \alpha$ и обозначим через W группу Вейля пространства G/K , действующую на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$. Если $s \in W$ и v — линейная функция на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$, то мы пишем sv вместо v^s .

Предложение 6.8. Для каждой линейной функции v на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ положим

$$\varphi_v(x) = \int_K e^{(iv - \varrho)(H(xk))} dk.$$

Тогда $\varphi_{sv} = \varphi_v$ для каждого $s \in W$.

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\int_G \varphi_{sv}(x) f(x) dx = \int_G \varphi_v(x) f(x) dx \quad (9)$$

для каждой функции $f \in C_c(G)$. Поскольку φ_v и φ_{sv} двусторонне инвариантны относительно K , достаточно доказать (9) для всех функций f , двусторонне инвариантных относительно K . Используя формулу $dx = e^{2\rho(\log a)} dk da dn$ из предложения 1.11, имеем

$$\begin{aligned} \int_G \varphi_v(x) f(x) dx &= \int_K dk \int_G e^{(iv - \varrho)(H(xk))} f(x) dx = \\ &= \int_G e^{(iv - \varrho)(H(x))} f(x) dx = \int_{A_{\mathfrak{p}}} \int_N e^{(iv + \varrho)(\log a)} f(an) da dn, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_G \varphi_v(x) f(x) dx = \int_{A_{\mathfrak{p}}} e^{iv(\log a)} F_f(a) da, \quad (10)$$

где

$$F_f(a) = e^{\varrho(\log a)} \int_N f(an) dn.$$

Применяя теперь теорему 1.15, получаем формулу (9). Заметим, что формула (10) связывает абстрактное преобразование Фурье $\hat{f}$ функции f с классическим преобразованием Фурье функции F_f .

Рассмотрим теперь симметрические алгебры $S(\mathfrak{p})$ и $S(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$. Группа $\text{Ad}_G(K)$ действует на $S(\mathfrak{p})$, а группа Вейля W действует на $S(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$. Пусть $I(\mathfrak{p})$ и $I(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$ — соответствующие множества инвариантных многочленов. Обозначим через $S^*(\mathfrak{p})$ и $S^*(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$ симметрические алгебры над двойственными пространствами $\mathfrak{p}^\wedge$ и $(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})^\wedge$.

Так как форма Киллинга B не вырождена на $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$, то существует взаимно однозначное линейное отображение пространства $\mathfrak{p}$ на $\mathfrak{p}^\wedge$, переводящее $X \in \mathfrak{p}$ в линейную функцию $Y \rightarrow B(X, Y)$. Это отображение однозначно продолжается до изоморфизма алгебры $S(\mathfrak{p})$ на $S^*(\mathfrak{p})$. Аналогично, поскольку B не вырождена на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}} \times \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$, имеем изоморфизм алгебры $S(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$ на $S^*(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$. Эти изоморфизмы являются каноническими, и мы можем отождествить $S(\mathfrak{p})$ с $S^*(\mathfrak{p})$ и $S(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$ с $S^*(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$. В частности, $I(\mathfrak{p})$ и $I(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$ будут рассматриваться как алгебры полиномиальных функций на $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ соответственно. Мы будем рассматривать также вещественные симметрические алгебры $S(\mathfrak{p}_0)$, $S(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0})$ и соответствующие множества инвариантов $I(\mathfrak{p}_0)$ и $I(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0})$.

Лемма 6.9. *Кольцо $S(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0})$ является целым над $I(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0})$.*

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{p}_0$, и пусть, как обычно, T_X обозначает ограничение эндоморфизма $(\text{ad } X)^2$ на $\mathfrak{p}_0$. В характеристическом многочлене эндоморфизма T_X

$$\det(\lambda I - T_X) = \lambda^r + p_1(X) \lambda^{r-1} + \dots + p_{r-1}(X) \lambda$$

коэффициенты p_i являются инвариантными полиномиальными функциями на $\mathfrak{p}_0$, т. е. $p_i \in I(\mathfrak{p}_0)$. Из леммы 2.9 гл. VII мы знаем, что собственными значениями эндоморфизма T_H ($H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$) являются 0 и $(\alpha(H))^2$, где α пробегает P_+ . Следовательно,

$$\det(\alpha(H)^2 I - T_H) = 0 \quad \text{для всех } H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}.$$

Отсюда видно, что для каждого $\alpha \in P_+$ функция $\alpha^2 \in S(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0})$ и, значит, сам элемент α является целым над $I(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0})$. Так как каждая линейная функция на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ является линейной комбинацией этих элементов α , то получаем отсюда нашу лемму (следствие 5.3).

Если f — функция на $\mathfrak{p}$ (или $\mathfrak{p}_0$), то обозначим через $\bar{f}$ ее ограничение на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ (или $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$).

Теорема 6.10. *Отображение $\mathfrak{p} \rightarrow \bar{\mathfrak{p}}$ является изоморфизмом алгебры $I(\mathfrak{p})$ на $I(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$.*

Эта теорема принадлежит Шевалле (не опубликована, см. Хариш-Чандра [12], I, § 3). Доказательство будет дано в конце настоящего параграфа. Сейчас мы используем эту теорему для доказательства того, что все сферические функции на G даются формулой из предложения 6.7.

Поскольку линейная функция ϱ принимает на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ вещественные значения, существует единственный автоморфизм $\mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}'$ алгебры $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}_0} = S(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0})$, такой, что $\mathfrak{p}' H = H - \varrho(H)$ для $H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$. Построим теперь отображение γ алгебры $\mathbf{D}_0(G)$ в $S(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0})$ следующим образом: если $D \in \mathbf{D}_0(G)$, то положим $\gamma(D) = \mathfrak{p}' D_{\mathfrak{h}}$.

Лемма 6.11. *Отображение γ является гомоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $D', D'' \in \mathbf{D}_0(G)$. Тогда

$$D'D'' - D'_\mathfrak{h}D''_\mathfrak{h} = D'(D'' - D''_\mathfrak{h}) + (D' - D'_\mathfrak{h})D''_\mathfrak{h},$$

где $D'' - D''_\mathfrak{h}$ и $D' - D'_\mathfrak{h}$ принадлежат к $\mathfrak{f}_0\mathbf{D}(G) + \mathbf{D}(G)\mathfrak{n}_0$. Поскольку $TD' = D'T$ для $T \in \mathfrak{f}_0$, имеем

$$D'(D'' - D''_\mathfrak{h}) \in \mathfrak{f}_0\mathbf{D}(G) + \mathbf{D}(G)\mathfrak{n}_0.$$

Поскольку $[\mathfrak{n}_0, \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}] \subset \mathfrak{n}_0$, имеем

$$(D' - D'_\mathfrak{h})D''_\mathfrak{h} \in \mathfrak{f}_0\mathbf{D}(G) + \mathbf{D}(G)\mathfrak{n}_0.$$

Значит, $(D'D'')_\mathfrak{h} = D'_\mathfrak{h}D''_\mathfrak{h}$, откуда следует лемма.

Обозначим через λ отображение симметризации алгебры $S(\mathfrak{g}_0)$ на $\mathbf{D}(G)$. Если $p \in I(\mathfrak{p}_0)$, то $\lambda(p) \in \mathbf{D}_0(G)$ по лемме 2.4.

Лемма 6.12. Для каждого многочлена $p \in I(\mathfrak{p}_0)$, не являющегося константой,

$$\text{степень } (\gamma(\lambda(p)) - \bar{p}) < \text{степень } p. \quad (11)$$

Доказательство. Обозначим через d степень многочлена p . Можно допустить, что p однороден. Ограничение $\bar{p}$ можно рассматривать как элемент алгебры $S(\mathfrak{p}_0)$. Поскольку $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{f}_0 + \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} + \mathfrak{n}_0$, ясно, что

$$p - \bar{p} \in \mathfrak{f}_0 S^{d-1}(\mathfrak{g}_0) + S^{d-1}(\mathfrak{g}_0)\mathfrak{n}_0,$$

где $S^e(\mathfrak{g}_0)$ — множество однородных элементов в $S(\mathfrak{g}_0)$ степени e . Имеем $\lambda \bar{p} = \bar{p}$. Из определения отображения λ следует, что

$$\lambda(q_1 q_2) - \lambda(q_1)\lambda(q_2) \in \sum_{e < d_1 + d_2} \lambda(S^e(\mathfrak{g}_0)),$$

если $q_1 \in S^{d_1}(\mathfrak{g}_0)$, $q_2 \in S^{d_2}(\mathfrak{g}_0)$. Отсюда вытекает, что

$$\lambda(p) - \bar{p} \in \mathfrak{f}_0\mathbf{D}(G) + \mathbf{D}(G)\mathfrak{n}_0 + \sum_{e < d} \lambda(S^e(\mathfrak{g}_0)).$$

Теперь неравенство (11) следует из леммы 6.6 и из определения отображения γ .

Лемма 6.13. Ядром отображения γ является $\mathbf{D}_0(G) \cap \mathbf{D}(G)\mathfrak{f}_0$.

Доказательство. Пусть $D \in \mathbf{D}_0(G) \cap \mathbf{D}(G)\mathfrak{f}_0$. Тогда из соотношения (8) следует, что $\chi_\nu(D_\mathfrak{h}) = 0$ для каждой линейной функции ν на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$. Отсюда вытекает, что $D_\mathfrak{h} = 0$, так что $\gamma(D) = 0$. С другой стороны, пусть D — элемент ядра гомоморфизма γ . В силу следствия 2.6, имеем $D = \lambda(p) + D'$, где $D' \in \mathbf{D}_0(G) \cap \mathbf{D}(G)\mathfrak{f}_0$ и $p \in I(\mathfrak{p}_0)$. Таким образом, $\gamma(\lambda(p)) = 0$. Из разложения многочлена p на однородные компоненты ясно, что ограничение $\bar{p}$ имеет ту же степень, что p . Поэтому из леммы 6.12

следует, что $p=0$, так что $D \in D_0(G) \cap D(G)\mathfrak{f}_0$, как и требуется.

Лемма 6.14. *Образ $\gamma(D_0(G))$ есть $I(\mathfrak{h}_{p_0})$.*

Доказательство. Пусть $D \in D_0(G)$. Рассмотрим функцию φ_v из предложения 6.8. Из соотношения (8) и из определения гомоморфизма γ следует, что

$$D\varphi_v = \gamma(D)(iv)\varphi_v, \quad (12)$$

где $\gamma(D)(iv)$ — значение полиномиальной функции $\gamma(D) \in S(\mathfrak{h}_p)$ в точке $iv \in \mathfrak{h}_p$. Используя предложение 6.8, получаем, что $(\gamma(D))^s = \gamma(D)$ для $s \in W$, так что $\gamma(D) \in I(\mathfrak{h}_{p_0})$. Для доказательства того, что образ гомоморфизма γ совпадает со всей $I(\mathfrak{h}_{p_0})$, воспользуемся теоремой 6.10. Пусть q — произвольный однородный многочлен из $I(\mathfrak{h}_{p_0})$, и пусть d — его степень. Докажем индукцией по d , что существует такой $D \in D_0(G)$, что $\gamma(D) = q$. Это очевидно при $d=0$. Поэтому предположим, что $d > 0$. Пусть p — многочлен из $I(\mathfrak{p}_0)$, для которого $\bar{p} = q$. По лемме 6.12 многочлен $\gamma(\lambda(p)) - \bar{p}$ имеет степень, меньшую, чем d , а по лемме 6.14 он инвариантен. В силу предположения индукции, существует такой $D_1 \in D_0(G)$, что $\gamma(D_1) = \gamma(\lambda(p)) - \bar{p}$. Но тогда оператор $D = \lambda(p) - D_1$ лежит в $D_0(G)$ и удовлетворяет условию $\gamma(D) = q$.

Из четырех последних лемм видно, что γ есть гомоморфизм алгебры $D_0(G)$ на $I(\mathfrak{h}_{p_0})$ с ядром $D_0(G) \cap D(G)\mathfrak{f}_0$. Переходя к факторалгебре, получаем изоморфизм γ^* алгебры $D_0(G)/D_0(G) \cap D(G)\mathfrak{f}_0$ на $I(\mathfrak{h}_{p_0})$. С другой стороны, два оператора из $D_0(G)$ имеют одинаковые ограничения на $C_0^\infty(G)$ тогда и только тогда, когда их разность лежит в $D_0(G) \cap D(G)\mathfrak{f}_0$ (следствие 2.6). Итак, лемма 2.2 дает изоморфизм μ алгебры $D_0(G)/D_0(G) \cap D(G)\mathfrak{f}_0$ на $D(G/K)$. Полагая $\Gamma = \gamma^* \circ \mu^{-1}$, получаем следующую теорему.

Теорема 6.15. *Отображение Γ является изоморфизмом алгебры $D(G/K)$ на $I(\mathfrak{h}_{p_0})$.*

В частности, все операторы из $D(G/K)$ перестановочны, что уже было показано раньше (теорема 2.9). Теорема Шевалле [7] утверждает, что если конечная группа W линейных преобразований n -мерного векторного пространства порождается отражениями, то алгебра многочленов, инвариантных относительно W , порождена n алгебраически независимыми однородными многочленами и единицей. Так как группа Вейля, действующая на $\mathfrak{h}_{p_0}$, порождается отражениями, то из доказанной выше теоремы следует, что алгебра $D(G/K)$ порождена l алгебраически независимыми элементами, где $l = \text{ранг}(G/K)$.

Теперь можно, используя доказанные выше леммы о гомомор-

физме γ , показать, что все сферические функции на G задаются при помощи линейных функций на $\mathfrak{h}_{p_0}$.

Теорема 6.16. (Хариш-Чандра) Пусть $\varrho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in P_+} \alpha$.

Функции

$$\varphi_v(x) = \int_K e^{(iv-\varrho)(H(xk))} dk \quad (x \in G),$$

где v — комплекснозначная линейная функция на $\mathfrak{h}_{p_0}$, исчерпывают класс сферических функций на G . Далее, две такие функции φ_v и φ_λ совпадают тогда и только тогда, когда $v = \lambda^s$ для некоторого элемента s из группы Вейля.

Доказательство. Из предложения 6.7 мы знаем, что каждая φ_v является сферической функцией. Пусть теперь ψ произвольная сферическая функция на G/K . Тогда для $D \in D(G/K)$ имеем $D\psi = \lambda_D\psi$ и отображение $D \rightarrow \lambda_D$ есть гомоморфизм алгебры $D(G/K)$ в $\mathbb{C}$. Согласно теореме 6.15, ему соответствует некоторый гомоморфизм алгебры $I(\mathfrak{h}_{p_0})$ в $\mathbb{C}$. Этот гомоморфизм продолжается до гомоморфизма $\chi: S(\mathfrak{h}_{p_0}) \rightarrow \mathbb{C}$, так как кольцо $S(\mathfrak{h}_{p_0})$ является целым над $I(\mathfrak{h}_{p_0})$ (лемма 6.9). Очевидно, гомоморфизм χ есть продолжение некоторой линейной функции μ на $\mathfrak{h}_{p_0}$. Так как сферическая функция определяется соответствующей системой собственных значений (следствие 3.3), то функция

$$\int_K e^{(\mu-\varrho)(H(xk))} dk$$

должна совпадать с $\tilde{\psi}(x)$. Предположим теперь, что $\varphi_v = \varphi_\lambda$. Тогда, в силу равенства (9), $\gamma(D)(iv) = \gamma(D)(i\lambda)$ для всех $D \in D_0(G)$. Ввиду теоремы 6.15 это значит, что каждый многочлен $p \in I(\mathfrak{h}_{p_0})$ принимает в точках v и λ одинаковые значения. Если v и λ не сопряжены относительно группы Вейля, то существует такой многочлен $p \in S(\mathfrak{h}_{p_0})$, что $p > 0$ на орбите v^s ($s \in W$) и $p < 0$ на орбите λ^s ($s \in W$). Но тогда многочлен $p^* = \sum_{s \in W} p^s$ принадлежит $I(\mathfrak{h}_{p_0})$, но принимает различные значения в точках v и λ . Доказательство закончено.

Докажем теперь теорему 6.10. Изложенное ниже доказательство любезно предоставил в наше распоряжение Хариш-Чандра.

Лемма 6.17. Если $p_1, p_2 \in I(\mathfrak{p})$ и $p_1 = p_2 q$, где $q \in S(\mathfrak{p})$, то $q \in I(\mathfrak{p})$.

Доказательство. Если $q_0 = \int_K q^{\text{Ad}(h)} dk$, то $p_1 = p_2 q_0$, откуда $q = q_0 \in I(\mathfrak{p})$.

Лемма 6.18. Кольцо $I(\mathfrak{p})$ является целозамкнутым.

Доказательство. Пусть x — элемент поля отношений $S(I(\mathfrak{p}))$ кольца $I(\mathfrak{p})$. Предположим, что элемент x является целым над $I(\mathfrak{p})$. Тогда x , рассматриваемый как элемент поля $S(I(\mathfrak{p}))$, является целым над $S(\mathfrak{p})$. Но $S(\mathfrak{p})$ целозамкнуто, будучи областью с однозначным разложением (лемма 5.4). Значит, $x \in S(\mathfrak{p})$. Поэтому, в силу леммы 6.17, $x \in I(\mathfrak{p})$ и целозамкнутость кольца $I(\mathfrak{p})$ доказана.

Обозначим через $J \subseteq I(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$ образ кольца $I(\mathfrak{p})$ при отображении ограничения $p \rightarrow \bar{p}$. Так как каждый вектор $X \in \mathfrak{p}_0$ можно перевести в $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ при помощи некоторого $\text{Ad}(k)$ ($k \in K$) (лемма 6.3 гл. V), то отображение ограничения является изоморфизмом алгебры $I(\mathfrak{p})$ в $I(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$. В частности, кольцо J целозамкнуто. В силу теоремы 5.6, алгебры $I(\mathfrak{p})$ и J имеют конечное число образующих.

Лемма 6.19. Кольцо $S(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$ является целым над J .

Эта лемма содержится в доказательстве леммы 6.9. Нужно только заметить, что для $H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ эндоморфизм T_H имеет характеристический многочлен

$$\det(\lambda^2 I - T_H) = \lambda^{2r} + p_1(H) \lambda^{2r-2} + \dots + p_{r-l}(H) \lambda^{2l}, \quad (13)$$

где $p_i \in J$ ($1 \leq i \leq r-l$).

Лемма 6.20. Пусть $H_0 \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$ и $H_1 \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ и предположим, что $p(H_0) = p(H_1)$ для всех $p \in J$. Тогда $H_1 = sH_0$ для некоторого $s \in W$.

Доказательство. Из леммы 2.9 гл. VII ясно, что корнями многочлена (13) являются 0 и $\pm \alpha(H)$ ($\alpha \in P_+$). Так как

$$\det(\lambda^2 I - T_{H_0}) \equiv \det(\lambda^2 I - T_{H_1}),$$

то $\alpha(H_1)$ вещественно для всех $\alpha \in P_+$, откуда $H_1 \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$. Докажем теперь, что H_0 и H_1 сопряжены относительно $\text{Ad}_G(K)$. Действительно, предположим, что это не так. Тогда существует вещественная непрерывная функция f на $\mathfrak{p}_0$, тождественно равная 0 на компактной орбите $\text{Ad}_G(K)H_0$ и тождественно равная 1 на компактной орбите $\text{Ad}_G(K)H_1$. Согласно аппроксимационной теореме Вейерштрасса, существует такой многочлен $p \in S(\mathfrak{p}_0)$, что

$$|p(H) - 0| < \frac{1}{3} \quad \text{для } H \in \text{Ad}_G(K)H_0,$$

$$|p(H) - 1| < \frac{1}{3} \quad \text{для } H \in \text{Ad}_G(K)H_1.$$

Тогда многочлен

$$p^* = \int_K p^{\text{Ad}(k)} dk$$

принадлежит алгебре $I(\mathfrak{p}_0)$, но принимает в точках H_0 и H_1 различные значения. Это противоречие показывает, что $\text{Ad}(k)H_0 = H_1$ для некоторого $k \in K$. Используя предложение 2.2 гл. VII, выводим отсюда, что $sH_0 = H_1$ для некоторого $s \in W$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь многочлен

$$F(\lambda) = \lambda^{2r} + p_1 \lambda^{2r-2} + \dots + p_{r-l} \lambda^{2r-2l}.$$

Его коэффициенты лежат в J , а его корнями являются 0 и $\pm \bar{\alpha}$ (если обозначить через $\bar{\alpha}$ ограничение корня $\alpha \in P_+$ на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$). Поскольку пространство $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ натянуто на элементы $\bar{\alpha}$ ($\alpha \in P_+$) (мы отождествляем $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ с двойственным пространством), то ясно, что поле отношений $Q = C(S(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}))$ получается путем присоединения к полю $C(J)$ всех корней многочлена $F(\lambda)$. Значит, расширение $Q/C(J)$ нормально.

Пусть σ — автоморфизм поля Q , оставляющий неподвижным каждый элемент поля $C(J)$. Тогда σ переставляет корни многочлена $F(\lambda)$ и поэтому оставляет $S(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$ инвариантным. Фиксируем $H_0 \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$. Тогда отображение

$$\lambda: p \rightarrow p^\sigma(H_0) \quad (p \in S(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}))$$

есть гомоморфизм алгебры $S(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$ в C . Обозначим через H_1 единственный элемент из $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$, такой, что $\lambda(H) = B(H, H_1)$ для всех $H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ при нашем отождествлении алгебр $S(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$ и $S^*(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$. Тогда $\lambda(p) = p(H_1)$ для всех $p \in S(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$. Значит, для $p \in J$ имеем

$$p(H_1) = \lambda(p) = p^\sigma(H_0) = p(H_0).$$

Поэтому, в силу леммы 6.20, $H_1 = sH_0$ для некоторого $s \in W$. Пусть теперь $q \in I(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$. Тогда

$$q^\sigma(H_0) = q(H_1) = q(sH_0) = q(H_0).$$

Поскольку H_0 произволен в $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0}$, имеем $q^\sigma = q$. Итак, каждый автоморфизм поля Q , тождественный на $C(J)$, оставляет каждый элемент кольца $I(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0})$ неподвижным. Согласно теории Галуа, имеем $I(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}) \subseteq C(J)$. Но $I(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})$ является целым над J (лемма 6.19) и, как отмечено выше, J целозамкнуто. Значит, $I(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}) = J$, и доказательство закончено.

§ 7. Теоремы о среднем значении

1. Операторы среднего значения

Пусть G — связная группа Ли и K — компактная подгруппа. Обозначим через π естественное отображение группы G на многообразие G/K и, как обычно, положим $o = \pi(e)$. С каждым $x \in G$ свяжем линейное преобразование M^x пространства непрерывных

функций на G/K , определенное следующим образом. Пусть $f \in C(G/K)$ и $p \in G/K$. Выберем такой элемент $g \in G$, что $\pi(g) = p$. Тогда функция $M^x f$ определяется формулой

$$[M^x f](p) = \int_K f(gk \cdot \pi(x)) dk,$$

где dk — двусторонне инвариантная мера на K , нормированная условием $\int_K dk = 1$.

Подгруппой изотропии группы G в точке p является gKg^{-1} . Орбита точки $g \cdot \pi(x)$ относительно этой группы — это множество $\{gk \cdot \pi(x) | k \in K\}$, так что $[M^x f](p)$ является средним арифметическим значений функции f на этой орбите. Таким образом, не обязательно предполагать, что f определена на всем многообразии G/K . Если $\tilde{f} = f \circ \pi$, то

$$[M^x f](p) = \int_K \tilde{f}(gkx) dk, \quad (1)$$

и очевидно, что $M^{kxk'} = M^x$ для $x \in G$, $k, k' \in K$.

Ввиду следствия 2.8 и теоремы 5.6 алгебра $D(G/K)$ порождена конечным набором операторов $\Delta_1, \dots, \Delta_l$ и тождественным оператором I . Можно допустить, что каждый из операторов $\Delta_1, \dots, \Delta_l$ аннулирует константы («не имеет постоянного члена»). Следующая лемма показывает, грубо говоря, что каждый оператор среднего значения M^x является функцией от дифференциальных операторов $\Delta_1, \dots, \Delta_l$.

Лемма 7.1. Пусть $p \in G/K$, и пусть f — аналитическая функция в окрестности U точки p . Существуют окрестность N точки e в G и окрестность $V \subset U$ точки p , обладающие следующим свойством: для каждого $x \in N$ имеется такая последовательность многочленов $P_1, P_2, \dots$ без постоянных членов, что

$$[M^x f](q) = f(q) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(\Delta_1, \dots, \Delta_l) f](q)$$

для $q \in V$.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{k}$ алгебры Ли групп G и K соответственно и через $\mathfrak{p}$ — фиксированное подпространство в $\mathfrak{g}$, такое, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ (прямая сумма) и $\text{Ad}_G(K) \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$. Выберем на $\mathfrak{p}$ положительно определенную квадратичную форму, инвариантную относительно $\text{Ad}_G(K)$. Она порождает G -инвариантную риманову структуру на G/K . Выберем ортонормированный базис $X_1, \dots, X_r$ пространства $\mathfrak{p}$. Пусть B — подмногообразие в G , которое π диффеоморфно отображает на окрестность $W \subset U$ точ-

ки p . Для каждого $q \in W$ обозначим через g_q элемент множества B , для которого $\pi(g_q) = q$. Отображение

$$(t_1, \dots, t_r) \rightarrow \pi(g_p \exp(t_1 X_1 + \dots + t_r X_r))$$

есть диффеоморфизм открытого шара в $\mathbf{R}^r$ на открытую окрестность W_p точки p . Обратное отображение, которое мы обозначим через φ_p , является системой координат на W_p . Для каждого $q \in W$ положим

$$\varphi_q = \varphi_p \circ \tau(g_p g_q^{-1}), \quad W_q = \tau(g_p g_q^{-1}) W_p.$$

Тогда пара (φ_q, W_q) есть локальная карта на G/K , покрывающая точку q . Ясно, что W_q «близка» к W_p , если точка q близка к p . Значит, можно выбрать такую маленькую открытую окрестность V' точки p , что для каждого $q \in V'$ окрестность W_q содержит V' и что разложение каждой функции $f \circ \varphi_p^{-1}$ в ряд Тэйлора

$$(f \circ \varphi_p^{-1})(t_1, \dots, t_r) = \sum a_{n_1 \dots n_r}(p) t_1^{n_1} \dots t_r^{n_r}$$

абсолютно сходится в $\varphi_p(V')$. Координаты $t_i(\varphi_p(s))$ и $t_j(\varphi_q(s))$ связаны соотношением

$$\begin{aligned} \pi(g_p \exp(t_1(\varphi_p(s)) X_1 + \dots + t_r(\varphi_p(s)) X_r)) &= \\ &= \pi(g_q \exp(t_1(\varphi_q(s)) X_1 + \dots + t_r(\varphi_q(s)) X_r)) \end{aligned}$$

для $s \in W_q \cap W_p$. Уменьшая далее V' , можно предположить, что для каждого $q \in V'$ имеем

$$t_i(\varphi_p(s)) = P_q^i(t_1(\varphi_q(s)), \dots, t_r(\varphi_q(s))) \quad (1 \leq i \leq r),$$

где $P_q^1, \dots, P_q^r$ — степенные ряды, абсолютно сходящиеся для $s \in V'$. Если подставить выражения для $t_i(\varphi_p(s))$ в ряд Тэйлора для $f \circ \varphi_p^{-1}$, то получится ряд Тэйлора для функции $f \circ \varphi_q^{-1}$ в начале координат. Поэтому можно еще раз уменьшить V' таким образом, чтобы для каждого $q \in V'$ разложение Тэйлора для $f \circ \varphi_q^{-1}$

$$f \circ \varphi_q^{-1} = \sum a_{n_1 \dots n_r}(q) t_1^{n_1} \dots t_r^{n_r}$$

абсолютно сходилось на $\varphi_q(V')$. Поскольку $\varphi_q(V') = \varphi_p(\tau(g_p g_q^{-1}) V')$, можно выбрать такую открытую окрестность V точки p , что $p \in V \subset V'$ и что множество $\bigcap_{q \in V} \varphi_q(V')$ содержит открытый шар

$\sum_i t_i^2 < \delta^2$ пространства $\mathbf{R}^r$. Можно допустить, что $K \cdot V \subset V$ и что V имеет компактное замыкание, содержащееся в V' .

Пусть теперь $X \in B_\delta(0) \subset \mathfrak{p}$ и $q \in V$. Тогда

$$[M^{\exp X} f](q) = \int_K \tilde{f}(g_q k \exp X k^{-1}) dk = \int_K \tilde{f}(g_q \exp \text{Ad}(k) X) dk.$$

Полагая $\text{Ad}(k)X = t_1X_1 + \dots + t_rX_r$, имеем, в силу формулы (16) из § 2,

$$\begin{aligned} [(\text{Ad}(k)X)^m \tilde{f}](g_q) &= \\ &= \left[\left(t_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + t_r \frac{\partial}{\partial x_r} \right)^m \tilde{f}(g_q \exp(x_1X_1 + \dots + x_rX_r)) \right] (0) = \\ &= \left[\left(t_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + t_r \frac{\partial}{\partial x_r} \right)^m (f \circ \varphi_q^{-1})(x_1, \dots, x_r) \right] (0). \end{aligned}$$

Так как $t_1^2 + \dots + t_r^2 < \delta^2$ и так как ряд Тэйлора для $f \circ \varphi_q^{-1}$ сходится в шаре $t_1^2 + \dots + t_r^2 < \delta^2$, то имеем

$$\int_K \tilde{f}(g_q \exp \text{Ad}(k)X) dk = \int_K \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} [(\text{Ad}(k)X)^m \tilde{f}](g_q) dk.$$

В силу равномерной сходимости рядов Тэйлора, суммирование и интегрирование можно поменять местами. Для $m > 0$ дифференциальный оператор

$$D_X = \int_K (\text{Ad}(k)X)^m dk = \int_K \text{Ad}(k) \cdot X^m dk$$

принадлежит алгебре $D_0(G)$ (см. (2) § 3). Этот оператор порождает оператор из $D(G/K)$ (лемма 2.2), который можно записать в виде $m! P_m(\Delta_1, \dots, \Delta_l)$, где P_m — многочлен без постоянного члена. Так как

$$D_X \tilde{F} = (m! P_m(\Delta_1, \dots, \Delta_l) F)^\sim$$

для $F \in C^\infty(G/K)$, то получаем, что

$$[M^{\exp X} f](q) = f(q) + \sum_{m=1}^{\infty} [P_m(\Delta_1, \dots, \Delta_l) f](q).$$

Значит, если положить

$$N = \exp B_\delta(0) \cdot K,$$

что, действительно, является окрестностью точки e в G , то лемма 7.1 будет доказана.

Теорема 7.2. Пусть V — открытое подмножество в G/K . Пусть φ — комплекснозначная функция на V , являющаяся собственной функцией каждого из операторов $\Delta_1, \dots, \Delta_l$. Тогда для каждого $q \in V$ имеем

$$[M^x \varphi](q) = \lambda_x \varphi(q) \quad (\lambda_x \in \mathbb{C}) \quad (2)$$

в предположении, что x достаточно близка к e в G . С другой стороны, непрерывная функция на V , обладающая свойством (2), является собственной функцией операторов $\Delta_1, \dots, \Delta_l$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\Delta_i \varphi = \lambda_i \varphi$ для $1 \leq i \leq l$, где $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Тогда φ — собственная функция всех $D \in \mathbf{D}(G/K)$. Среди этих D имеется оператор Лапласа — Бельтрами пространства G/K . Так как последний эллиптичен и имеет аналитические коэффициенты, то функция φ аналитична (ср. доказательство предложения 3.2). Теперь формула (2) непосредственно следует из леммы 7.1.

С другой стороны, предположим, что непрерывная функция φ удовлетворяет условию (2). Пусть $q \in V$. Выберем такой $g_0 \in G$, чтобы $\pi(g_0) = q$. Тогда

$$\int_K \tilde{\varphi}(gkx) dk = \lambda_x \tilde{\varphi}(g) \quad (3)$$

для всех g из окрестности элемента g_0 и всех x из окрестности N элемента e . Из формулы (3) ясно (если допустить, что $\tilde{\varphi} \neq 0$), что λ_x непрерывно зависит от x . Пусть $\varrho(x)$ — такая дифференцируемая функция на G с носителем, содержащимся в N , что $\int_G \varrho(x) \lambda_x dx = 1$. Тогда из соотношения (3) следует, что

$$\tilde{\varphi}(g) = \int_G \varrho(x) \int_K \tilde{\varphi}(gkx) dk dx = \int_G \varphi(y) \int_K \varrho(yk^{-1}g^{-1}) dk dy,$$

откуда видно, что $\tilde{\varphi}$, а значит, и φ , дифференцируема. Значит, $\lambda_x = \lambda(x)$ дифференцируемым образом зависит от x . Пусть D — произвольный оператор из $\mathbf{D}_0(G)$. Применим D к равенству (3) по переменному x . Тогда получим

$$\int_K [D\tilde{\varphi}](gkx) dk = [D\lambda](x) \tilde{\varphi}(g).$$

Полагая $x = e$, придем к равенству

$$[D\tilde{\varphi}](g) = [D\lambda](e) \tilde{\varphi}(g), \quad (4)$$

так что $\tilde{\varphi}$ — собственная функция каждого Δ_i ($1 \leq i \leq l$).

Следствие 7.3. Пусть V — открытое множество в G/K . Функция u на V , удовлетворяющая уравнениям

$$\Delta_1 u = \dots = \Delta_l u = 0,$$

характеризуется тем свойством, что

$$[M^x u](q) = u(q)$$

для каждого $q \in V$, где x достаточно близок к e в G .

Действительно, из формулы (4) видно, что $[D\lambda](e) = 0$ для каждого $D \in \mathbf{D}_0(G)$. Поскольку функция $\lambda(x)$ двусторонне инва-

риантна относительно K , из соотношения (3) § 3 видно, что $\lambda(x)$ постоянна.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим частный случай, когда M — евклидово пространство или риманово глобально симметрическое пространство ранга 1 (и размерности > 1), а $G = I_0(M)$. В этом случае $D(G/K)$ порождается одним оператором Лапласа — Бельтрами Δ и K транзитивно действует на каждой сфере $S_r(o)$. Значит, M^x — это в точности операция усреднения по сфере фиксированного радиуса. Следствие 7.3 утверждает, что решения уравнения $\Delta u = 0$ на M характеризуются тем свойством, что среднее значение функции u на каждой сфере в M равно ее значению в центре сферы. В евклидовом пространстве это есть теорема Гаусса о среднем значении для гармонических функций.

Предложение 3.2 дает нам интегральное уравнение, характеризующее те собственные функции операторов $\Delta_1, \dots, \Delta_l$, которые инвариантны относительно действия группы K . Из теоремы 7.2 получается следующее обобщение.

С л е д с т в и е 7.4. Пусть φ — функция на G/K , удовлетворяющая условию $\varphi(o) = 1$. Тогда φ является собственной функцией всех $\Delta_1, \dots, \Delta_l$ в том и только том случае, когда

$$\int_K \tilde{\varphi}(gkx) dk = \tilde{\varphi}(g) \int_K \tilde{\varphi}(kx) dk \quad (x, g \in G). \quad (5)$$

Действительно, если соотношение (5) имеет место для всех x из окрестности точки e , то, в силу аналитичности функции $\tilde{\varphi}$, оно должно иметь место для всех $x \in G$ (лемма 4.3 гл. VI).

З а м е ч а н и е. Пусть φ — сферическая функция на G/K . Тогда $\Delta_i \varphi = \lambda_i \varphi$ ($1 \leq i \leq l$), где $\lambda_i \in \mathbb{C}$, и $M^x \varphi = \tilde{\varphi}(x) \varphi$. Поэтому из леммы 7.1 имеем

$$\tilde{\varphi}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\lambda_1, \dots, \lambda_l),$$

если x достаточно мал, и формально

$$M^x = I + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\Delta_1, \dots, \Delta_l). \quad (6)$$

В качестве примера возьмем $M = \mathbb{R}^2$, $G = I_0(M)$. Согласно § 3, функция

$$\varphi(x, y) = J_0(\sqrt{-\lambda} \sqrt{x^2 + y^2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} \lambda^k (x^2 + y^2)^k$$

есть сферическая функция на M , удовлетворяющая условию $\Delta\varphi = \lambda\varphi$. Формула (6) превращается в этом случае в хорошо известное разложение

$$M^r = J_0(\sqrt{-\Delta}r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} \Delta^k r^{2k}$$

оператора M^r усреднения по сферам радиуса r .

2. Приближения аналитическими функциями

Так как лемма 7.1 имеет место только для аналитических функций, то, чтобы применить ее к функциям класса C^∞ , нужно аппроксимировать последние аналитическими функциями. В связи с этой задачей мы напомним некоторые факты, касающиеся аналитических векторов для представлений групп Ли.

Пусть M — аналитическое многообразие и $\mathfrak{H}$ — (комплексное) банахово пространство. Отображение $f: M \rightarrow \mathfrak{H}$ называется *аналитическим* в точке $p \in M$, если существует такая система координат $\{x_1, \dots, x_m\}$ в окрестности U точки p , что $x_1(p) = \dots = x_m(p) = 0$ и что

$$f(q) = \sum a_{n_1 \dots n_m} x_1(q)^{n_1} \dots x_m(q)^{n_m} \quad (q \in U),$$

где коэффициенты $a_{n_1 \dots n_m}$ принадлежат к $\mathfrak{H}$ и ряд абсолютно сходится. (Ряд $\sum a_n$, где $a_n \in \mathfrak{H}$, называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum \|a_n\|$, где $\|\cdot\|$ обозначает норму в $\mathfrak{H}$.)

Следующие две леммы очевидны.

Лемма 7.5. *Рассмотрим два отображения $\varphi: M \rightarrow M$ и $f: M \rightarrow \mathfrak{H}$. Если φ аналитично в точке $p \in M$, а f аналитично в точке $\varphi(p)$, то композиция отображений $f \circ \varphi: M \rightarrow \mathfrak{H}$ аналитична в точке p .*

Лемма 7.6. *Пусть отображение $f: M \rightarrow \mathfrak{H}$ аналитично в точке p , и пусть F — непрерывное линейное отображение пространства $\mathfrak{H}$ в $\mathbb{C}$. Тогда функция $F \circ f$ аналитична в точке p .*

Определение. Пусть G — группа Ли и π — представление группы G в банаховом пространстве $\mathfrak{H}$. Вектор $e \in \mathfrak{H}$ называется *аналитическим* (относительно π), если отображение $x \rightarrow \pi(x)e$ есть аналитическое отображение группы G в $\mathfrak{H}$.

Обозначим через $\mathfrak{A}_\pi$ множество аналитических относительно π векторов. Очевидно, что $\mathfrak{A}_\pi$ — линейное подпространство в $\mathfrak{H}$. Если $e \in \mathfrak{A}_\pi$ и $y \in G$, то отображение $x \rightarrow \pi(x)\pi(y)e$ является композицией аналитических отображений $x \rightarrow xy$ и $x \rightarrow \pi(x)e$. Используя лемму 7.5, получаем, что $\pi(y)e \in \mathfrak{A}_\pi$.

Лемма 7.7. Пространство $\mathcal{A}_\pi$ инвариантно относительно каждого $\pi(y)$ ($y \in G$).

Если $\mathfrak{H}$ конечномерно, то каждый вектор $e \in \mathfrak{H}$ аналитичен. Это частный случай теоремы, согласно которой непрерывный гомоморфизм одной группы Ли в другую аналитичен. Для банаховых пространств $\mathfrak{H}$ бесконечной размерности справедлива следующая

Теорема 7.8. Пространство $\mathfrak{H}_\pi$ аналитических векторов плотно в $\mathfrak{H}$.

Эта теорема была доказана Хариш-Чандра [4], стр. 220, для полупростых групп Ли и обобщена Нелсоном на произвольные группы Ли [1]. Самое короткое доказательство принадлежит Гордингу [1], который, как и Нелсон, использует уравнение теплопроводности на группе. Мы воспользуемся этой теоремой для доказательства следующей леммы о приближениях аналитическими функциями.

Лемма 7.9. Пусть $F_1, \dots, F_n$ — конечное множество ограниченных непрерывных функций на G , C — компактное подмножество в G и ε — положительное число. Тогда на G существует такая аналитическая интегрируемая функция φ , что свертка $\varphi * F_i$ аналитична и что

$$|(\varphi * F_i)(x) - F_i(x)| < \varepsilon \quad (1 \leq i \leq n) \quad (7)$$

для всех $x \in C$. Если каждая F_i имеет компактный носитель, то φ можно выбрать таким образом, чтобы соотношение (7) имело место для всех $x \in G$.

Доказательство. Обозначим через $L^1(G)$ банахово пространство функций на G , интегрируемых по левоинвариантной мере dg на G . Норма в $L^1(G)$ имеет вид

$$\|f\| = \int_G |f(g)| dg.$$

Пространство $L^1(G)$ является пополнением групповой алгебры по этой норме. Для каждого $x \in G$ обозначим через $\pi(x)$ эндоморфизм пространства $L^1(G)$, заданный формулой $[\pi(x)f](y) = f(x^{-1}y)$ ($f \in L^1(G)$, $y \in G$). В силу левой инвариантности меры dg , имеем $\|\pi(x)f\| = \|f\|$. Если $f \in C_c(G)$ и $\delta > 0$, то существует такая окрестность V точки e в G , что $|f(x^{-1}y) - f(y)| < \delta$ для всех $x \in V$ и всех $y \in G$. Отсюда следует, что отображение $x \rightarrow \pi(x)f$ группы G в $L^1(G)$ непрерывно. Из того, что групповая алгебра плотна в $L^1(G)$, вытекает, что эта непрерывность имеет место для всех $f \in L^1(G)$. Значит, отображение $x \rightarrow \pi(x)$ есть представление группы G в $L^1(G)$. Пусть $h \in L^1(G)$ — вектор, аналитический относительно π . Если $x \in G$, то вектор $\pi(x)h$ также аналитичен

(лемма 7.7). Если F — ограниченная непрерывная функция на G , то по лемме 7.6 функция

$$x \rightarrow \int_G F(y^{-1}) [\pi(x^{-1})h](y) dy,$$

которая есть как раз функция $h * F$, аналитична. Пусть теперь U — компактная окрестность точки e в G , и пусть γ_U — положительная непрерывная функция на G с носителем, содержащимся в U , удовлетворяющая условию $\int \gamma_U(x) dx = 1$. Тогда, если U достаточно мала, имеем

$$|(\gamma_U * \gamma_U * F_i)(x) - F_i(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1 \leq i \leq n) \quad (8)$$

для всех $x \in C$. Согласно теореме 7.8, существует последовательность (φ_n) аналитических векторов, сходящаяся к γ_U . Так как

$$\int_G |\varphi_n(y) - \gamma_U(y)| dy \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, то ясно, что для каждой ограниченной непрерывной функции F на G последовательность $\varphi_n * F$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится к $\gamma_U * F$ равномерно на G . В частности, если N достаточно велико, то функция φ_N удовлетворяет условию

$$|(\varphi_N * \gamma_U * F_i)(x) - (\gamma_U * \gamma_U * F_i)(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (x \in G, 1 \leq i \leq n). \quad (9)$$

Первое утверждение леммы 7.9 (для $\varphi = \varphi_N * \gamma_U$) сразу следует из формул (8) и (9). Далее, если каждая функция F_i имеет компактный носитель, то U можно выбрать так, чтобы соотношение (8) имело место для всех $x \in G$. Тем самым доказательство леммы закончено.

3. Уравнение Дарбу на симметрическом пространстве

Теорема 7.10. Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара и K компактна. Тогда для каждого $x \in G$ оператор среднего значения M^x перестановочен со всеми операторами из $D(G/K)$.

Доказательство. Пусть сначала f — аналитическая функция на G/K , и пусть $D \in D(G/K)$. Тогда функция Df также аналитична. Пользуясь коммутативностью алгебры $D(G/K)$ (теорема 2.9) и леммой 7.1, получаем, что для каждой $p \in G/K$ соотношение

$$[DM^x f](p) = [M^x Df](p) \quad (10)$$

имеет место для всех x из некоторой окрестности точки e в G . Но ввиду леммы 3.1 обе части равенства (10) аналитичны по

переменному x . Таким образом, (10) справедливо для всех $x \in G$ и всех $p \in G/K$.

Фиксируем теперь $x \in G$ и рассмотрим оператор N^x в пространстве $C(G)$, заданный формулой

$$[N^x F](g) = \int_K F(gkx) dk.$$

Обозначим через D_0 оператор из $D_0(G)$, соответствующий оператору D по лемме 2.2. Докажем теперь (10) для каждой $f \in C_c^\infty(G/K)$. Из леммы 7.9 видно, что существует такая последовательность (φ_n) непрерывных функций на G , что последовательности $(\varphi_n * \tilde{f})$, $(\varphi_n * D_0 N^x \tilde{f})$ и $(\varphi_n * N^x D_0 \tilde{f})$ состоят из аналитических функций и сходятся к функциям $\tilde{f}$, $D_0 N^x \tilde{f}$ и $N^x D_0 \tilde{f}$ равномерно на G . Прямая проверка показывает, что

$$\varphi_n * N^x \tilde{f} = N^x (\varphi_n * \tilde{f}), \quad (11)$$

$$\varphi_n * D_0 \tilde{f} = D_0 (\varphi_n * \tilde{f}). \quad (12)$$

Поскольку соотношение (10) имеет место для аналитических функций $\tilde{f}$, имеем

$$D_0 N^x (\varphi_n * \tilde{f}) = N^x D_0 (\varphi_n * \tilde{f}).$$

Поэтому, в силу равенств (11) и (12),

$$\varphi_n * D_0 N^x \tilde{f} = \varphi_n * N^x D_0 \tilde{f}.$$

Переходя к пределам, получаем $D_0 N^x \tilde{f} = N^x D_0 \tilde{f}$, откуда $DM^x f = M^x Df$. Наконец, пусть f — произвольная функция из $C^\infty(G/K)$. Для каждого компактного подмножества $C \subset G/K$ существует функция $f_C \in C_c^\infty(G/K)$, совпадающая с f на C . Если $p \in G/K$ и $x \in G$, то числа $[DM^x f](p)$ и $[M^x Df](p)$ зависят только от значений функции f на некотором компактном множестве. Так как (10) имеет место для f_C , то оно справедливо и для f .

Следствие 7.11. Если $\pi(x) = q$, то будем писать M^q вместо M^x . Для $f \in C^\infty(G/K)$ положим

$$F(p, q) = [M^q f](p) \quad (p, q \in G/K).$$

Тогда для каждого $D \in D(G/K)$ имеем

$$D_1 F = D_2 F, \quad (13)$$

где индексы 1, 2 указывают, что D действует на первый и второй аргументы соответственно.

Для проверки равенства (13) выберем такой элемент $g \in G$, что $\pi(g) = p$. Тогда, используя теорему и инвариантность оператора D ,

получаем

$$\begin{aligned} [D_1 F](p, q) &= [DM^q f](p) = [M^q Df](p) = \int_K [Df](gk \cdot q) dk = \\ &= \int_K [(Df)^{\tau(k^{-1}g^{-1})}](q) dk = [D \int_K f^{\tau(k^{-1}g^{-1})} dk](q) = [D_2 F](p, q). \end{aligned}$$

Рассмотрим формулу (13) в случае евклидова пространства $\mathbf{R}^n$. Если функция $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ имеет вид

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \psi(r), \quad r = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2},$$

то

$$\Delta \varphi = \frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d\psi}{dr}$$

(см. лемму 7.12 ниже). Если писать M^r вместо M^q для $r = d(0, q)$, то из равенства (13) видно, что функция $F(p, r) = [M^r f](p)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta_p F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial F}{\partial r},$$

которое в литературе иногда называют уравнением Дарбу.

4. Уравнение Пуассона в двухточечном однородном пространстве

Пусть M — евклидово или риманово глобально симметрическое пространство ранга 1. Мы дадим сейчас явную формулу для решения уравнения Пуассона $\Delta u = f$ на M .

Для каждой точки $p \in M$ обозначим, как обычно, через $S_r(p)$ сферу в M с центром p и радиусом r . Если M не компактно, то $S_r(p)$ является образом сферы в касательном пространстве M_p при диффеоморфизме Exp_p . Если M компактно, то обозначим через L его диаметр, т. е. максимум расстояний между двумя точками пространства M . Если $r < L$, то $S_r(p)$ есть образ сферы в M_p при диффеоморфизме (теорема 5.4 гл. IX). Конечно, это не верно для $S_L(p)$ (рассмотрим, например, $M = \mathbf{S}^2$). Но $S_L(p)$ является подмногообразием в M , будучи орбитой компактной подгруппы группы $I(M)$ (предложение 4.4 гл. II).

В любом случае $S_r(p)$ для каждого r есть подмногообразие в M и обладает римановой структурой, индуцированной структурой пространства M . Обозначим через $A(r)$ полную меру многообразия $S_r(p)$, соответствующую римановой мере на $S_r(p)$. (Если $\dim M = 1$, т. е. $M = \mathbf{R}$ или $M = \mathbf{S}^1$, то под $A(r)$ следует понимать число точек в $S_r(p)$.) Мы будем называть $A(r)$ площадью сферы $S_r(p)$. Объем шара $B_r(p)$ в M будет обозначаться через $V(r)$. Так как M однородно, т. е. обладает транзитивной группой изо-

метрий, то $A(r)$ и $V(r)$ не зависят от r . Обозначим через d расстояние на M .

Пусть $n = \dim M$, и пусть $\{\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, r\}$ — система геодезических полярных координат в точке $p \in M$ (§ 3). Здесь r пробегает интервалы $0 < r < \infty$ в некомпактном случае и $0 < r < L$ в компактном случае (теорема 5.4 гл. IX). Систему $\{\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, r\}$ можно рассматривать как систему координат на открытом подмножестве в $S_r(p)$.

Лемма 7.12. *В геодезических полярных координатах в точке p , описанных выше, оператор Лапласа — Бельтрами Δ на M имеет вид*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{A(r)} \frac{dA}{dr} \frac{\partial}{\partial r} + \Delta',$$

где Δ' — оператор Лапласа — Бельтрами на $S_r(p)$. Здесь $0 < r < \infty$, если M не компактно, и $0 < r < L$, если M компактно.

Доказательство. Пусть $\theta_n = r$. Обозначим через

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\theta_1, \dots, \theta_n) d\theta_i d\theta_j \quad (14)$$

риманову структуру на M , выраженную в геодезических полярных координатах в точке p . Пусть, как и раньше, $\bar{g} = \det(g_{ij})$ и $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ (обратная матрица для матрицы (g_{ij})). Как показано в главе I, геодезические, выходящие из точки p , пересекают $S_r(p)$ ортогонально. Поэтому (14) принимает вид

$$ds^2 = dr^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, r) d\theta_i d\theta_j. \quad (15)$$

Если I — тождественное отображение сферы $S_r(p)$ в M , то имеем $I^*(dr^2) = 0$, так что риманова структура на $S_r(p)$ имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, r) d\theta_i d\theta_j. \quad (16)$$

Используя формулу (15), получим

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\partial \sqrt{\bar{g}}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(g^{ij} \sqrt{\bar{g}} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right). \quad (17)$$

Если обозначить через A матрицу $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ и через B — матрицу $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1}$, то

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = \det B.$$

Следовательно, последний член в соотношении (17) есть оператор Лапласа — Бельтрами Δ' на $S_r(p)$.

Подгруппа изотропии группы $I(M)$ в точке p транзитивно действует на множестве геодезических, выходящих из p . Отсюда следует, что функция

$$\Delta r = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial r}$$

зависит только от r , так что

$$\log \sqrt{g} = \alpha(r) + \beta(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$$

и

$$\sqrt{g} = e^{\alpha(r)} e^{\beta(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})}$$

для подходящих функций α и β . Заметим, что $\alpha'(r)$ не зависит от выбора координат $\{\theta_1, \dots, \theta_{n-1}\}$. Тем же свойством обладает $\alpha(r)$, если, например, фиксировать $\alpha\left(\frac{L}{2}\right)$, положив $\alpha\left(\frac{L}{2}\right) = 1$. Имеем

$$A(r) = \int_{S_r(p)} d\mu,$$

где $d\mu$ — риманова мера на $S_r(p)$, которая локально задается формулой $|\det B|^{1/2} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} = \sqrt{g} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}$. Вспоминая, что $\alpha(r)$ не зависит от выбора координат $\{\theta_1, \dots, \theta_{n-1}\}$, получаем, что

$$A(r) = C e^{\alpha(r)} \quad (C — \text{константа}),$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial r} = \frac{1}{A(r)} \frac{dA}{dr}.$$

На этом доказательство заканчивается.

Объем $V(r)$ шара $B_r(p)$ дается формулой

$$V(r) = \int_{B_r(p)} dq,$$

где dq — риманова мера на M , которая локально записывается в виде $\sqrt{g} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}$. Отсюда следует, что

$$V(r) = \int_0^r A(t) dt.$$

Теорема 7.13. Пусть M — евклидово пространство или риманово глобально симметрическое пространство ранга 1. Пусть $f \in C_c^\infty(M)$. Решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = f$$

можно получить следующим образом.

(i) Если M не компактно, то

$$u(p) = \int_M H(p, q) f(q) dq, \quad (18)$$

где

$$H(p, q) = \int_1^{d(p, q)} \frac{1}{A(r)} dr. \quad (19)$$

(ii) Если M компактно, то решение существует тогда и только тогда, когда $\int f(q) dq = 0$. Если это условие выполняется, то единственное решение уравнения $\Delta u = f$, удовлетворяющее условию $\int u(q) dq = 0$, имеет вид

$$u(p) = \int_M G(p, q) f(q) dq,$$

где

$$G(p, q) = \frac{1}{V(L)} \int_L^{d(p, q)} \frac{V(L) - V(r)}{A(r)} dr.$$

Доказательство утверждения (i). Мы имеем

$$u(p) = \int_0^\infty dr \int_{S_r(p)} H(p, q) f(q) d\mu(q) = \int_0^\infty \psi(r) A(r) [M^r f](p) dr,$$

где

$$\psi(r) = \int_0^r \frac{1}{A(t)} dt$$

и $[M^r f](p)$ — среднее значение функции f на сфере $S_r(p)$. Используя теперь следствие 7.11 и лемму 7.12, получим

$$[\Delta u](p) = \int_0^\infty \psi(r) A(r) [\Delta M^r f](p) dr = \int_0^\infty \psi(r) A(r) \Delta_r [M^r f](p) dr,$$

где

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{A(r)} \frac{dA}{dr} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Оставляя точку p фиксированной и полагая $F(r) = [M^r f](p)$, имеем

$$\begin{aligned} [\Delta u](p) &= \int_0^\infty \{\psi(r) A(r) F''(r) + \psi(r) A'(r) F'(r)\} dr = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\psi(r) A(r) F'(r)]_\varepsilon^\infty - \int_0^\infty F'(r) dr. \end{aligned}$$

Но $\psi(\varepsilon) A(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $F(r) = 0$ для всех достаточно больших r . Поэтому

$$[\Delta u](p) = F(0) = f(p).$$

Выбор функции $H(p, q) = \psi(d(p, q))$ был, конечно, подсказан тем фактом, что уравнение

$$[\Delta_2 H](p, q) = \delta_p, \quad (20)$$

где δ_p — дельта-функция $f \rightarrow f(p)$, приводит к уравнению

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{1}{A(r)} \frac{dA}{dr} \frac{d\psi}{dr} = 0.$$

Доказательство утверждения (ii). В компактном случае имеем $\int \Delta u(q) dq = 0$ для каждой $u \in C^\infty(M)$ (§ 6, п. 3). Принимая этот факт во внимание, заменим (20) уравнением

$$[\Delta_2 G](p, q) = \frac{1}{V(L)} (\delta_p - 1),$$

которое при $G(p, q) = \varphi(d(p, q))$ приводит к уравнению

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{A(r)} \frac{dA}{dr} \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{V(L)} \quad (0 < r < L). \quad (21)$$

Коэффициенты последнего в общем случае неограничены вблизи значений $r = 0$ и $r = L$. Функция

$$\varphi(r) = \frac{1}{V(L)} \int_L^r \frac{V(L) - V(t)}{A(t)} dt$$

есть решение уравнения (21), неограниченное вблизи $r = 0$ (при $n > 1$), но ограниченное вблизи $r = L$, так как $V'(t) = A(t)$. Мы имеем

$$u(p) = \int_0^L dr \int_{S_r(p)} G(p, q) f(q) d\mu(q) = \int_0^L \varphi(r) A(r) [M^r f](p) dr.$$

Положим $F(r) = [M^r f](p)$ и заметим, что $\varphi(r) A(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow L$, а также при $r \rightarrow 0$, если $n > 1$. При $n = 1$ имеем $F'(0) = 0$. Тогда,

как и выше, получим

$$\begin{aligned}
 [\Delta u](p) &= \int_0^L \{\varphi(r) A(r) F''(r) + \varphi(r) A'(r) F'(r)\} dr = \\
 &= [\varphi(r) A(r) F'(r)]_0^L - \int_0^L \varphi'(r) A(r) F'(r) dr = \\
 &= - \int_0^L \left(1 - \frac{V(r)}{V(L)}\right) F'(r) dr = F(0) - F(L) + \left[F(r) \frac{V(r)}{V(L)}\right]_0^L - \\
 &- \frac{1}{V(L)} \int_0^L A(r) [M^r f](p) dr = f(p) - F(L) + F(L) - \frac{1}{V(L)} \int_M f(q) dq = f(p).
 \end{aligned}$$

Итак, $\Delta u = f$. Далее,

$$\int_M u(p) dp = \int_M f(q) dq \int_M G(p, q) dp = 0, \quad (22)$$

потому что $\int G(p, q) dp$ не зависит от q и $\int f(q) dq = 0$. Так как единственными решениями уравнения $\Delta u = 0$ являются константы (§ 6, п. 2), то функция u есть единственное решение уравнения Пуассона, удовлетворяющее условию (22).

УПРАЖНЕНИЯ

А. Теория меры

1. Пусть V_n — векторное пространство над $\mathbf{R}$ размерности $n > 0$.

Для $0 < h < n$ обозначим через $\mathcal{S}_h$ множество h -мерных векторных подпространств пространства V_n . Группа $\mathbf{SL}(V_n)$ эндоморфизмов пространства V_n с определителем 1 транзитивно действует на $\mathcal{S}_h$. Пусть S_0 — фиксированный элемент в $\mathcal{S}_h$, и пусть H — топологическая подгруппа в $\mathbf{SL}(V_n)$, относительно которой S_0 инвариантно. Доказать (используя теорему 1.7 или другим способом), что на пространстве $\mathbf{SL}(V_n)/H$ не существует положительной меры, инвариантной относительно $\mathbf{SL}(V_n)$.

2. Пусть G — группа Ли, H и N — такие замкнутые подгруппы, что $H \subset N \subset G$. Предположим, что G/H и G/N обладают положительными G -инвариантными мерами dg_H и dg_N . Показать, что на N/H существует N -инвариантная положительная мера dn_H , удовлетворяющая (при подходящей нормировке) соотношению

$$\int_{G/H} f(gH) dg_H = \int_{G/N} \left(\int_{N/H} f(gnH) dn_H \right) dg_N$$

для всех $f \in C_c(G/H)$.

3. Пусть G — полупростая связная компактная группа Ли, и пусть T — максимальный тор в G . Обозначим через ω порядок группы Вейля группы G и положим

$$D(t) = \prod_{\alpha \in \Delta^*} 2 \sin \left(\frac{1}{2} \alpha(iH) \right),$$

если $t = \exp H \in T$. Обозначим через dt и dg соответственно инвариантные меры на T и G , нормированные условиями

$$\int_T dt = \int_G dg = 1.$$

Получить интегральную формулу Вейля

$$\int_G f(g) dg = \frac{1}{\omega} \int_T |D(t)| dt \int_G f(gt g^{-1}) dg \quad (f \in C(G))$$

как частный случай предложения 1.19 или прямо из леммы 1.9.

В. Нередуктивное факторпространство

Обозначим через P^2 двумерное проективное пространство, состоящее из всех вещественных троек $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, причем пропорциональные тройки отождествляются. Группа $G = SL(3, R)$ транзитивно действует на P^2 , а также на множестве прямых в P^2 . Обозначим через H_1 подгруппу в G , оставляющую неподвижной точку $y = z = 0$, и через H_2 — подгруппу в G , отображающую прямую $x = 0$ в себя.

1. Показать, что отображение $g \rightarrow {}^t(g^{-1})$ есть автоморфизм группы G , переводящий H_1 в H_2 . (Получающийся отсюда диффеоморфизм пространств G/H_1 и G/H_2 есть полярное соответствие между точками и прямыми в эллиптической геометрии.)

2. Показать, что факторпространства G/H_1 и G/H_2 не редуктивны.

С. Дифференциальные операторы

1. Пусть g — псевдориманова структура на многообразии M . Пусть $f \in C^\infty(M)$. Тогда

$$Xf = g(\text{grad } f, X)$$

для любого векторного поля X на M .

2. Пусть M — ориентированное риманово многообразие, и пусть ω — элемент объема на M . Пусть X — векторное поле на M и $\theta(X)$ — производная Ли по отношению к X (упражнения к гл. I).

Доказать, что

$$\theta(X)\omega = (\operatorname{div} X)\omega.$$

3. Пусть M — многообразие размерности m . Предположим, что ω — m -форма на M , имеющая максимальный ранг, т. е. такая, что $\omega_p(X_1, \dots, X_m) \neq 0$, где $X_1, \dots, X_m$ — произвольные линейно независимые касательные векторы в произвольной точке $p \in M$. Пусть D — дифференциальный оператор на M . Доказать, что существует единственный дифференциальный оператор D^* на M , удовлетворяющий условию

$$\int_M (Df) g \omega = \int_M f (D^*g) \omega \quad (f, g \in C_c^\infty(M)).$$

Оператор D^* называется сопряженным к D . (Указание. Доказать формулу сначала для всех g с достаточно малыми носителями. Общий случай можно затем рассмотреть, пользуясь разбиением единицы, подобно тому, как это было сделано в § 1, п. 1 при интегрировании дифференциальной формы.)

4. Пусть G — группа Ли и dx — левоинвариантная мера на G . Пусть X — левоинвариантное векторное поле на G . Используя формулу

$$[Xf](x) = \left[\frac{d}{dt} f(x \exp tX) \right] (0),$$

показать, что сопряженный оператор X^* имеет вид

$$X^* = -X + [X\delta](e),$$

где $\delta(x) = \det \operatorname{Ad}_G(x)$.

5. Пусть G — связная полупростая группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим через B форму Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — базис алгебры $\mathfrak{g}$. Положим $g_{ij} = B(X_i, X_j)$ ($1 \leq i, j \leq n$) и обозначим через (g^{ij}) обратную матрицу для (g_{ij}) . Показать, что

(i) Дифференциальный оператор $\gamma = \sum_{i,j} g_{ij} X_i \cdot X_j$ не зависит от выбора базиса (X_i) и лежит в центре алгебры $D(G)$. Оператор γ называется оператором Казимира,

(ii) Предположим, что G имеет конечный центр, и пусть K — максимальная компактная подгруппа в G . Обозначим через Γ элемент алгебры $D(G/K)$, соответствующий оператору γ по лемме 2.2. Тогда Γ есть оператор Лапласа — Бельтрами на G/K (в предположении, что риманова структура индуцирована формой B).

6*. Пусть M — компактное риманово глобально симметрическое пространство ранга 1. Пользуясь обозначениями теоремы 7.13,

ПОЛОЖИМ

$$K(p, q) = \int_{L/2}^{d(p, q)} \frac{1}{A(r)} dr,$$

$$v(p) = \int_M K(p, q) f(q) dq \quad (f \in C^\infty(M)).$$

Доказать, что функция v удовлетворяет следующей модификации уравнения Пуассона (Хелгасон [3], стр. 281):

$$\Delta v = f - M^L f.$$

D. Сферические функции на компактном симметрическом пространстве

1. Пусть G — компактная группа и π — неприводимое унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Доказать следующие утверждения (Семинар Софус Ли [1], гл. 17), которые показывают, что $\dim \mathfrak{H} < \infty$.

(i) Пусть T — непрерывный оператор $\mathfrak{H}$. Тогда существует такой непрерывный оператор $T^\natural$ в $\mathfrak{H}$, что

$$\langle T^\natural a, b \rangle = \int_G \langle T\pi(x)a, \pi(x)b \rangle dx \quad (a, b \in \mathfrak{H}),$$

где dx — нормированная мера Хаара на G .

(ii) Оператор $T^\natural$ перестановочен с каждым $\pi(x)$ ($x \in G$). В силу неприводимости, $T^\natural$ есть скалярный кратный тождественного оператора.

(iii) Если T удовлетворяет неравенству

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle Te_i, e_i \rangle \right|^2 \leq Mn \quad (M — константа)$$

для каждого набора ортонормированных векторов $e_1, \dots, e_n$, то тем же свойством обладает $T^\natural$.

(iv) Пусть e — единичный вектор в $\mathfrak{H}$ и P — ортогональное проектирование пространства $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathcal{C}e$. Тогда $P^\natural \neq 0$. Далее, P и $P^\natural$ удовлетворяют указанному выше неравенству с $M=1$. Из того, что $P^\natural$ — скалярный оператор, т. е. $P^\natural = \alpha I$, вывести, что

$$\dim \mathfrak{H} \leq \frac{1}{|\alpha|^2}.$$

2. Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара, G компактна. Пусть φ — сферическая функция на G и V_φ — векторное пространство, состоящее из всех конечных комплексных линейных

комбинаций левых сдвигов $\varphi^{L(g)}$ функции φ . Доказать следующие утверждения (ср. Годаман [3], § 3), из которых видно, что $\dim V_\varphi < \infty$, и тем самым получается лемма 6.2.

(i) Обозначим через $L^2(G)$ гильбертово пространство комплекснозначных функций на G с интегрируемым квадратом. Пусть $L^\natural(G)$ — образ пространства $L^2(G)$ при отображении $f \rightarrow f^\natural$, где

$$f^\natural(x) = \int_K \int_K f(kxk') dk dk' \quad (f \in L^2(G)).$$

Пространство $L^2(G)$ является банаховой алгеброй с операцией свертки, а $L^\natural(G)$ есть коммутативная замкнутая подалгебра. Ядро $\mathfrak{m}$ гомоморфизма $f \rightarrow \int f(x) \overline{\varphi(x)} dx$ ($f \in L^\natural(G)$) есть замкнутый максимальный идеал в $L^\natural(G)$.

(ii) Пусть

$$\mathfrak{n} = \{f \in L^2(G) \mid (g*j)^\natural \in \mathfrak{m} \text{ для всех } g \in L^2(G)\}.$$

Используя формулу

$$(f^\natural * g)^\natural = f^\natural * g^\natural \quad (f, g \in L^2(G)),$$

доказать, что $\mathfrak{n}$ — максимальный левый идеал в $L^2(G)$ и $\mathfrak{n} \cap L^\natural(G) = \mathfrak{m}$.

(iii) Для каждого $x \in G$ идеал $\mathfrak{n}$ инвариантен относительно отображения $f \rightarrow f^{L(x)}$ ($f \in L^2(G)$). Получающееся отсюда унитарное представление группы G в пространстве $L^2(G)/\mathfrak{n}$ неприводимо.

(iv) Векторное пространство $L^2(G)/\mathfrak{n}$ конечномерно и изоморфно пространству V_φ .

Е. Преобразование Фурье на симметрическом пространстве

1. Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара, K компактна. Обозначим через $L^1(G)$ пространство комплекснозначных интегрируемых функций на G с нормой

$$\|f\| = \int_G |f(x)| dx.$$

Обозначим через $L^\natural(G)$ множество функций из $L^1(G)$, двусторонне инвариантных относительно K . Тогда $L^\natural(G)$ есть коммутативная банахова алгебра относительно операции свертки. Следующие утверждения показывают, что $L^\natural(G)$ полупроста, т. е. для $f \in L^\natural(G)$, $f \neq 0$, существует такой непрерывный гомоморфизм $\alpha: L^\natural(G) \rightarrow \mathbb{C}$, что $\alpha(f) \neq 0$. Пусть $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$.

(i) Предположим, что существует такая функция $f_0 \in L^\natural(G)$, $f_0 \neq 0$, что $\alpha(f_0) = 0$ для всех непрерывных гомоморфизмов

$\alpha: L^1(G) \rightarrow \mathbb{C}$. Показать, что существует ограниченная функция $f_0 \in L^1(G)$, $f_0 \neq 0$, обладающая этим свойством. Следовательно, если $f \in L^1(G)$, то свертка $(f_0 * f_0^* * f)(x)$ существует для всех x .

(ii) Линейная функция $F: L^1(G) \rightarrow \mathbb{C}$, определенная формулой

$$F(f) = (f_0 * f_0^* * f)(e) \quad (f \in L^1(G))$$

удовлетворяет условиям

$$F(f * f^*) \geq 0$$

и

$$|F(f * g)|^2 \leq F(f * f^*) F(g * g^*) \quad (f, g \in L^1(G)).$$

(iii) Вывести из (ii), что

$$|F(f)|^2 \leq M F(f * f^*) \quad (f \in L^1(G)),$$

где M — константа. Из итерации этого неравенства и из формулы

$$\sup_{\alpha} |\alpha(f)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f^n\|^{1/n}$$

(верной для всякой коммутативной банаховой алгебры) следует неравенство

$$|F(f)| \leq M \sup_{\alpha} |\alpha(f)|,$$

где α пробегает все гомоморфизмы алгебры $L^1(G)$ в $\mathbb{C}$.

(iv) Вывести из предложения (iii), что $F(f_0 * f_0^*) = 0$ и, в качестве следствия, что $f_0 \equiv 0$.

2. Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара некомпактного типа. Допустим, что G имеет конечный центр. Пусть

$$F_f(a) = e^{\rho(\log a)} \int_N f(an) dn \quad (f \in C^1(G))$$

в обозначениях § 6. Как было доказано в § 6,

$$\int_G \varphi_v(x) f(x) dx = \int_{A_p} e^{iv(\log a)} F_f(a) da.$$

Проверить следующие утверждения:

$$(i) F_{f*g} = F_f * F_g \quad (f, g \in C^1(G)).$$

$$(ii) F_{f^*} = (F_f)^*.$$

(iii) Отображение $f \rightarrow F_f$ ($f \in C^1(G)$) взаимно однозначно.

3*. Пусть (G, K) — риманова симметрическая пара, G компактна. Обозначим через Φ множество всех сферических функций на G/K . Для каждой $\varphi \in \Phi$ обозначим через V_φ множество всех комплексных линейных комбинаций функций $\varphi^{\tau(g)}(g \in G)$.

Обозначим через λ_φ гомоморфизм алгебры $D(G/K)$ в C , заданный равенством $D\varphi = \lambda_\varphi \varphi$. Тогда

$$L^2(G/K) = \sum_{\varphi \in \Phi} V_\varphi$$

есть ортогональное разложение пространства $L^2(G/K)$ на множество всех G -инвариантных G -неприводимых подпространств пространства $L^2(G/K)$. Далее,

$$V_\varphi = \{f \in C^\infty(G/K) : Df = \lambda_\varphi(D)f \text{ для всех } D \in D(G/K)\}.$$

4. Пусть U — компактная связная группа Ли. Вывести из упражнения Е.3 и следствия 7.4, что элементы U -инвариантных U -неприводимых подпространств пространства $L^2(U)$ удовлетворяют функциональному уравнению

$$\varphi(e) \int \varphi(xiuu^{-1}) du = \varphi(x) \int \varphi(iuu^{-1}) du.$$

Если $\varphi(e) \neq 0$, то верно и обратное утверждение.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ 1. Инвариантное интегрирование по компактной группе Ли использовали Гурвиц [1], Шур [1] и, в особенности, Г. Вейль [1]. Инвариантные меры на факторпространствах появляются в частных случаях в классической интегральной геометрии, но теорема 1.7 (в действительности для произвольных локально компактных групп) была впервые доказана в книге А. Вейля [1] (см. также Чжэнь [1]). Интегральные формулы в п. 3–5 принадлежат Хариш-Чандра [4], I, стр. 239, [5], стр. 507, [6], VI, § 12. По поводу предложения 1.19 см. также Э. Картан [13], § 20. Для случая комплексных классических групп много таких интегральных формул доказано у И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [1].

§ 2. Изложение теории инвариантных дифференциальных операторов на редуктивных факторпространствах взято из работы автора [3]. Интерпретация центра $Z(G)$ (лемма 2.4) была дана Гельфандом [2] и Хариш-Чандра [4], стр. 192. Коммутативность алгебры $D(G/K)$ для симметрических G/K была доказана Гельфандом [1]. Доказательство в тексте приведено по Сельбергу [1]. В его работе показано также, что $D(G/K)$ имеет конечное число образующих, если K компактна и G/K не обязательно симметрично (следствие 2.8).

§ 3–6. Для компактного неприводимого симметрического пространства сферические функции были введены Э. Картаном [13] и найдены для комплексного проективного пространства $SU(p+1)/TSU(p)$ и для сферы $SO(p+1)/SO(p)$. Картан использовал сферические функции для доказательства того, что компактное неприводимое симметрическое пространство U/K можно погрузить в евклидово пространство R^n таким образом, чтобы изометриям из группы U соответствовали вращения вокруг 0 в R^n . Как показали Мостов [4] и Палэйс [2], эта теорема справедлива при значительно более общих предположениях. В работе И. М. Гельфанда [1] сферические функции вводятся для общих симметрических пространств. Здесь появляются функциональное уравнение и дифференциальные уравнения для сферических функций. Гельфанд обнаружил также коммутативность алгебры $C^\natural(G)$ (теорема 4.1) и применил к этой алгебре абстрактный гармонический анализ, установив соответствие между сферическими функциями и максимальными

идеалами (лемма 4.2). Интегральная формула для сферической функции (теорема 6.16) была найдена Хариш-Чандра ([4], стр. 64). Доказательство в тексте, приводящее также к изоморфизму между $D(G/K)$ и $I(\mathfrak{h}_{p_0})$, взято из работы Хариш-Чандра [12], I, § 4. Формула Г. Вейля ([1], гл. IV) для характеров неприводимых представлений компактных полупростых групп Ли выражает каждый характер в виде отношения двух экспоненциальных многочленов на максимальной абелевой подалгебре. Ввиду двойственности симметрических пространств естественно ожидать, что подобная формула существует для сферических функций на G/K (где группа G — комплексная полупростая, K — максимальная компактная). Это действительно так, см. Хариш-Чандра [4], стр. 253. Для пространства $SL(n, \mathbb{C})/SU(n, \mathbb{C})$ эта формула дается в работе Гельфанда и Наймарка [1]. Другое доказательство, использующее дифференциальные уравнения вместо представлений, дали Ф. А. Березин [2] и Хариш-Чандра [12], стр. 304. Теория сферических функций была существенно обобщена Годеманом [3] и Хариш-Чандра [13]. Двусторонняя инвариантность сферической функции относительно K заменена здесь более слабым условием, в котором участвуют произвольные неприводимые унитарные представления группы K (а не только единичное представление). Теорема 4.4 восходит к И. М. Гельфанду и Д. А. Райкову [1], см. также Годеман [1]. Лемма 4.7 принадлежит Гельфанду и Наймарку [2]. Формулу для сферической функции в компактном случае сообщил автору Хариш-Чандра.

§ 7. Материал п. 1 и 3 основан на работах Хелгасона [1, 3], где установлены также некоторые другие интегральные теоремы. Для симметрических пространств лемма 7.1 и следствие 7.11 были сформулированы также у Березина и Гельфанда [1], но проверены только для сферических функций и их образов при сдвигах. Обобщение теоремы о среднем значении для гармонических функций (следствие 7.3) принадлежит Годеману [2]. Теорема 7.13 (i) была доказана автором в [3]. Утверждение (ii) было доказано в 1960 г. (не опубликовано). В работе [2] Алламижон получил тот же результат в предположении, что M — аналитическое, полное односвязное и вполне гармоническое риманово многообразие. Уравнение Лапласа на гармонических пространствах изучалось многими авторами, см. Феллер [1], Гюнтер [1], Лихнерович [3], Руз [1] и Уиллмор [1].

Л И Т Е Р А Т У Р А¹⁾

А д а м а р (H a d a m a r d J.)

1. Les surfaces à courbures opposées, *J. Math. Pures Appl.*, 4 (1898), 27—73.
2. Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions, *Bull. Soc. Math. France*, 25 (1901), 37—40.

А д л е р (A d l e r A.)

1. Characteristic classes of homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 86 (1957), 348—365.

А л л а м и ж о н (A l l a m i g e o n A. C.)

1. Espaces homogènes symétriques harmoniques, *C. r. Acad. sci.*, Paris, 246 (1958), 795—798.
2. Propriétés globales des espaces harmoniques, *C. r. Acad. sci.*, Paris, 252 (1961), 1093—1095.

А м б р о у з (A m b r o s e W.)

1. Parallel translation of Riemannian curváture, *Ann. of Math.*, 64 (1956), 337—363.
2. The Cartan structural equations in classical Riemannian geometry, *J. Ind. Math. Soc.*, 24 (1960), 23—76.

А м б р о у з и С и н г е р (A m b r o s e W., S i n g e r I. M.)

1. On homogeneous Riemannian manifolds, *Duke Math. J.*, 25 (1958), 647—669.

А р а к и (A r a k i S.)

- 1**. On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces, *J. of Math. Osaka City Univ.*, 13 (1962), 1—34.
- 2**. On Bott — Samelson K -cycles associated with symmetric spaces, *J. of Math. Osaka City Univ.*, 13 (1963), 87—133.

А р е н с (A r e n s R.)

1. Topologies for homeomorphism groups, *Amer. J. Math.*, 68 (1946), 593—610.

Б а р г м а н (B a r g m a n n V.)

1. Irreducible unitary representations of the Lorentz group, *Ann. of Math.*, 48 (1947), 568—640.

¹⁾ Звездочкой отмечена литература, добавленная переводчиком, а двумя звездочками — добавленная автором к русскому изданию. — Прим. ред.

Баррет (Barrett W.)

1. Sur la structure des groupes semi-simples réels, *Bull. Sci. École polytechn. Timisoara*, 9 (1939), 22—90.

Бергман (Bergman S.)

1. Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande, *J. Reine Angew. Math.*, 169 (1933), 1—42.

Березин Ф. А.

1. Представления комплексных полупростых групп Ли в банаховом пространстве, *ДАН СССР*, 110 (1956), 897—900.
2. Операторы Лапласа на полупростых группах Ли, *Труды Моск. мат. общ.*, 6 (1957), 371—463.
3. Аналог теоремы Лиувилля для симметрических пространств отрицательной кривизны, *ДАН СССР*, 125 (1959), 1187—1189.
- 4**. Письмо в редакцию, *Труды Моск. мат. общ.*, 12 (1963), 453—466.

Березин Ф. А. и Гельфанд И. М.

1. Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях, *Труды Моск. мат. общ.*, 5 (1956), 311—356.

Березин Ф. А., Гельфанд И. М., Граев М. И. и Наймарк М. А.

1. Представление групп, *Усп. мат. наук*, 11 (1956), 13—40.

Березин Ф. А. и Карпелевич Ф. И.

1. Зональные сферические функции и операторы Лапласа на некоторых симметрических пространствах, *ДАН СССР*, 118 (1958), 9—12.

Берже (Berger M.)

1. Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexions affine et des variétés riemanniennes, *Bull. Soc. Math. France*, 83 (1955), 279—330.
2. Les espaces symétriques non compacts, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 74 (1957), 85—177.
3. Sur quelques variétés riemanniennes suffisamment pincées, *Bull. Soc. Math. France*, 88 (1960), 57—71.
4. Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 15 (1961), 179—246.

Биркгоф (Birkhoff G.)

1. Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices, *Ann. of Math.*, 38 (1937), 526—533.
2. Analytical groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 43 (1938), 61—101.

Борель (Borel A.)

1. Сообщения 12—13 в Séminaire H. Cartan, Paris, 1949—1950.
2. Les fonctions automorphes de plusieurs variables complexes, *Bull. Soc. Math. France*, 80 (1952), 167—182.
3. Les espaces hermitiens symétriques, Séminaire Bourbaki, 1952.
4. Sous-groupes compacts maximaux des groupes de Lie, Séminaire Bourbaki, 1952.

5. Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, U. S. A., **40** (1954), 1147—1151.
6. Topology of Lie groups and characteristic classes, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **61** (1955), 397—432.
7. On the curvature tensor of the Hermitian symmetric manifolds, *Ann. of Math.*, **71** (1960), 508—521.
8. Sous-groupes commutatifs et torsion des groupes de Lie compacts connexes, *Tôhoku Math. J.*, **13** (1961), 216—240.
9. Lectures on symmetric spaces, Mass. Inst. of Tech. Notes, 1958.
- 10**. Compact Clifford — Klein forms of symmetric spaces, *Topology*, **2** (1963), 111—122.

Борель и Лихнерович (Borel A., Lichnerowicz A.)
 1. Espaces riemanniens et hermitiens symétriques, *C. r. Acad. sci.*, Paris, **234** (1952), 2332—2334.

Борель и Хариш-Чандра (Borel A., Harish-Chandra)
 1**. Arithmetic subgroups of algebraic groups, *Ann. Math.*, **75** (1962), 485—535.

Борель и Хирцебрух (Borel A., Hirzebruch F.)
 1. Characteristic classes and homogeneous spaces, Part I, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 459—538.

Ботт (Bott R.)
 1. An application of the Morse theory to the topology of Lie groups, *Bull. Soc. Math. France*, **84** (1956), 251—282.
 2. The stable homotopy of the classical groups, *Ann. of Math.*, **70** (1959), 313—337.

Ботт и Самельсон (Bott R., Samelson H.)
 1. Applications of the theory of Morse to symmetric spaces, *Amer. J. Math.*, **70** (1958), 964—1028.

Бохнер (Bochner S.)
 1. Vector fields and Ricci curvature, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946) 776—797.
 2. Curvature in Hermitian metric, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947) 179—195.

Бохнер и Мартин (Bochner S., Martin W. T.)
 1. Функции многих комплексных переменных, ИЛ, М., 1951.

Бремерман (Bremermann H. J.)
 1. Holomorphic continuation of the kernel function and the Bergman metric in several complex variables, Lectures on functions of a complex variable, 349—383, The Univ. of Mich. Press, Ann Arbor, Michigan, 1955.

Брюа (Bruhat F.)
 1. Sur les représentations induites des groupes de Lie, *Bull. Soc. Math. France*, **84** (1956), 97—205.
 2. Lectures on Lie groups and representations of locally compact groups, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1958.

Б у з е м а н (B u s e m a n n H.)

1. Геометрия геодезических, ИЛ, М., 1962.

Б у р б а к и (B o u r b a k i N.)

1. Элементы математики. Общая топология. Основные структуры, Физматгиз, М., 1958.
2. Éléments de mathématique, Livre VI, Intégration, Chap. I—V. Hermann, Paris, 1952, 1956.
3. Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie, Chap. I. Hermann, Paris, 1960.
- 4*. Элементы математики. Общая топология. Числа и связанные с ними группы и пространства, Физматгиз, М., 1959.

Б х а н у М у р т и Т. С.

1. Мера Планшереля для факторпространства $SL(n, R)/SO(n, R)$, ДАН СССР, 133 (1960), 503—506.
2. Асимптотическое поведение зональных сферических функций на верхней полуплоскости Зигеля, ДАН СССР, 135 (1960), 1027—1030.

В а н - Д а н ц и г и В а н - д е р - В а р д е н (V a n D a n t z i g D., V a n d e r W a e r d e n B. L.)

1. Über metrische homogene Räume, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 6 (1928), 367—376.

В а н - д е р - В а р д е н (V a n d e r W a e r d e n B. L.)

1. Die Klassifizierung der einfachen Lie'schen Gruppen, Math. Z., 37 (1933), 446—462.

В а н - Э с т (V a n E s t W. T.)

1. Dense imbeddings of Lie groups, Nederl. Acad. Wetensch., Proc., Ser. A., 54 (1951), 321—328.

В а н (W a n g H. C.)

1. Two-point homogeneous spaces, Ann. of Math., 55 (1952), 177—191.

В е й л ь А. (W e i l A.)

1. Интегрирование в топологических группах и его применения, ИЛ, М., 1950.
2. Введение в теорию кэлеровых многообразий, ИЛ, М., 1961.
- 3**. Algebras with involutions and the classical groups, J. Indian Math. Soc., 24 (1960), 589—623. (Русский перевод см. Математика, 7 (1963), 31—55.)

В е й л ь Г. (W e y l H.)

1. Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I, II, III und Nachtrag., Math. Z., 23 (1925), 271—309; 24 (1926), 328—376, 377—395, 789—791. (Неполный русский перевод см. в Усп. мат. наук, 4 (1937), 201—246.)
2. The structure and representations of continuous groups, Inst. Adv. Study, Princeton, New Jersey. Notes, 1935.
3. Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, М., 1947.

В и л е н к и н Н. Я.

1. Бесселевы функции и представления группы евклидовых движений, Усп. мат. наук, 11 (1956), 69—112.

В и т т (W i t t E.)

1. Treue Darstellung Lie'scher Ringe, *J. Reine Angew. Math.*, 177 (1937), 152—166.
2. Spiegelungsgruppen und Aufzählung halb-einfacher Lie'scher Ringe, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 13 (1941), 289—322.

В о л ь ф (W o l f J. A.)

1. Homogeneous manifolds of constant curvature, *Comment. Math. Helv.*, 36 (1961), 112—147.
- 2**. Locally symmetric homogeneous spaces, *Comment. Math. Helv.*, 37 (1962), 65—101.
- 3**. Discrete groups, symmetric spaces, and global holonomy, *Amer. J. Math.*, 84 (1962), 527—542.
- 4**. On locally symmetric spaces of non-negative curvature and certain other locally homogeneous spaces, *Comment. Math. Helv.*, 37 (1963), 266—295.
- 5**. Space forms of Grassmann manifolds, *Canad. J. Math.*, 15 (1963), 193—205.
- 6**. Geodesic spheres in Grassmann manifolds, III, *J. Math.*, 7 (1963), 425—446.
- 7**. Elliptic spaces in Grassmann manifolds, III, *J. Math.*, 7 (1963), 447—462.

В р э н ч а н у (V r ä n c e a n u G.)

1. Sur une classe d'espaces symétriques, «Bericht von der Riemann — Tagung des Forschungsinstituts für Mathematik», 112—123. Akademie-Verlag, Berlin, 1957.

Г а н г о л л и (G a n g o l l i R.)

- 1**. Isotropic infinitely divisible processes on compact symmetric spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 (1963), 357—358.

Г а н н и н г (G u n n i n g R. C.)

1. Factors of automorphy and other formal cohomology groups for Lie groups, *Ann. of Math.*, 69 (1959), 314—326.

Г а н т м а х е р Ф. Р.

1. Canonical representation of automorphisms of a complex semisimple Lie group., *Матем. сб.*, 5 (47) (1939), 101—144.
2. On the classification of real simple Lie groups, *Матем. сб.*, 5 (47), (1939), 217—249.

Г е л ь ф а н д И. М.

1. Сферические функции на симметрических римановых пространствах, *ДАН СССР*, 70 (1950), 5—8.
2. Центр инфинитезимального группового кольца, *Матем. сб.*, 26 (68), (1950), 103—112.
- 3**. Автоморфные функции и теория представлений групп, *Proc. Int. Congr. Math. Stockholm 1962, Uppsala 1963.*

Г е л ь ф а н д И. М. и Г р а е в М. И.

1. Аналог формулы Планшереля для вещественных полупростых групп Ли, *ДАН СССР*, 92 (1953), 461—464.

2. Аналог формулы Планшереля для классических групп, *Труды Моск. мат. общ.*, 4 (1955), 375—404.
 3. Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с этим вопросы интегральной геометрии, *Труды Моск. мат. общ.*, 8 (1959), 321—390.
- Гельфанд И. М., Граев М. И. и Виленин Н. Я.
- 1**. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Обобщенные функции, вып. 5, Физматгиз, М., 1962.
- Гельфанд И. М. и Наймарк М. А.
1. Унитарные представления классических групп, *Труды матем. ин-та АН*, 36 (1950).
 2. Унитарные представления унимодулярной группы, содержащие единичное представление унитарной подгруппы, *Труды Моск. мат. общ.*, 1 (1952), 423—475.
- Гельфанд И. М. и Пятецкий-Шапиро И. И.
- 1**. Теория представлений и теория автоморфных функций, *Усп. мат. наук*, 14 (1959), 171—194.
- Гельфанд И. М. и Райков Д. А.
1. Неприводимые унитарные представления локально бикompактных групп, *Матем. сб.*, 13 (55), (1943), 301—316.
- Гельфанд И. М. и Фомин С. В.
1. Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны, *Усп. мат. наук*, 7 (1952), 118—137.
- Гиндикин С. Г.
- 1**. Интегральные формулы в комплексных однородных ограниченных областях, *Усп. мат. наук*, 17 (1962), 209—211.
- Гиндикин С. Г. и Карпелевич Ф. И.
- 1**. Мера Планшереля для римановых симметрических пространств неположительной кривизны, *ДАН СССР*, 145 (1962), 252—255.
- Годеман (Godement R.)
1. Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 63 (1948), 1—84.
 2. Une généralisation du théorème de la moyenne pour les fonctions harmoniques, *C. r. Acad. sci., Paris*, 234 (1952), 2137—2139.
 3. A theory of spherical functions, I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 73 (1952), 496—556.
 4. Introduction aux travaux de A. Selberg, *Séminaire Bourbaki*, 1957.
 5. Статьи в семинаре А. Картана [3]
- Гординг (Gårding L.)
1. Vecteurs analytiques dans les représentations des groupes de Lie, *Bull. Soc. Math. France*, 88 (1960), 73—93.
- Гото (Goto M.)
- 1 Faithful representations of Lie groups, I, *Math. Japonica*, 1 (1948), 7—119

Г у р в и ц (Hurwitz A.)

1. Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration, *Gött. Nachr.* (1897), 71—90.

Г у р е в и ч и В о л м э н (Hurewicz W., Wallman H.)

1. Теория размерности, ИЛ, М., 1948.

Г ю н т е р (Günther P.)

1. Über einige spezielle Probleme aus der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss., Leipzig*, 102 (1957), 1—50.

Д а л л а В о л т а (Dalla Volta V.)

1. Geodesic manifolds in the spaces of Siegel-Hua, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 46 (1958), 19—42.

Д ж е к о б с о н (Jacobsen N.)

1. Алгебры Ли, ИЛ, М., 1964.

Д и к с м ь е (Dixmier J.)

1. Représentations intégrables du groupe de de Sitter, *Bull. Soc. Math. France*, 89 (1961), 9—41.

Д ы н к и н Е. Б.

1. Структура полупростых алгебр Ли, *УМН*, 2 (1947), 59—127.
2. Топологические характеристики гомоморфизмов компактных групп Ли, *Матем. сб.*, 35 (77) (1954), 129—177.
- 3**. Неотрицательные собственные функции оператора Лапласа — Бельтрами и броуновское движение в некоторых симметрических пространствах, *ДАН СССР*, 141 (1961), 288—291.

Д ы н к и н Е. Б. и О н и щ и к А. Л.

1. Компактные группы Ли в целом, *УМН*, 10 (1955), 3—74.

З а р и с с к и й и С а м ю э л ь (Zariski O., Samuel P.)

1. Коммутативная алгебра, ИЛ, М., 1963.

З е й ф е р т и Т р е л ь ф а л ь (Seifert H., Threlfall W.)

1. Топология, ГОНТИ, М., 1938.

З и г е л ь (Siegel C. L.)

1. Symplectic geometry, *Amer. J. Math.*, 65 (1943), 1—86.
2. Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, М., ГИТТЛ, 1954.

И в а м о т о (Iwamoto H.)

1. On integral invariants and Betti numbers of symmetric Riemannian spaces, I, II, *J. Math. Soc. Japan*, 1 (1949), 91—110, 235—243.

И в а с а в а (Iwasawa K.)

1. On some types of topological groups, *Ann. of Math.*, 50 (1949), 507—558.

Й о н (John F.)

1. Плоские волны и сферические средние, ИЛ, М., 1958.

К а л а б и и В е з е н т и н и (Calabi E., Vesentini E.)

1. On compact locally symmetric Kähler manifolds, *Ann. of Math.*, 71 (1960), 472—507.

Канеюки и Нагано (Kaneuki S., Nagano T.)

1**. On certain quadratic forms related to symmetric Riemannian spaces, *Osaka Math. J.*, 14 (1962), 241—252.

2**. On the first Betti numbers of compact quotient spaces of complex semisimple Lie groups by discrete subgroups, *Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo*, 12 (1962).

Карпелевич Ф. И.

1. Поверхности транзитивности полупростой подгруппы группы движений симметрического пространства, *ДАН СССР*, 93 (1953), 401—404.

2. Простые подалгебры вещественных алгебр Ли, *Труды Моск. мат. общ.*, 4 (1955), 3—112.

3. Геодезические и гармонические функции на симметрических пространствах, *ДАН СССР*, 124 (1959), 1199—1202.

4**. Орисферические радиальные части операторов Лапласа на симметрических пространствах, *ДАН СССР*, 143 (1962), 1034—1037.

5**. Неотрицательные собственные функции оператора Лапласа — Бельтрами на симметрических пространствах неположительной кривизны, *ДАН СССР*, 151 (1963), 1274—1276.

Картан А. (Cartan H.)

1. Notions d'algèbre différentielle; applications aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie, *Colloque de topologie (espaces fibrés)*, Bruxelles, 1950.

2. La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal, *Colloque de topologie (espaces fibrés)*, Bruxelles, 1950.

3. Fonctions automorphes, *Séminaire 1957—1958*, Paris.

Картан Э. (Cartan É.)

1. Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, *Thèse*, Paris, Nony, 1894; 2-е изд. Vuibert, 1933.

2. Les groupes réels simples finis et continus, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 31 (1914), 263—355.

3. Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples, *Bull. Sci. Math.*, 49 (1925), 130—152.

4. Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples, *Bull. Sci. Math.*, 49 (1925), 361—374.

5. Sur les espaces de Riemann dans lesquels le transport par parallélisme conserve la courbure, *Rend. Acc. Lincei*, 31 (1926), 544—547.

6. Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, *Bull. Soc. Math. France*, 54 (1926), 214—264. (Русский перевод см. в сборнике: Картан Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства, ИЛ, М., 1949, стр. 112—149.)

7. Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, *Bull. Soc. Math. France*, 55 (1927), 114—134. (Работа переведена на русский язык вместе с [6]).

8. La géométrie des groupes de transformations, *J. Math. Pures Appl.*, 6 (1927), 1—119. (Русский перевод см. в указанном выше сборнике, стр. 7—111.)
9. La géométrie des groupes simples, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 4 (1927), 209—256. (Русский перевод см. в указанном выше сборнике стр. 183—239.)
10. Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries a groupe fondamental simple, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 44 (1927), 345—467.
11. Complément au mémoire «Sur la géométrie des groupes simples», *Ann. Mat. Pura Appl.*, 5 (1928), 253—260.
12. Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne, *J. Math. Pures Appl.*, 8 (1929), 1—33. (Русский перевод см. в указанном выше сборнике, стр. 150—182.)
13. Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos., *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 53 (1929), 217—252.
14. Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces, *Ann. Soc. Pol. Mat.*, 8 (1929), 181—225.
15. Sur les représentations linéaires des groupes clos., *Comm. Math. Helv.*, 2 (1930), 269—283.
16. La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs, *Mém. Sci. Math.*, fasc. XLII (1930). (Русский перевод см. в указанном выше сборнике, стр. 240—292.)
17. Leçons sur la géométrie projective complexe, Gauthier — Villars, Paris, 1931.
18. Les espaces riemanniens symétriques, *Verh. Int. Math. Kongr. Zurich*, 1 (1932), 152—161.
19. Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 11 (1935), 116—162.
20. La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie, *Actual. Scient. Ind.*, № 358. Hermann, Paris, 1936.
21. La topologie des espaces homogènes clos. Труды семин. по вект. и тенз. анализу, 4 (1937), 388—394.
22. Геометрия римановых пространств, ОНТИ, М., 1936.
23. Oeuvres complètes, Partie I, Vols. 1, 2. Gauthier-Villars, Paris, 1952.

К а р т а н и С к о у т е н (C a r t a n É., S c h o u t e n J. A.)

1. On the geometry of the group-manifold of simple and semi-simple groups; *Proc. Akad. Wetensch., Amsterdam*, 29 (1926), 803—815.

К а р т ь е и Д и к с м ь е (C a r t i e r P., D i x m i e r J.)

1. Vecteurs analytiques dans les représentations des groupes de Lie, *Amer. J. Math.*, 80 (1958), 131—145.

К е л л и (K e l l e y J. L.)

1. General Topology, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1955.

Кёхер (Koecher M.)

1. Positivitätsbereiche im R^n , *Amer. J. Math.*, 79 (1957), 575—596.
2. Die Geodätischen von Positivitätsbereichen, *Math. Ann.*, 135 (1958), 192—202.

Киллинг (Killing W.)

1. Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, I, II, III, IV, *Math. Ann.*, 31 (1888), 252—290; 33 (1889); 1—48; 34 (1889), 57—122; 36 (1890), 161—189.

Клинген (Klingen H.)

1. Diskontinuierliche Gruppen in symmetrischen Räumen, I, II, *Math. Ann.*, 129 (1955), 345—369; 132 (1956), 134—144.

Кобаяси (Kobayashi S.)

1. Une remarque sur la connexion affine symétrique, *Proc. Japan. Acad.*, 31 (1955), 13—14.
2. Espaces à connexions affines et riemanniens symétriques, *Nagoya Math. J.*, 9 (1955), 25—37.
3. Fixed points of isometries, *Nagoya Math. J.*, 13 (1958), 63—68.
4. Geometry of bounded domains, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 92 (1959), 267—290.

Козюль (Koszul J. L.)

1. Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes, *Canad. J. Math.*, 7 (1955), 562—576.
2. Variétés Kähleriennes, Universidade de São Paulo, 1957.
3. Exposés sur les espaces homogènes symétriques, Soc. Math. São Paulo, 1959.

Колчин (Kolchin E.)

1. Algebraic matrix groups and the Picard — Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations, *Ann. of Math.*, 49 (1948), 1—42.

Кокстер (Coxeter H. S. M.)

1. Discrete groups generated by reflections, *Ann. of Math.*, 35 (1934), 588—621.

Кон (Cohn P. M.)

1. Lie groups, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1957.

Костант (Kostant B.)

1. On the conjugacy of real Cartan subalgebras, I, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 41 (1955), 967—970.
2. On differential geometry and homogeneous spaces, I, II, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 42 (1956), 258—261, 354—357.
3. A characterization of the classical groups, *Duke Math. J.*, 25 (1958), 107—124.
4. The principal three-dimensional subgroup and the Betti-numbers of a complex simple Lie group, *Amer. J. Math.*, 81 (1959), 973—1032.
5. A characterization of invariant affine connections, *Nagoya Math. J.*, 16 (1960), 35—50.

6. On invariant skew-tensors, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 40 (1955), 148—151.
7. Lie algebra cohomology and the generalized Borel — Weil theorem, *Ann. of Math.*, 74 (1961), 329—387.

Крейн М. Г.

1. Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах, I, II. *Укр. мат. журн.*, 1 (1949), 64—98; 2 (1950), 10—59.

Криттенден (Crittenden R.)

1. Minimum and conjugate points in symmetric spaces, *Canad. J. Math.*, 14 (1962), 320—328.

Кунце и Штейн (Kunze R. A., Stein E. M.)

1. Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 real unimodular group, *Amer. J. Math.*, 82 (1960), 1—62.

Кэлер (Kähler E.)

1. Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 9 (1933), 173—186.

Ларди (Lardy P.)

1. Sur la détermination des structures réelles de groupes simples, finis et continus, au moyen des isomorphismes involutives, *Comment. Math. Helv.*, 8 (1935—1936), 189—234.

Лауденслэгер (Lowdenslager D. B.)

1. Potential theory in bounded symmetric homogeneous complex domains, *Ann. of Math.*, 67 (1958), 467—484.
2. Potential theory and a generalized Jensen — Nevanlinna formula for functions of several complex variables, *J. Math. Mech.*, 7 (1958), 207—218.

Леджер (Ledger A. J.)

1. Symmetric harmonic spaces, *J. London. Math. Soc.*, 32 (1957), 53—56.

Ли (Lie S.)

1. Theorie der Transformationsgruppen, I, II, III, Unter Mitwirkung von F. Engel. Leipzig, 1888, 1890, 1893.

Либерман (Liebermann P.)

1. Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulières, *Bull. Soc. Math. France*, 83 (1955), 195—224.

Листер (Lister W. G.)

1. A structure theory of Lie triple systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72 (1952), 217—242.

Лихнерович (Lichnerowicz A.)

1. Courbure, nombres de Betti, et espaces symétriques, *Proc. Int. Congr. of Math. Harvard*, II (1950), 216—223.
2. Espaces homogènes kähleriens, Coll. Int. Géom. Diff., Strasbourg (1953), 171—184.
3. Équations de Laplace et espaces harmoniques, Premier Colloq. sur les équations aux dérivées partielles, Louvain, 1953, 9—23.
4. Un théorème sur les espaces homogènes complexes, *Arch. Math.*, 5 (1954), 207—215.

5. Теория связностей в целом и группы голономий, ИЛ., М., 1960.
6. Géométrie des groupes de transformations, Dunod, Paris, 1958.
- 7**. Operateurs différentiels invariants sur un espace symétrique, *C. r. Acad. sci.*, Paris, 256 (1963), 3548—3550.

Лэнглендс (Langlands R. P.)

- 1**. The dimension of spaces of automorphic forms, *Amer. J. Math.*, 85 (1963), 99—125.

Маас (Maass H.)

1. Spherical functions and quadratic forms, *J. Indian Math. Soc.*, 20 (1956), 117—162.
2. Zur Theorie der Kugelfunktionen einer Matrixvariablen, *Math. Ann.*, 135 (1958), 391—416.

Майерс (Myers S. B.)

1. Riemannian manifolds in the large, *Duke Math. J.*, 1 (1935), 39—49.

Майерс и Стинрод (Myers S. B., Steenrod N.)

1. The group of isometries of a Riemannian manifold, *Ann. of Math.*, 40 (1939), 400—416.

Мальцев А. И.

1. On the theory of Lie groups in the large, *Матем. сб.*, 16 (58), (1945), 163—190.

Маутнер (Mautner F.)

1. Fourier analysis and symmetric spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 37 (1951), 529—533.
2. Geodesic flows on symmetric Riemann spaces, *Ann. of Math.*, 65, (1957), 416—431.
3. Spherical functions over $\mathfrak{P}$ -adic fields, I, *Amer. J. Math.*, 80 (1958), 441—457.

Мацусима (Matsushima Y.)

1. Un théorème sur les espaces homogènes complexes, *C. r. Acad. sci.*, Paris, 241 (1955), 785—787.
2. Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes, *Nagoya Math. J.*, 16 (1960), 205—218.
- 3**. On the first Betti number of compact quotient spaces of higherdimensional symmetric spaces, *Ann. Math.*, 75 (1962), 312—330.
- 4**. On Betti numbers of compact, locally symmetric Riemannian manifolds, *Osaka Math. J.*, 14 (1962), 1—20.

Мацусима и Мураками (Matsushima Y., Murakami S.)

- 1**. On vector bundle valued harmonic forms on symmetric Riemannian manifolds, *Ann. of Math.*, 78 (1963), 365—416.

Мейер и Томас (Mayer W., Thomas T. Y.)

1. Foundations of the theory of Lie groups, *Ann. of Math.*, 30 (1935), 770—822.

Миллер и Муррей (Miller K. S., Murray F. J.)

1. Existence theorems for ordinary differential equations. New York Univ. Press, New York, 1954.

Монтгомери и Зиппин (Montgomery D., Zippin L.)

1. Topological transformation groups, Interscience, New York, 1955.

Морита (Morita K.)

1. On the kernel functions of symmetric domains, *Sci. rep. Tokyo Kyoiku Daigaku*, Sect. A 5 (1956), 190—212.

Мостов (Mostow G. D.)

1. A new proof of É. Cartan's theorem on the topology of semi-simple groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), 969—980.
2. The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces, *Ann. of Math.*, 52 (1950), 606—636.
3. Some new decomposition theorems for semi-simple Lie groups, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 14 (1955), 31—54.
4. Equivariant embeddings in Euclidean space, *Ann. of Math.*, 65 (1947), 432—446.

Мураками (Murakami S.)

1. On the automorphisms of a real semi-simple Lie algebra, *J. Math. Soc. Japan*, 4 (1952), 103—133.
2. Supplements and corrections to [1], *J. Math. Soc. Japan*, 5 (1953), 105—112.

Нагано (Nagano T.)

1. Homogeneous sphere bundles and the isotropic Riemannian manifolds, *Nagoya Math. J.*, 15 (1959), 29—55.

Чаймарк М. А.

1. Об описании всех унитарных представлений комплексных классических групп, I, II, *Матем. сб.*, 35 (77), (1954), 317—356; 37 (79), (1955) 121—140.
2. Представления группы Лоренца, Физматгиз, М., 1958.
3. Нормированные кольца, ГИТТЛ, М., 1956.

Нелсон (Nelson E.)

1. Analytic vectors, *Ann. of Math.*, 70 (1959), 572—615.

Номидзу (Nomizu K.)

1. On the group of affine transformations of an affinely-connected manifold, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4 (1953), 816—823.
2. Invariant affine connections on homogeneous spaces, *Amer. J. Math.*, 76 (1954), 33—65.
3. Reduction theorem for connections and its application to the problem of isotropy and holonomy groups of a Riemannian manifold, *Nagoya Math. J.*, 9 (1955), 57—66.
4. Группы Ли и дифференциальная геометрия, ИЛ., М., 1960.
5. On infinitesimal holonomy and isotropy groups, *Nagoya Math. J.*, 11 (1957), 111—114.
6. On local and global existence of Killing vector fields, *Ann. of Math.*, 72 (1960), 105—120.

Ньюлендер и Ниренберг (Newlander A., Nirenberg L.)

1. Комплексно-аналитические координаты в квазикомплексных многообразиях, *Математика*, 3 : 6 (1959), 131—144.

П а л э й с (P a l a i s R. S.)

1. On the differentiability of isometries, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 805—807.
2. Imbeddings of compact differentiable transformation groups in orthogonal representations, *J. Math. Mech.*, 6 (1957), 673—678.
3. A definition of the exterior derivative in terms of Lie derivatives, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5 (1954), 902—908.

П е т е р и В е й л ь (P e t e r F., W e y l H.)

1. Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, *Math. Ann.*, 97 (1927), 737—755.

П о н т р я г и н Л. С.

1. Непрерывные группы, ГИТТЛ, М., 1954.

П ф л ю г е р (P f l u g e r A.)

1. Theorie der Riemannschen Flächen, Springer, Berlin, 1959.

П я т е ц к и й - Ш а п и р о И. И.

1. Об одной проблеме Э. Картана, *ДАН СССР*, 124 (1959), 272—273.
- 2**. Геометрия классических областей и теория автоморфных функций, Физматгиз, М., 1961.
- 3**. Об ограниченных однородных областях в n -мерном комплексном пространстве, *Изв. АН СССР*, сер. мат., 26 (1962), 107—124.
- 4**. Строение j -алгебр, *Изв. АН СССР*, сер. мат., 26 (1962), 453—484.

Д е Р а м (D e R h a m G.)

1. Sur la reductibilité d'un espace de Riemann, *Comment. Math. Helv.*, 26 (1952), 328—344.
2. Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.

Р а у х (R a u c h H. E.)

1. Geodesics, symmetric spaces and differential geometry in the large, *Comment. Math. Helv.*, 27 (1953), 294—320.
2. The global study of geodesics in symmetric and nearly symmetric Riemannian manifolds, *Comment. Math. Helv.*, 35 (1961), 111—125.
3. Geodesics and curvature in differential geometry in the large. Yeshiva Univ. New York, 1959.

Р а ш е в с к и й П. К.

1. О геометрии однородных пространств, Труды семин. по вект. и тенз. анал., 9 (1952), 49—74.
- 2*. Риманова геометрия и тензорный анализ, ГИТТЛ, М., 1953.

Р и м а н (R i e m a n n B.)

1. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Habilitationvorlesung, 1854. Gesamm. Werke, 2-е изд., Leipzig, 1892.

Р и н о в (R i n o w W.)

1. Über die Zusammenhänge zwischen der Differentialgeometrie im grossen und im kleinen, *Math. Z.*, 35 (1932), 512—538.

Р о з е н ф е л ь д Б. А.

1. Неевклидовы геометрии, ГИТТЛ, М., 1955.
2. Геометрическая интерпретация симметрических пространств с простыми фундаментальными группами, *ДАН СССР*, 110 (1956), 23—26.

3. О теории симметрических пространств ранга 1, *Матем. сб.*, 41 (83), (1957), 373—380.

Ротхаус (Rothaus O. S.)

1. Domains of positivity, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 24 (1960), 189—235.

Руз (Ruse H. S.)

1. On the elementary solution of Laplace's equation, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 2 (1931), 135—139.

Сабинин Л. В.

- 1**. О геометрии трисимметрических римановых пространств, *Сибирск. мат. журн.* 2 (1961), 266—278.

Саймонс (Simons J.)

1. On the transitivity of holonomy systems, *Ann. of Math.*, 76 (1962), 213—234.

Самельсон (Samelson H.)

1. A note on Lie groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52 (1946), 870—873.
2. Topology of Lie groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 58 (1952), 2—37.
3. On curvature and characteristic of homogeneous spaces, *Michigan Math. J.*, 5 (1958), 13—18.

Сатаке (Satake I.)

1. On a theorem of É. Cartan, *J. Math. Soc. Japan*, 2 (1951), 284—305.
2. A remark on bounded symmetric domains, *Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo*, 3 (1953), 131—144.
3. On representations and compactifications of symmetric Riemann spaces, *Ann. of Math.*, 71 (1960), 77—110.
4. On compactifications of the quotient space for arithmetically defined discontinuous groups, *Ann. of Math.*, 72 (1960), 555—580.

Сегал (Segal I. E.)

1. Hypermaximality of certain operators on the groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3 (1952), 13—15.
2. A theorem on the measurability of group-invariant operators, *Duke Math. J.*, 26 (1959), 549—552.

Сельберг (Selberg A.)

1. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, *J. Ind. Math. Soc.*, 20 (1956), 47—87. [Имеется русский перевод: *Математика*, 1 : 4 (1957) 3—28.]
2**. On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces. Contributions to Function Theory, 147—164, Bombay, 1960.

Семинар «Софус Ли».

1. Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, ИЛ, М., 1962.

Сингер (Singer I. M.)

1. Infinitesimally homogeneous spaces, *Comm. Pure Appl. Math.*, 13 (1960), 685—697.

С и н ю к о в Н. С.

1. О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства, *ДАН СССР*, 98 (1954), 21—23.

С и р о т а А. И. и С о л о д о в н и к о в А. С.

- 1**. Некомпактные полупростые группы Ли, *УМН*, 18 (1963), 87—144.

С к о у т е н (S c h o u t e n J. A.)

1. Ricci Calculus, 2-е изд. Springer, Berlin, 1954.

С т е п а н о в В. В.

- 1*. Курс дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, М., 1953.

С т и н р о д (S t e e n r o d N.)

1. Топология косых произведений, ИЛ, М., 1953.

С т р ё й к (S t r u i k D. J.)

1. Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung, Springer, Berlin, 1922.

С у г и у р а (S u g i u r a M.)

1. Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semi-simple Lie algebras, *J. Math. Soc. Japan*, 11 (1959), 374—434.
2. Spherical functions and representation theory of compact Lie groups, *Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo*, 10 (1960), 187—193.
- 3**. Representations of compact groups realized by spherical functions on symmetric spaces, *Proc. Japan Acad.*, 38 (1962), 111—113.

С у м и т о м о (S u m i t o m o T.)

1. Projective and conformal transformations in compact Riemannian manifolds, *Tensor (N. S.)*, 9 (1959), 113—135.

Т а к а х а с и (T a k a h a s h i R.)

1. Sur les groupes de Lorentz généralisés, *C. r. Acad. sci.*, Paris, 252 (1961), 835—837, 980—982.

Т а к е у т и (T a k e u c h i M.)

- 1**. On Pontrjagin classes of compact symmetric spaces, *J. Fac. Sci., Univ. of Tokyo*, Sec. I, vol. IX, Part 4 (1962), 313—328.

Т а м а г а в а (T a m a g a w a T.)

1. On Selberg's trace formula, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I, 8 (1960), 363—386.

Т е л е м а н (T e l e m a n C.)

1. Sur une classe d'espaces riemanniens symétriques, *Rev. Math. Pures Appl.*, 2 (1957), 445—470.

Т и т с (T i t s J.)

1. Sur certains classes d'espaces homogènes de groupes de Lie, *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém., Coll.*, 29 (1955), № 3.

Т у т у б а л и н В. Н.

- 1**. Предельное поведение композиций мер в некоторых симметрических пространствах, *ДАН СССР*, 143 (1962), 286—288.

У а й т х ё д (W h i t e h e a d J. H. C.)

1. Affine spaces of paths which are symmetric about each point, *Math. Z.*, 35 (1932), 644—659.

2. Convex regions in the geometry of paths, *Quart. J. Math.*, 3 (1932), 33—42.
3. On the covering of a complete space by the geodesics through a point, *Ann. of Math.*, 36 (1935), 679—704.

У и л л м о р (W i l l m o r e T. J.)

1. Mean value theorems in harmonic Riemannian spaces, *J. London Math. Soc.*, 25 (1950), 54—57.
2. An Introduction to Differential Geometry, Oxford Univ. Press, London, 1959.

Ф е д е н к о А. С.

1. Симметрические пространства с простой некомпактной фундаментальной группой, *ДАН СССР*, 108 (1956), 1026—1028.

Ф е л л е р (F e l l e r W.)

1. Über die Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, *Math. Ann.*, 102 (1930), 633—649.

Ф о н Н е й м а н (V o n N e u m a n n J.)

1. Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearen Transformationen und ihrer Darstellungen, *Math. Z.*, 30 (1929), 3—42.

Ф р е й д е н т а л ь (F r e u d e n t h a l H.)

1. Sur les invariants caractéristiques des groupes semi-simples, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc., Ser. A* 56 (1953), 90—94.
2. Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen gruppen, I, II, *Nederl. Akad. Wetensch., Proc., Ser. A* 57 (1954), 369—376, 487—491.
3. Zur Klassifikation der einfachen Lie-Gruppen, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc., Ser. A* 60, (1958), 379—383.
4. Lie groups. Dittoed lecture notes, Yale University, New Haven, Connecticut, 1961.
- 5**. Clifford—Wolf—Isometrien symmetrischer Räume, *Math. Ann.*, 150 (1963), 136—149.

Ф р ё л и х е р (F r ö l i c h e r A.)

1. Zur Differentialgeometrie der komplexen Strukturen, *Math. Ann.*, 129 (1955), 50—95. (Имеется неполный русский перевод: *Математика*, 3 : 6 (1959), 113—130.)

Ф ю р с т е н б е р г (F u r s t e n b e r g H.)

- 1**. A Poisson formula for semisimple Lie groups, *Ann. of Math.*, 77 (1963), 335—386.
- 2**. Non commuting random products, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108 (1963), 377—428.

Х а н о (H a n o J.)

1. On Kählerian homogeneous spaces of unimodular groups, *Amer. J. Math.*, 69 (1957), 885—900.

Х а н о и М а ц у с и м а (H a n o J., M a t s u s h i m a Y.)

1. Some studies on Kählerian homogeneous spaces, *Nagoya Math. J.*, 11 (1957), 77—92

Хано и Моримото (Hano J., Morimoto A.)

1. Note on the group of affine transformations of an affinely connected manifold, *Nagoya Math. J.*, 8 (1955), 71—81.

Хант (Hunt G. A.)

1. Semi-groups of measures of Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 81 (1956), 264—293.
2. A theorem of Élie Cartan, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7 (1956), 307—308.

Хариш-Чандра (Harish-Chandra)

1. On representations of Lie algebras, *Ann. of Math.*, 50 (1949), 900—915.
2. Lie algebras and the Tannaka duality theorem, *Ann. of Math.*, 51 (1950), 299—330.
3. On some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 70 (1951), 28—96.
4. Representations of semi-simple Lie groups, I, II, III, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 75 (1953), 185—243; 76 (1954), 26—65, 234—253.
5. The Plancherel formula for complex semi-simple Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 76 (1954), 485—528.
6. Representations of semi-simple Lie groups, IV, V, VI, *Amer. J. Math.*, 77 (1955), 743—777; 78 (1956), 1—41, 564—628.
7. On a lemma of F. Bruhat, *J. Math. Pures Appl.*, 35 (1956), 203—210.
8. The characters of semi-simple Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 83 (1956), 98—163.
9. Differential operators on a semi-simple Lie algebra, *Amer. J. Math.*, 79 (1957), 87—120.
10. Fourier transforms on a semi-simple Lie algebra, I, II, *Amer. J. Math.*, 79 (1957), 193—257, 653—686.
11. A formula for semi-simple Lie groups, *Amer. J. Math.*, 79 (1957), 733—760.
12. Spherical functions on a semi-simple Lie group, I, II, *Amer. J. Math.*, 80 (1958), 241—310, 553—613.
13. Some results on differential equations and their applications, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 45 (1959), 1763—1764.
14. Plancherel formula for the 2×2 real unimodular group, *Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A.*, 38 (1952), 337—342.
- 15**. Invariant eigendistributions on semisimple Lie groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 (1963), 117—123.

Хелгасон (Helgason S.)

1. Partial differential equations on Lie groups, *Scand. Math. Congr.*, XIII, Helsinki, 1957, 110—115.
2. On Riemannian curvature of homogeneous spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9 (1958), 831—838.
3. Differential operators on homogeneous spaces, *Acta. Math.*, 102 (1959), 239—299.
4. Some remarks on the exponential mapping for an affine connection, *Math. Scand.*, 9 (1961), 129—146.
5. Some results on invariant theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68 (1962).

6**. Duality and Radon transform for symmetric spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 782—788.

7**. Fundamental solutions of invariant differential operators on symmetric spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 778—781.

8**. Duality and Radon transform for symmetric spaces, *Amer. J. Math.*, **85** (1963), 667—692.

Х е р м а н (H e r m a n n R.)

1. Variational completeness for compact symmetric spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 544—546.

2. Geodesics of bounded symmetric domains, *Comment. Math. Helv.*, **35**, (1961), 1—8.

3. A Poisson kernel for certain homogeneous spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 892—899.

4**. Geometric aspects of potential theory in bounded symmetric domains I, II, *Math. Ann.*, **148** (1962), 349—366, там же, **151** (1963), 143—149.

Х и к с (H i c k s N.)

1. A theorem on affine connexions, *Illinois J. Math.*, **3** (1959), 242—254.

2. An example concerning affine connexions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 952—956.

Х и р ц е б р у х (H i r z e b r u c h F.)

1. Automorphe Formen und der Satz von Riemann-Roch. Int. Symposium on Algebraic Topology, Mexico, 1958.

Х о п ф (H o p f H.)

1. Über den Rang geschlossenen Liescher Gruppen, *Comment. Math. Helv.*, **13** (1940), 119—143.

2. Maximale Toroide und singuläre Elemente in geschlossenen Lieschen Gruppen, *Comment. Math. Helv.*, **15** (1943), 59—70.

Х о п ф и Р и н о в (H o p f H., R i n o w W.)

1. Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche, *Comment. Math. Helv.*, **3** (1931), 209—225.

Х о х ш и л ь д (H o c h s c h i l d G.)

1. The automorphism group of a Lie group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 209—216.

Х у а Л о - г е н (H u a L. K.)

1. On the Riemannian curvature of the non-Euclidean space of several complex variables, *Acta Math. Sinica*, **4** (1954), 141—168.

2. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях, ИЛ, М., 1959.

Ч ж а й (C h a e Y.)

1. Symmetric spaces which are mapped conformally on each other, *Kyungpook Math. J.*, **2** (1959), 65—72.

Ч ж э н ь (C h e r n S. S.)

1. On integral geometry in Klein spaces, *Ann. of Math.*, **43** (1942), 178—189.

2. On a generalization of Kähler geometry, Algebraic Geometry and Topology (S. Lefschetz symposium), 103—121. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1957.
3. Topics in differential geometry, Inst. Adv. Study, Princeton, New Jersey, Notes, 1951.

Ч ж э н ь и Ш е в а л л е (C h e r n S. S., C h e v a l l e y C.)

1. Élie Cartan and his mathematical work, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 58 (1952), 217—250.

Ч э н ь (C h e n K. T.)

1. On the composition functions of nilpotent Lie groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 1158—1159.

Ш в а р ц (S c h w a r t z L.)

1. Théorie des distributions, I, II, Hermann, Paris, 1950, 1951.

Ш е в а л л е (C h e v a l l e y C.)

1. An algebraic proof of a property of Lie groups, *Amer. J. Math.*, 63 (1941), 785—793.
2. Теория групп Ли, т. I, ИЛ., М., 1948.
3. Algebraic Lie algebras, *Ann. of Math.*, 48 (1947), 91—100.
4. The Betti numbers of the exceptional simple Lie groups, *Proc. Int. Cong. of Math. Harvard*, II (1950), 21—24.
5. Sur certains groupes simples, *Tôhoku Math. J.*, 7 (1955), 14—66.
(Имеется русский перевод: *Математика* 2 : 1 (1958), 3—53.)
6. Теория групп Ли, т. III, ИЛ, М., 1958.
7. Invariants of finite groups generated by reflections, *Amer. J. Math.*, 77 (1955), 778—782.

Ш и р о к о в А. П.

1. Об одном типе симметрических пространств, *Матем. сб.*, 41 (83), (1957), 361—372.

Ш р а й е р (S c h r e i e r O.)

1. Abstrakte kontinuierliche Gruppen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 4 (1925), 15—32.

Ш т и ф е л ь (S t i e f e l E.)

1. Kristallographische Bestimmung der Charaktere der geschlossenen Lie'schen Gruppen, *Comment. Math. Helv.*, 17 (1944—45), 165—200.

Ш у р (S c h u r I.)

1. Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie, *Sitzungsber. d. Preuss. Ak. d. Wiss.* (1927), 189, 297, 346.

Э й з е н х а р т (E i s e n h a r t L. P.)

1. Непрерывные группы преобразований, ИЛ, М., 1948.

Э р д е й и и др. (E r d é l y i A. et al.)

1. Higher Transcendental Functions (Bateman Manuscript Project), vol. I. McGraw-Hill, New York, 1953.

Э р е н п р а й с и М а у т н е р (E h r e n p r e i s L., M a u t n e r F. I.)

1. Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups, I, *Ann. of Math.*, 61 (1955), 406—439; II, III, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 84 (1957), 1—55; 90 (1959), 431—484.

Э р е с м а н (E h r e s m a n n C.)

1. Sur certains espaces homogènes de groupes de Lie, *Enseignement Math.*, 35 (1936), 317—333.

Я н о (Y a n o K.)

1. The theory of Lie derivatives and its applications, North-Holland, Amsterdam, and Interscience, New York, 1957.

Я н ь (Y e n C. T.)

1. Sur les représentations linéaires de certains groupes et les nombres de Betti des espaces homogènes symétriques, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 228 (1949), 1367—1369.
- 2**. Sur les automorphismes d'une algèbre simple réelle, *Science Record* (1959), 271—279.

СПИСОК ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

I. Теория множеств. Пусть A и B — множества. Символ $A \subset B$ значит, что A является подмножеством в B . Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то A называется *собственным* подмножеством в B . Пустое множество обозначается через $\emptyset$. Множество $A \setminus B$ — это множество элементов множества A , не содержащихся в B . Символы $\cap$, $\cup$ соответственно обозначают пересечение и объединение множеств. Символ $x \in A$ ($x \notin A$) означает, что x является (x не является) элементом множества A . Подмножество в A , состоящее из одного элемента x , обозначается через $\{x\}$. Если M , N — множества, то символ $f: M \rightarrow N$ обозначает отображение множества M в N . Если $M \subset N$ и $f(m) = m$ для всех $m \in M$, то f называется *тождественным отображением* множества M в N и обозначается через I или 1 . Если $f: M \rightarrow N$ и $g: N \rightarrow P$, то отображение, сопоставляющее каждому $m \in M$ элемент $g(f(m)) \in P$, обозначается через $g \circ f$. Если $f: M \rightarrow N$ и $A \subset N$, то через $f^{-1}(A)$ обозначается множество элементов $m \in M$, для которых $f(m) \in A$. Если $\mathcal{P}$ — некоторое свойство и M — множество, то через $\{x \in M \mid x \text{ обладает свойством } \mathcal{P}\}$ обозначается множество элементов $x \in M$, обладающих свойством $\mathcal{P}$. Таким образом, $f^{-1}(A) = \{m \in M \mid f(m) \in A\}$. Символ $\Rightarrow$ означает «влечет за собой». Чтобы ставить меньше скобок, образ $f(m)$ элемента m при отображении f иногда обозначается через $f \cdot m$. Отображение $f: M \rightarrow N$ называется *взаимно однозначным*, если $m_1 \neq m_2 \Rightarrow f(m_1) \neq f(m_2)$. Если $f(M) = N$, то говорят, что f есть отображение множества M на N (« f — отображение на»).

II. Алгебра. Единица группы обычно обозначается через e . Если K — подгруппа группы G , то символ G/K обозначает множество левых смежных классов gK ($g \in G$). При рассмотрении подгруппы K в качестве элемента множества G/K она иногда обозначается через $\{K\}$. Если $x \in G$, то отображение $gK \rightarrow xgK$ множества G/K на себя обозначается через $\tau(x)$.

Под полем мы всегда понимаем коммутативное поле характеристики 0. Пусть V — векторное пространство над полем K . *Двойственное пространство*, состоящее из линейных отображений пространства V в K , обозначается через V^* или $V^\wedge$. Размерность векторного пространства V обозначается через $\dim V$ или

$\dim_K V$. Если $\dim V < \infty$, то $(V^*)^*$ можно отождествить с V . Если $e_1, \dots, e_n$ — базис пространства V и $f_1, \dots, f_n$ — такие линейные отображения пространства V в K , что $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера), то набор $f_1, \dots, f_n$ называется *базисом* пространства V^* , *двойственным* к $e_1, \dots, e_n$. Пусть W — подпространство в V . *Базис пространства V по mod W* — это множество элементов пространства V , которое вместе с базисом пространства W составляет базис пространства V . Число элементов в базисе пространства V по mod W называется *коразмерностью* подпространства W . Если A и B — такие подпространства векторного пространства V , что каждый $v \in V$ можно записать в виде $v = a + b$, где $a \in A$, $b \in B$, то мы пишем $V = A + B$. Если, кроме того, $A \cap B = \{0\}$, то V называется *прямой суммой* подпространств A и B и подпространство B называется *дополнительным* к A . Если V и W — векторные пространства над одним и тем же полем K , то *прямое произведение* пространств V и W , обозначаемое через $V \times W$, есть множество всех пар (v, w) , где $v \in V$, $w \in W$, которое превращается в векторное пространство над K при помощи следующих операций:

$$(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w'), \quad \alpha(v, w) = (\alpha v, \alpha w) \quad (\alpha \in K).$$

Подмножества $\{(v, 0) | v \in V\}$ и $\{(0, w) | w \in W\}$ являются подпространствами в $V \times W$, изоморфными пространствам V и W соответственно, и $V \times W$ есть прямая сумма этих подпространств.

Если $v \in V$, $v^* \in V^*$, то значение $v^*(v)$ иногда обозначается через $\langle v, v^* \rangle$. Пусть A — линейное отображение векторного пространства V в векторное пространство W над тем же полем. *Сопряженное к A (или двойственное к A)* отображение, обозначаемое через ${}^tA$, — это линейное отображение $W^* \rightarrow V^*$, определенное формулой $\langle Av, w^* \rangle = \langle v, {}^tA w^* \rangle$. Линейное отображение $A: V \rightarrow V$ часто называется *эндоморфизмом* пространства V . Если V конечномерно, то *определитель* и *след* эндоморфизма A обозначаются через $\det A$ и $\text{Tr } A$ соответственно.

Пусть V и W — векторные пространства над одним и тем же полем K . *Билинейная форма* на $V \times W$ — это такое отображение $B: V \times W \rightarrow K$, что для каждого $v \in V$ отображение $B_v: w \rightarrow B(v, w)$ принадлежит к W^* и что для каждого $w \in W$ отображение $B^w: v \rightarrow B(v, w)$ принадлежит к V^* . Таким образом, билинейная форма на $V \times W$ порождает линейные отображения $V \rightarrow W^*$ и $W \rightarrow V^*$. Билинейная форма B называется *невырожденной*, если из того, что $v \neq 0$, следует, что $B_v \neq 0$, и из $w \neq 0$ следует, что $B^w \neq 0$. Множество всех билинейных форм на $V \times W$ является векторным пространством над K . Двойственное к нему пространство обозначается через $V \otimes W$ и называется *тензорным произведением* пространств V и W . Каждый элемент $(v, w) \in V \times W$ порождает элемент $v \otimes w$ из $V \otimes W$, определенный формулой

$(v \otimes w)(B) = B(v, w)$. Прямая сумма $K + V + V \otimes V + V \otimes V \otimes V + \dots$ есть ассоциативная алгебра с операцией $\otimes$ — *тензорная алгебра* $T(V)$ над V .

Обозначим через R и C соответственно поля вещественных и комплексных чисел. Обозначим через Z кольцо целых чисел. Пусть V — векторное пространство над R . Билинейная форма B на $V \times V$ называется *симметрической*, если $B(v, v') = B(v', v)$ для $v, v' \in V$, *неотрицательной*, если $B(v, v) \geq 0$ для $v \in V$, и *положительно определенной*, если $B(v, v) > 0$ для $v \neq 0$ из V . Пусть W — векторное пространство над C . Отображение $B: W \times W \rightarrow C$ называется *эрмитовой формой*, если для каждого $w_0 \in W$ отображение $w \rightarrow B(w, w_0)$ линейно и если для каждой пары $(w', w'') \in W \times W$ комплексные числа $B(w', w'')$ и $B(w'', w')$ являются сопряженными.

Под *кольцом* мы всегда понимаем коммутативное кольцо с единицей. Пусть A — кольцо. Коммутативная группа M называется *модулем* над A (или A -модулем), если для каждого $a \in A$ и $m \in M$ определен элемент am , такой, что

$$\begin{aligned} a(m_1 + m_2) &= am_1 + am_2, (a_1 + a_2)m = a_1m + a_2m, \\ (a_1a_2)m &= a_1(a_2m), 1m = m. \end{aligned}$$

Подмножество $N \subset M$, обладающее тем свойством, что для $n_1, n_2 \in N$ имеем $n_1 + n_2 \in N$ и $an_1 \in N$ для каждого $a \in A$, называется *подмодулем* в M .

Векторное пространство V над полем K называется (ассоциативной) *алгеброй* (над K), если в V существует умножение, обладающее свойствами: $\alpha(v_1v_2) = (\alpha v_1)v_2 = v_1(\alpha v_2)$, $1v = v$, $(v_1v_2)v_3 = v_1(v_2v_3)$, $v_1(v_2 + v_3) = v_1v_2 + v_1v_3$, $(v_1 + v_2)v_3 = v_1v_3 + v_2v_3$ для $\alpha \in K$, $v, v_1, v_2, v_3 \in V$. Пусть A — алгебра (с единицей 1) над полем K и V — векторное пространство над K . *Представление* алгебры A в V — это такой гомоморфизм ϱ алгебры A в алгебру всех эндоморфизмов пространства V , что $\varrho(1) = I$.

III. Топология. Под топологическим пространством всегда понимается топологическое пространство, в котором имеет место аксиома отделимости Хаусдорфа. Пусть M — топологическое пространство. Набор $\{U_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) открытых подмножеств пространства M называется *базисом открытых множеств*, если каждое открытое множество можно записать в виде объединения некоторых U_α . Если $p \in M$, то *окрестность* точки p — это подмножество в M , содержащее открытое в M подмножество, в котором лежит p . *Фундаментальная система окрестностей* точки p — это такая система $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ окрестностей точки p , что каждая окрестность точки p содержит некоторую N_α . Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если оно обладает счетным плотным подмножеством. Для метрических пространств сепара-

бельность эквивалентна существованию счетного базиса открытых множеств. Топологическое пространство называется *компактным*, если каждое открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Подмножество топологического пространства называется *относительно компактным*, если его замыкание компактно. Отображение $f: M \rightarrow N$ топологического пространства M на топологическое пространство N называется *локальным гомеоморфизмом* пространства M на N , если каждая точка $m \in M$ имеет открытую окрестность, которую f гомеоморфно отображает на некоторую открытую окрестность точки $f(m)$ в N . *Область* в топологическом пространстве — это открытое связное подмножество. *Путь* (или *непрерывная кривая*) в топологическом пространстве — это непрерывное отображение замкнутого отрезка $[a, b]$ в наше пространство. Пространство называется *линейно связным*, если любые две точки в пространстве можно соединить путем. Топологическое пространство называется *локально связным* (*локально линейно связным*), если каждая окрестность произвольной точки p пространства содержит связную (линейно связную) окрестность точки p .

ЧАСТО УПОТРЕБЛЯЕМЫЕ СИМВОЛЫ

В дополнение к предшествующему списку обозначений приводим список символов, значение которых, как правило, не меняется на протяжении всей книги. Символы, введенные в § 5 гл. V, не перечисляются.

- ad: присоединенное представление алгебры Ли, 105
- Ad: присоединенное представление группы Ли, 136
- $A[x_1, \dots, x_n]$: кольцо, порожденное элементами $x_1, \dots, x_n$ над A ,
- $A(M)$, $A_0(M)$: группа голоморфных изометрий и ее компонента единицы, 331
- $\text{Aut}(\mathfrak{a})$: группа автоморфизмов алгебры $\mathfrak{a}$, 135
- $\mathfrak{A}(M)$: алгебра Грассмана, 30
- $\mathfrak{A}_s(M)$: множество s -форм на M , 29
- $B_r(p)$: открытый шар радиуса r с центром p , 64
- $B(X, Y)$: форма Киллинга, 140
- C^n : n -мерное комплексное пространство, 14
- $C(M)$, $C_c(M)$: множество непрерывных функций, множество непрерывных функций с компактными носителями, 395
- C^∞ : бесконечно дифференцируемый, 14, 16
- $C^\infty(M)$, $C_c^\infty(M)$: множество дифференцируемых функций, множество дифференцируемых функций с компактными носителями, 16, 395
- $C^\natural(G)$: множество двусторонне инвариантных функций в групповой алгебре, 444
- γ_X : максимальная геодезическая, определяемая вектором X , 42
- d : внешнее дифференцирование, 31
- $d\Phi_p$: дифференциал отображения Φ в точке p , 34
- div: дивергенция, 422
- $D(U, K)$, $D(u, \theta)$: диаграмма пары (U, K) , 281
- $D(U)$, $D(u)$: диаграмма группы U , 286
- $D(G)$, $D_0(G)$, $D(G/H)$: алгебры инвариантных дифференциальных операторов, 424
- $\mathfrak{D}^1(M)$, $\mathfrak{D}_1(M)$: множество векторных полей (1-форм), 19, 22
- $\mathfrak{D}(M)$, $\mathfrak{D}(p)$, $\mathfrak{D}^*(M)$, $\mathfrak{D}^*(p)$, $\mathfrak{D}_*(M)$, $\mathfrak{D}_*(p)$: тензорные алгебры, 23, 24
- $\mathfrak{D}_s^r(M)$: множество тензорных полей типа (r, s) , 25
- Δ : множество ненулевых корней, 161; оператор Лапласа — Бельтрами, 422
- Exp: экспоненциальное отображение для аффинной связности, 45
- exp: экспоненциальное отображение для группы Ли, 111

- $E_{\mathbb{R}}$: комплексное векторное пространство, рассматриваемое как пространство над полем $\mathbb{R}$, 174
 $\mathcal{E}_0$: множество комплекснозначных дифференцируемых функций на M , 315
 $\mathcal{E}_s^r(M)$: множество комплексных тензорных полей типа (r, s) , 315
 $f * g$: свертка, 444
 $\mathfrak{F}$: множество вещественных дифференцируемых функций, 15
 grad : градиент, 422
 G/H : пространство левых смежных классов gH ($g \in G$), 128
 $GL(n, \mathbb{R})$: группа невырожденных вещественных матриц порядка n , 118
 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$: алгебра Ли всех вещественных матриц порядка n , 118
 $\mathfrak{gl}(V)$: алгебра Ли всех эндоморфизмов пространства V , 106
 $\mathfrak{g}^\alpha$: корневое подпространство, 161
 $\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}, \mathfrak{h}_{p_0}, \mathfrak{h}_p, \mathfrak{h}_{p*}$: максимальные абелевы подалгебры, 161, 247
 $\mathfrak{h}^*$: вещественное пространство, натянутое на корневые векторы, 166
 $\text{Int}(\mathfrak{a})$: присоединенная группа алгебры $\mathfrak{a}$, 135
 $I(M), I_0(M)$: группа изометрий и ее компонента единицы, 189
 J : почти комплексная структура, 311
 $K(z, \zeta)$: ядр-функция, 325
 $L_\rho, L(\rho)$: левый сдвиг на элемент ρ , 105, 399
 $\mathfrak{L}(G)$: алгебра Ли группы G , 105
 λ : отображение симметризации алгебры $S(\mathfrak{g})$ на $D(G)$, 427
 $\mathfrak{m}_0, \mathfrak{l}_0$: централизатор пространства $\mathfrak{h}_{p_0}$ и его ортогональное дополнение в $\mathfrak{k}_0$, 249
 M, M' : централизатор и нормализатор пространства $\mathfrak{h}_{p*}$, 272
 M_p : касательное пространство в точке p , 21
 $M^\sim$: оператор среднего значения, 472
 $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_0$: нильпотентные алгебры Ли, 249
 ∇ : аффинная связность, 38
 ∇_X : ковариантное дифференцирование, 38, 53
 P_+, P_- : множества положительных корней, 248
 π : естественная проекция группы G на G/H , 129, представление, 448
 X^Φ, A^Φ : образ векторного поля X (оператора A) при преобразовании, 36, 37
 Φ^*T : образ ковариантного тензорного поля T при преобразовании, 37
 R : тензор кривизны, 56
 $\mathbb{R}^n$: n -мерное евклидово пространство, 12
 $R_\rho, R(\rho)$: правый сдвиг на элемент ρ , 399
 $S_r(p)$: сфера радиуса r с центром p , 64
 s_p : геодезическая симметрия в точке p , 185
 $S(V)$: симметрическая алгебра над V , 427
 T_X : ограничение эндоморфизма $(\text{ad } X)^2$, 203
 $T(V)$: тензорная алгебра над V , 107, 427
 $\tau(x)$: отображение $gH \rightarrow xgH$, 128

$W(U, K), W(u, \theta)$: группа Вейля пары (U, K) , 273

$W(U), W(u)$: группа Вейля группы U , 286

W^C : комплексная оболочка пространства W , 175

X^* : векторное поле, адаптированное к вектору X , 49

$U(\mathfrak{g})$: универсальная обертывающая алгебра, 106

Z_x : централизатор элемента x , 288

$[,]$: коммутатор, 19, 105

$\wedge$: внешнее умножение, 31

$\langle , \rangle$: скалярное произведение, 448

$\| \cdot \|$: длина вектора, норма. 61, 449

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоморфизм 106
 Алгебра 17
 —, внутреннее дифференцирование 135
 —, внутренний автоморфизм 135
 — Грассмана 29
 — групповая 444
 —, дифференцирование 19, 135
 Алгебра Ли абелева 106
 — — группы 105
 — — двойственная 223
 — —, изоморфизм 218
 — — компактная 139
 — — компактного типа 218
 — —, комплексная оболочка 175
 — — над полем 105
 — — некомпактного типа 218
 — — нильпотентная 155, 157
 — — ортогональная симметрическая 201
 — — — неприводимая 337, 339
 — — полупростая 140
 — —, полупростое представление 183
 — —, представление 106
 — —, — присоединенное 106
 — — производная 153
 — — простая 140
 — —, прямое произведение 106
 — — разрешимая 153
 — —, сопряжение 176
 — —, тройная система 213
 — — универсальная обертывающая 106
 — —, центр 106
 — симметрическая 427
 — смешанная тензорная 28
 — тензорная 24
 Альтернирование 30
 Базис Вейля 363
 —, совместимый с убывающим центральным рядом 252
 Бергмана конфигурация 326
 — метрика 328
 Бесселя преобразование 44
 Бьянки тождество 83
 Вейля базис 363
 — группа 273, 278, 279
 — камера 277, 286
 — унитарный прием 183
 Вектор аналитический 478
 — касательный 21
 — комплексный касательный 316
 Вес 252
 Внешнее произведение 30
 Выражение отображения множества в координатах 33
 — эндоморфизма 150
 Геодезическая 42
 — замкнутая 388
 — максимальная 42
 — —, длина 388
 Гомоморфизм 15, 106
 — аналитический 105
 Группа Вейля, 273, 278, 279
 — голономии 184
 — изотропии 130, 133
 — — линейная 133
 —, компонента единицы 104
 — накрывающая 105
 Группа Ли 104
 — —, изоморфизм 116
 — — локальный изоморфизм 116
 — — нильпотентная 155, 157, 251
 — — преобразований многообразия 130
 — — присоединенная 135
 — — разрешимая 153
 — — унимодулярная 401
 — топологическая локально евклидова 104
 — преобразований 128
 — эффективная 128
 Дарбу уравнение 482
 Диаграмма группы 286
 — пары 281
 Дивергенция поля 422
 Диффеоморфизм 12
 — аналитический 34
 — многообразия 34
 —, сохраняющий ориентацию 397

- Дифференциал 34
 Дифференцирование ковариантное 53
 Замыкание подкольца целое, 456
 Ивасава разложение 246, 258, 265
 Идеал 106
 Изометрия 74
 — локальная 74
 —, непосредственное продолжение 76
 —, продолжение вдоль 76
 Изоморфизм 106
 — аналитический 105
 Инвариантность 37
 Камера Вейля 277, 286
 Карта локальная 14
 — открытая 13
 Картана подалгебра 158, 161
 — разложение 179
 — теорема 90
 — — сопряженности 244
 Квазиподмногообразие 291
 Кольцо целозамкнутое 456
 Коммутатор полей 19
 Конфигурация Бергмана 326
 Координаты, каноническая система 111
 —, локальная система 14
 — локальные 14
 Корень алгебры 161
 — компактный 344
 — некомпактный 344
 Кривая 40
 — геодезическая 42, 44
 — — максимальная 42, 43
 — интегральная 53
 Кривизна геодезическая кривой 101
 — многообразия 78
 — — в двумерном направлении 79
 — Риччи 320, 322
 Лексикографическое упорядочение 169
 Лемма Чариш-Чандра 262
 Ли алгебра см. Алгебра Ли
 Ли группа см. Группа Ли
 — подалгебра компактно вложенная 139
 — подгруппа 119
 — — аналитическая 120
 — производная 19
 — тройная система 213
 Луч 73
 — начальная точка 73
 Максимальный ряд 164
 Матрица верхняя треугольная 150
 — диагональная 151
 — нижняя треугольная 151
 Мера 395, 399
 — левоинвариантная 399
 — положительная 395
 — правоинвариантная 399
 — риманова 398
 Метрика Бергмана 328
 Многообразие 14
 — аналитическое 14
 — аффинное локально симметрическое 185
 — дифференцируемое 14
 — класса C^∞ 14
 — комплексное 14
 — накрывающее 72
 — однородное 330
 — ориентированное 320
 — ориентируемое 320
 — почти комплексное 311
 —, произведение 18
 — псевдориманово 60
 — — аналитическое 61
 — риманово аналитическое 192
 — — глобально симметрическое 192
 — — отрицательной кривизны 87
 — — плоское 234
 — — полное 68, 69
 — — — в точке 71
 Многочлен канонический 252
 Множество антиподальное 389
 — полупростое 152
 — сингулярное 282, 287
 — упорядоченное 168
 — частично упорядоченное 168
 Модуль двойственный 22
 —, прямая сумма 24
 —, прямое произведение 24
 Носитель компактный 16, 19
 Область ограниченная 323
 Оболочка комплексная алгебры Ли 175
 — подмножества 167
 Окрестность каноническая координатная 111
 — компактная 15
 — координатная 14
 — нормальная начала координат 46
 — — точки 46
 — сферическая 46, 47
 — — нормальная 64
 Оператор дифференциальный 420

- Оператор Казимира 489
 — Лапласа — Бельтрами 421
 — сопряженный 489
 Отображение алгебры экспоненциальное 111
 — альтернативное 30
 — аналитическое 12, 33
 — голоморфное, 312, 314
 — дифференцируемое 14
 — линейное 21
 — А-полилинейное 24
 — полиномиальное 254
 — почти комплексное 314
 — регулярное 35
 — экспоненциальное 45
- Пара риманова симметрическая 197
 —, связанная с ортогональной симметрической алгеброй Ли 201
 — симметрическая 197
- Параллелизм 41
- Пары диаграмма 281
- Подалгебра 106
 — Картана 158
 — Ли компактно вложенная 139
- Подгруппа Ли 119
 — — аналитическая 120
 — — однопараметрическая 111
 — псеодоалгебраическая 377
- Подмногообразие 35
 — вполне геодезическое 94
 — геодезическое в точке 94
 — открытое 18
- Подпространство инвариантное 151
 — корневое 161
- Покрытие 18
 — локально конечное 18
- Поле векторное 19, 20
 — — аналитическое в точке 22
 — — индуцированное 130
 — — комплексное 315
 — — проектируемое 98
 — — Ф-связное 36
 —, дивиргенция 422
 — тензорное 19, 25
 — — комплексное 315
 — — кривизны 56
 — — кручения 56
 — — r раз контравариантное 25
 — — s раз ковариантное 25
- Представление алгебры 106
 — группы 448
 — класса 1 450
 — неприводимое 448
 — полупростое алгебры Ли 183
 — присоединенное 106
 — унитарное 448
- Представление, характер 448
 Преобразование аффинное 40
 — Бесселя 447
 — Фурье 446
 Произведение внешнее 30
 — тензорное 25, 27
 Пространство векторное 25
 — — комплексное, связанное с действительным 174
 — — упорядоченное 168
 — вещественное гиперболическое 382
 —, диаметр 482
 — касательное 21
 — кватернионное гиперболическое 384
 — — проективное 384
 — компактного типа 232
 — комплексное проективное 382
 —, лексикографическое упорядочение 169
 — накрывающее 72
 — некомпактного типа 232, 240
 — неприводимое 151
 — однородное 128
 — паракомпактное 18
 —, ранг 234
 — риманово локально симметрическое 184, 188
 — топологическое 13
 — — нормальное 18
 — хаусдорфово 14
 — эрмитово гиперболическое 382
 — — симметрическое 331
 — — — компактного типа 333, 336, 341
 — — — некомпактного типа 333, 336, 341
- Путь накрывающий 73
- Разложение в целом 262
 — Ивасави 246, 258, 265
 — Картана 179
- Расстояние 63
- Решетка единичная 291
- Риманово локально симметрическое пространство 188
 — плоское многообразие 234
- Риччи кривизна 320, 322
- Ряд максимальный 164
- Свертывание 28
- Связность аффинная 38
 — — аналитическая 49
 — — инвариантная 39
 — — левоинвариантная 108
 — псевдориманова 50, 61

- Сечение локальное 131
 Симметризация 428
 Степень 252, 254
 Структура аналитическая 14
 — дифференцируемая 14
 — каноническая 314
 — комплексная 173, 312
 — кэлерова 317, 319
 — подчиненная 313
 — почти комплексная 311
 — — — интегрируемая 312
 — эрмитова 317, 319
 Сфера 64
 Тензор кручения 312
 Теорема Александрова 64
 — Картана 90
 — о категории 128
 — — разбиении единицы 18
 — сопряженности Э. Картана 244
 — Хариш-Чандра 412, 470
 — Энгеля 156
 Тождество Якоби 19, 105
 Топология естественная 128
 — компактно открытая 189
 Тор 144
 Точка сопряженная 72
 Упорядочение лексикографическое
 пространства 169
 — совместимое 248
 Уравнение Дарбу 482
 Уравнения структурные 57
 Факторпространства редуктивные
 424
 Форма вещественная алгебры Ли 175
 — внешняя дифференциальная 29,
 31
 — дифференциальная левоинвари-
 антная 398
 — — правоинвариантная 398
 —, — 1-форма 22
 Форма Киллинга 140
 — комплексная 1-форма 315 Ф
 — нормальная 363
 —, положительная n -форма 397
 —, характер 386
 Функция 12
 — аналитическая 15
 — голоморфная 15, 318
 — дифференцируемая 13, 15
 — — в точке 15
 — полиномиальная 253
 — положительно определенная 448
 — центральная 447
 Фурье преобразование 446
 Характер представления 448
 — формы 386
 Хариш-Чандра лемма 262
 Цепное условие 154
 Шар выпуклый нормальный 66
 — — — минимизирующий 66
 — открытый 64
 Элемент объема 321
 — регулярный 158, 287
 — сингулярный 287
 — целый 455
 Энгеля теорема 156
 Эндоморфизм, выражение 150
 —, нильпотентная часть 152
 — нильпотентный 151
 —, полупростая часть 152
 —, собственное значение 151
 —, собственный вектор 151
 —, характеристический многочлен
 151
 —, характеристическое уравнение
 151
 Эрмита структура 317, 319
 Якоби тождество 19, 105

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адамар 101, 495
Адлер 495
Алламижон 494, 495
Амброуз 216, 494
Араки 495
Аренс 149, 215, 494
Баргман 495
Баррет 496
Бергман 356, 496
Березин 493, 496
Берже 215, 271, 393, 496
Биркгоф 148, 496
Борель 216, 310, 356, 497
Ботт 310, 497
Бохнер 314, 324, 356, 497
Бремерман 497
Брюа 149, 497
Буземан 497
Бурбаки 182, 395, 498
Бхану Мурти 394, 498
Ван-Данциг 215, 498
Ван-дер-Варден 215, 393, 498
Ван-Эст 147, 498
Ван 388, 498
Везентини 501
Вейль А. 405, 444, 498
Вейль Г. 149, 183, 239, 308, 310, 393, 394, 493
Виленкин Н. Я. 498, 500
Волмэн 282, 305, 306, 501
Врэнчану 499
Ганголли 499
Ганнинг 499
Гантмахер Ф. Р. 393, 498
Гельфанд И. М. 493, 496, 499
Гидикин С. В. 394, 500
Гильберт 148
Годеман 148, 447, 491, 494, 500
Гординг 497, 500
Гото 148, 500
Граев М. И. 496, 500
Гурвиц 493, 501
Гуревич 282, 306, 307, 501
Гюнтер 494, 501
Далла Вольта 501
Де Рам 70, 102, 460, 462, 508
Диксмье 501, 503
Джекобсон 501
Дынкин Е. Б. 310, 393, 501
Зарисский 454, 457, 501
Зейферт 308, 501
Зигель 501
Зиппин 148, 507
Ивамото 501
Ивасава 268, 501
Йон 436, 501
Кабаяси 267, 504
Калаби 501
Канеюки 502
Карпелевич Ф. И. 359, 496, 502
Картан А. 502
Картан Э. 11, 60, 102, 111, 148, 149, 182, 183, 184, 215, 216, 239, 268, 308, 309, 310, 356, 371, 384, 386, 387, 388, 392, 393, 502
Картье 503
Келли 19, 503
Кёхер 504
Киллинг 392, 504
Клинген 504
Козюль 98, 102, 504
Колчин 183, 504
Кокстер 393, 504
Кон 504
Костант 310, 393, 504
Крейн М. Г. 505
Криттенден 505
Кунце 505
Кэлер 356, 505
Ларди 386, 393, 505
Лауденслагер 505
Леджер 505
Ли 183, 479, 505, 590
Либерман 356, 505
Листер 505
Лихнерович 216, 356, 494, 505

- Маас 506
 Майерс 101, 215, 506
 Мальцев А. И. 506
 Мартин 314, 324, 497, 506
 Маурер 148
 Маутнер 506, 514
 Мацусима 506, 511
 Мейер 506
 Миллер 43, 44, 506
 Монтгомери 148, 507
 Моримото 463, 507
 Морита 386, 507
 Мостов 101, 148, 183, 216, 268, 493, 507
 Мураками 507
 Муррей 43, 44, 506
- Нагано 388, 507
 Наймарк М. А. 493, 494, 496, 500, 507
 Нейман 149, 511
 Нелсон 497, 507
 Ниренберг 315, 356, 507
 Номидзу 101, 148, 149, 215, 216, 424, 507
 Ньюлендер 315, 356, 507
- Онищик А. Л. 310, 393, 501
- Палэйс 493, 508
 Петер 508
 Понтрягин Л. С. 148, 306, 310, 361, 379, 508
 Пфлюгер 64, 508
 Пятецкий-Шапиро И. И. 356, 508
- Райков Д. А. 494, 508
 Раух 508
 Рашевский П. К. 508
 Риман 102, 508
 Ринов 102, 508, 513
 Розенфельд Б. А. 215, 508
 Ротхауз 509
 Руз 493, 509
- Сабинин Л. В. 509
 Саймонс 393, 509
 Самельсон 149, 183, 310, 497, 509
 Самюэль 454, 457, 501, 509
 Сатака 268, 509
 Сегал 509
 Сельберг 494, 509
 Сингер 495, 509
 Синюков Н. С. 510
 Сирота А. И. 510
 Скоутен 101, 111, 503, 510
 Степанов В. В. 43, 510
- Стинрод 101, 215, 382, 506, 510
 Стрейк 101, 510
 Сужура 510
 Сумитомо 510
- Такахаси 510
 Такеути 510
 Тамагава 510
 Телеман 510
 Титс 388, 510
 Томас 506
 Трельфалль 308, 501
 Тутубалин В. Н. 510
- Уайтхед 102, 215, 310, 510
 Уилмор 494, 511
- Феденко А. С. 215, 511
 Феллер 494, 511
 Фомин 511
 Фон Нейман 149, 511
 Фрейденталь 149, 393, 511
 Фрелихер 315, 355, 356, 511
 Фюрстенберг 511
- Хано 511
 Хант 239, 512
 Хариш — Чандра 148, 248, 262, 267, 268, 308, 310, 356, 362, 394, 427, 432, 467, 479, 493, 512
 Хелгасон 216, 388, 421, 490, 494, 512
 Херман 513
 Хикс 89, 146, 513
 Хирцербрух 497, 513
 Хопф 102, 310, 513
 Хохшильд 147, 513
 Хуа 513
- Чжай 513
 Чжэнь 493, 513
 Чэнь 268, 513
- Шварц 148, 421, 514
 Шевалле 30, 52, 101, 117, 121, 147, 148, 149, 183, 239, 352, 362, 377, 379, 396, 469, 514
 Широков П. А. 514
 Шрайер 514
 Штифель 514
 Шур 493, 514
- Эйзенхарт 514
 Экман 356
 Эрдейи 441, 514
 Эренпрайс 514
 Эресман 216, 515
- Яно 515
 Янь 515

ОГЛАВЛЕНИЕ

От Издательства	5
Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие	7
Указания читателю	10

ГЛАВА I

Элементарная дифференциальная геометрия	11
§ 1. Многообразия	12
§ 2. Тензорные поля	19
1. Векторные поля и 1-формы	19
2. Тензорная алгебра	24
3. Алгебра Грассмана	29
4. Внешнее дифференцирование	31
§ 3. Отображения	33
1. Интерпретация матрицы Якоби	33
2. Преобразование векторных полей	36
3. Действие на дифференциальные формы	37
§ 4. Аффинные связности	38
§ 5. Параллелизм	40
§ 6. Экспоненциальное отображение	44
§ 7. Ковариантное дифференцирование	53
§ 8. Структурные уравнения	56
§ 9. Риманова связность	60
§ 10. Полные римановы многообразия	68
§ 11. Изометрии	74
§ 12. Кривизна в двумерном направлении	78
§ 13. Римановы многообразия отрицательной кривизны	85
§ 14. Вполне геодезические подмногообразия	93
Упражнения	98
Замечания	101

ГЛАВА II

Группы Ли и алгебры Ли	103
§ 1. Экспоненциальное отображение	104
1. Алгебра Ли группы Ли	104

2. Универсальная обертывающая алгебра	106
3. Левоинвариантные аффинные связности	108
4. Формула Тэйлора и ее применения	111
§ 2. Подгруппы Ли и подалгебры	119
§ 3. Группы Ли преобразований	128
§ 4. Факторпространства и однородные пространства	131
§ 5. Присоединенная группа	135
§ 6. Полупростые группы Ли	140
Упражнения	145
Замечания	148

Г Л А В А III

Структура полупростых алгебр Ли 150

§ 1. Предварительные сведения	150
§ 2. Теоремы Ли и Энгеля	153
§ 3. Подалгебры Картана	157
§ 4. Разложение на корневые пространства	161
§ 5. Значение системы корней	167
§ 6. Вещественные формы	173
§ 7. Разложения Картана	178
Упражнения	181
Замечания	183

Г Л А В А IV

Симметричные пространства 184

§ 1. Аффинные локально симметрические пространства	185
§ 2. Группы изометрий	189
§ 3. Римановы глобально симметрические пространства	192
§ 4. Экспоненциальное отображение и кривизна	203
§ 5. Локально и глобально симметрические пространства	206
§ 6. Компактные группы Ли	212
§ 7. Вполне геодезические подмногообразия. Тройные системы Ли	213
Упражнения	215
Замечания	215

Г Л А В А V

Разложение симметрических пространств 217

§ 1. Ортогональные симметрические алгебры Ли	217
§ 2. Двойственность	223
§ 3. Кривизна симметрических пространств в двумерном направлении	229

§ 4. Симметрические пространства с полупростыми группами изометрий	231
§ 5. Обозначения	233
§ 6. Ранг симметрического пространства	234
Упражнения	238
Замечания	239

ГЛАВА VI

Симметрические пространства некомпактного типа 240

§ 1. Разложение полупростой группы Ли	240
§ 2. Максимальные компактные подгруппы и их сопряженность . .	244
§ 3. Разложение Ивасава	246
§ 4. Нильпотентные группы Ли	251
§ 5. Разложения в целом	262
§ 6. Комплексный случай	265
Упражнения	267
Замечания	268

ГЛАВА VII

Симметрические пространства компактного типа 269

§ 1. Контраст между компактным и некомпактным типами	269
§ 2. Группа Вейля	272
§ 3. Сопряженные точки. Сингулярные точки. Диаграмма	280
§ 4. Приложения к компактным группам	283
§ 5. Контроль над сингулярным множеством	290
§ 6. Фундаментальная группа и центр	294
§ 7. Приложение к симметрическому пространству U/K	300
§ 8. Классификация локально изометричных пространств	303
§ 9. Добавление. Результаты из теории размерности	305
Упражнения	308
Замечания	310

ГЛАВА VIII

Эрмитовы симметрические пространства 311

§ 1. Почти комплексные многообразия	311
§ 2. Комплексные тензорные поля. Кривизна Риччи	315
§ 3. Ограниченные области. Кернфункция	323
§ 4. Эрмитовы симметрические пространства компактного и некомпактного типа	331

§ 5. Неприводимые ортогональные симметрические алгебры Ли . . .	337
§ 6. Неприводимые эрмитовы симметрические пространства . . .	341
§ 7. Ограниченные симметрические области	342
Упражнения	353
Замечания	356

ГЛАВА IX

О классификации симметрических пространств 357

§ 1. Редукция задачи	357
§ 2. Автоморфизмы	362
§ 3. Инволютивные автоморфизмы	366
§ 4. Список Э. Картана неприводимых римановых глобально симметрических пространств	371
1. Некоторые группы матриц и их алгебры Ли	371
2. Простые алгебры Ли над $\mathbb{C}$ и их компактные вещественные формы. Неприводимые римановы глобально симметрические пространства типа II и типа IV	379
3. Инволютивные автоморфизмы простых компактных алгебр Ли. Неприводимые римановы глобально симметрические пространства типа I и типа III	380
4. Неприводимые эрмитовы симметрические пространства . .	387
§ 5. Двухточечные однородные пространства. Симметрические пространства ранга 1. Замкнутые геодезические	388
Упражнения	392
Замечания	392

ГЛАВА X

Функции на симметрических пространствах 394

§ 1. Интегральные формулы	395
1. Общие сведения	395
2. Инвариантные меры на факторпространствах	401
3. Некоторые интегральные формулы для полупростых групп Ли	407
4. Интегральные формулы для разложения Картана	414
5. Компактный случай	417
§ 2. Инвариантные дифференциальные операторы	420
1. Общие сведения. Оператор Лапласа — Бельтрами	420
2. Инвариантные дифференциальные операторы на редуктивных факторпространствах	424
3. Случай симметрического пространства	431
§ 3. Сферические функции. Определение и примеры	434
§ 4. Элементарные свойства сферических функций	444
§ 5. Алгебраический аппарат	454

§ 6. Формула для сферических функций	459
1. Евклидов тип	459
2. Компактный тип	460
3. Некомпактный тип	464
§ 7. Теоремы о среднем значении	472
1. Операторы среднего значения	472
2. Приближения аналитическими функциями	478
3. Уравнение Дарбу на симметрическом пространстве	480
4. Уравнение Пуассона в двухточечном однородном пространстве	482
Упражнения	487
Замечания	493
Литература	495
Список принятых обозначений	516
Часто употребляемые символы	520
Предметный указатель	523
Именной указатель	527

С. ХЕЛГАСОН

**Дифференциальная геометрия
и симметрические пространства**

Редактор Г. М. Цукерман

Художник Н. А. Липин

Художественный редактор

В. И. Шаповалов

Технический редактор В. П. Сизова

Корректор В. И. Киселева

Сдано в производство 10/III 1964 г.

Подписано к печати 30/VII 1964 г.

Бумага $60 \times 90 \frac{1}{16} = 16,8$ бум. л.

33,5 печ. л. Уч.-изд. л. 31,8.

Изд. № 1/2135. Цена 2 р. 34 к. Зак. 140

(Темплан 1964 г. Изд-ва ИЛ, пор. № 19)

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2'

Московская типография № 16

Главполиграфпрома

Государственного комитета Совета

Министров СССР по печати

Москва, Трехпрудный пер., 9

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «М И Р»

в 1965 году

выходят следующие книги:

Ф у к с Л., Частично упорядоченные алгебраические системы. Будапешт, 1963, перевод с английского, 15 изд. л.

Книга профессора Будапештского университета Л. Фукса представляет собой первый в мировой литературе систематический обзор по ряду разделов современной алгебры. В ней описываются основные результаты исследований по теории упорядоченных групп, колец и полугрупп. Следует отметить, что в последние годы обнаружены глубокие связи этой теории с математической логикой, а также найдены ее приложения к экономике, вопросам организации производства и другим вопросам.

Книга будет интересным и ценным пособием для всех алгебраистов, начиная от студентов старших курсов и кончая преподавателями и научными работниками, а также и для математиков других специальностей.

Х и л т о н П., У а й л и С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию. Лондон—Нью-Йорк, 1960, перевод с английского, 30 изд. л.

Книга написана крупнейшими представителями современной алгебраической топологии. Методы, развитые в этой области, в последние годы нашли важные приложения в самых различных отделах математики, и книга касается актуальных вопросов, стоящих в центре большого научного направления. Написана она с очень большим мастерством и может служить хорошим введением в важную отрасль математики, а также руководством для систематического ее изучения.

Книга рассчитана на математиков различных специальностей, начиная от студентов младших курсов университетов и пединститутов и кончая аспирантами, преподавателями и научными работниками.

М и л н о р Дж., Теория Морса. Принстон (США), 1963, перевод с английского, 8 изд. л.

Дж. Милнор, один из ведущих американских математиков, широко известен своими работами по топологии гладких многообразий. Его небольшая книжка «Лекции по теории Морса» — образцовое изложение нескольких разделов современной геометрии.

Первые главы посвящены морсовской теории критических точек функций и функционалов, римановой геометрии и вариационному исчислению в целом. Изложение сопровождается примерами приложений к дифференциальной и алгебраической геометрии, топологии и т. д. Книга завершается вычислением стабильных гомотопических групп классических групп Ли (теория Ботта).

Избегая современного алгебраического формализма, автор сумел сочетать геометрическую наглядность с полной строгостью доказательств. Большое количество рисунков делает изложение очень простым и доступным.

Книга представляет интерес для широких кругов математиков всех специальностей. Ее смогут использовать в качестве учебника студенты университетов и пединститутков, знакомые с основными понятиями топологии.

Уважаемый читатель!

На эти книги Вы можете оформить предварительный заказ; это обеспечит Вам приобретение книг в первые дни продажи.

Предварительные заказы на готовящиеся к изданию в 1965 г. книги принимают книжные магазины.

2334

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И СИМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

С. ХЕАТАСОН